BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le sujet propose 4 exercices

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points) **Thème : probabilités**

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.

Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.

On considère les événements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques » ;
- T : « le test est positif » ;
- $\bar{A}$ et $\bar{T}$ sont respectivement les événements contraires de A et T.

1. Calculer $\mathrