Épreuve anticipée de mathématiques – Sujet 0

Voie générale : candidats suivant l'enseignement de spécialité de mathématiques.

Durée : 2 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES – QCM (6 pts)

Pour cette première partie, aucune justification n'est demandée et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse.

Question 1

L'inverse du double de 5 est égal à :

a. $\frac{2}{5}$ **b.** $\frac{1}{10}$ **c.** $\frac{5}{2}$ **d.** 10

Question 2

On considère la relation $F = a + \frac{b}{cd}$.

Lorsque $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$, $c = 4$, $d = -\frac{1}{4}$, la valeur de F est égale à :

a. $-\frac{5}{2}$ **b.** $-\frac{3}{2}$ **c.** $\frac{5}{2}$ **d.** $\frac{3}{2}$

Question 3

Le prix d'un article est multiplié par $0{,}975$.

Cela signifie que le prix de cet article a connu :

a. une baisse de $2{,}5\%$

b. une augmentation de $97{,}5\%$

c. une baisse de 25%

d. une augmentation de $0{,}975\%$

Question 4

Le prix d'un article est noté P. Ce prix augmente de 10% puis baisse de 10%.

A l'issue de ces deux variations, le nouveau prix est noté P_1. On peut affirmer que :

a. $P_1 = P$ **b.** $P_1 > P$ **c.** $P_1 < P$ **d.** Cela dépend de P

Question 5

On lance un dé à 4 faces. La probabilité d'obtenir chacune des faces est donnée dans le tableau ci-dessous :

Face numéro 1	Face numéro 2	Face numéro 3	Face numéro 4
$0{,}5$	$\frac{1}{6}$	$0{,}2$	x

On peut affirmer que :

a. $x = \frac{2}{15}$ **b.** $x = \frac{2}{3}$ **c.** $x = 0{,}4$ **d.** $x = 0{,}1$

Question 6

On considère x, y, u des réels non nuls tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{u}$.

On peut affirmer que :

a. $u = \frac{xy}{x+y}$ **b.** $u = \frac{x+y}{xy}$

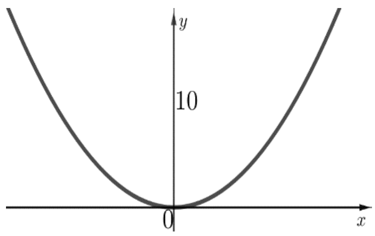
c. $u = xy$ **d.** $u = x + y$.

Question 7

On a représenté ci-contre la parabole d'équation $y = x^2$.
On note $(\mathcal{I})$ l'inéquation, sur **R**, $x^2 \geq 10$.
L'inéquation $(\mathcal{I})$ est équivalente à :

a. $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$ **b.** $x \leq -\sqrt{10}$ ou $x \geq \sqrt{10}$

c. $x \geq \sqrt{10}$ **d.** $x = \sqrt{10}$ ou $x = -\sqrt{10}$

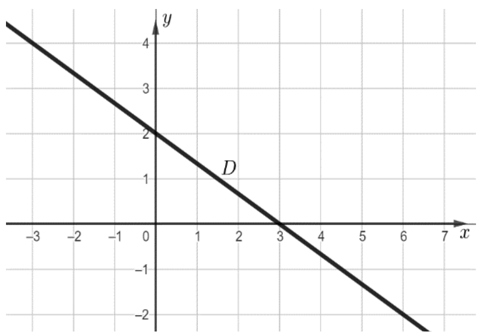


Question 8

On a représenté ci-contre une droite $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé. Une équation de la droite $\mathcal{D}$ est :

a. $y = -\frac{3}{2}x + 2$ **b.** $y = \frac{2}{3}x + 2$

c. $2x - 3y - 6 = 0$ **d.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 = 0$



Question 9

On considère trois fonctions définies sur **R** :

$f_1 : x \longmapsto x^2 - (1-x)^2$ $\quad f_2 : x \longmapsto \frac{x}{2} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad f_3 : x \longmapsto \frac{5 - \frac{2}{3}x}{0,7}$

Parmi ces trois fonctions, celles qui sont des fonctions affines sont :

a. aucune

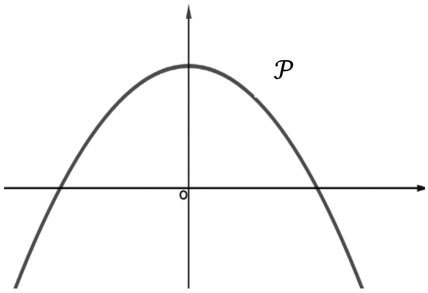
b. toutes

c. uniquement la fonction f_1

d. uniquement les fonction f_2 et f_3

Question 10

On a représenté ci-contre une parabole $\mathcal{P}$.
Une seule des quatre fonctions ci-dessous est susceptible d'être représentée par la parabole $\mathcal{P}$.
Laquelle ?



a. $x \longmapsto x^2 - 10$

b. $x \longmapsto -x^2 - 10$

c. $x \longmapsto -x^2 + 10$

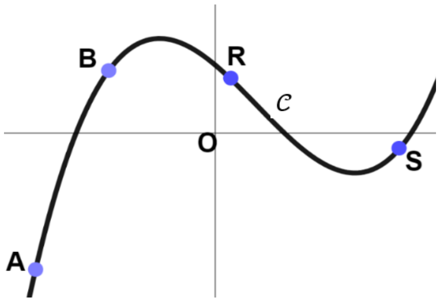
d. $x \longmapsto -x^2 + 10x$

Question 11

On a représenté ci-contre la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f.

Les points A, B, R et S appartiennent à la courbe $\mathcal{C}$.

Leurs abscisses sont notées respectivement x_A, x_B, x_R et x_S.



L'inéquation $x \times f(x) > 0$ est vérifiée par :

a. x_A et x_B

b. x_A et x_R

c. x_A et x_S

d. x_A , x_B et x_S

Question 12

Voici une série de notes avec les coefficients associés.

Note	10	8	16
Coefficient	1	2	x

On note m la moyenne de cette série. Que doit valoir x pour que $m = 15$?

a. impossible

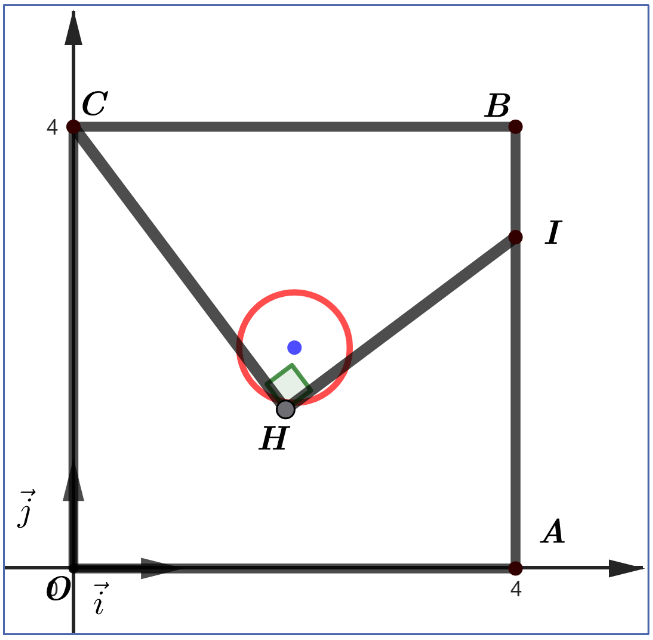
b. $x = 10^{-3}$

c. $x = 3$

d. $x = 19$

DEUXIÈME PARTIE (14 pts)

Exercice 1 **(X points)**
On considère la figure suivante, représentée dans un repère orthonormé $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.



On dispose des données suivantes :

- Le quadrilatère $OABC$ est un carré de côté 4 ;
- On a $A(4; 0), B(4; 4), C(0; 4)$, $I(4 ; 3)$;
- Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI) ;
- On note $\mathcal{E}$ le cercle de centre $D(2; 2)$ et de rayon $0{,}5$.

1.a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OC}$.

b. En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OC}$.

2. a. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OC}$ en fonction des longueurs OH et OI.

b. Calculer la longueur OI.

c. En déduire que $OH = 2{,}4$.

3. a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CH).

b. Justifier qu'une équation du cercle $\mathcal{E}$ est :

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7{,}75 = 0\,.$$

c. Le point $M(1{,}5; 2)$ appartient-il à l'intersection du cercle $\mathcal{E}$ et de la droite (CH) ? Justifier.

Aide au calcul.
$0{,}5^2 = 0{,}25$
$1{,}5^2 = 2{,}25$
$2{,}5^2 = 6{,}25$
$5 \times 2{,}4 = 12$

Exercice 2 (X points)

On se place dans un repère $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ orthogonal.

1. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = x^2 - 5x + 4$.
On note $\mathcal{P}$ la courbe représentative de la fonction g.

a. Étudier le signe de la fonction g sur **R**.

b. On considère un entier naturel n quelconque.
On note A_n le point de la courbe $\mathcal{P}$ d'abscisse n.
On note a_n le coefficient directeur de la droite (A_nA_{n+1}).

Justifier que pour tout entier naturel n, on a $a_n = 2n - 4$.

c. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

2. On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 8]$ par

$$f(x) = x - 5 + \frac{4}{x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

a. Vérifier que pour tout réel x, de l'intervalle $[0{,}5; 8]$ on a $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

b. A l'aide de la question **1.a**, déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

c. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0{,}5;\ 8]$.
Montrer que tout réel x de l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 8]$ on a :

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

d. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 8]$.

e. Réaliser un schéma de l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ sur lequel apparaîtront les résultats des questions **2.b** et **2.d**.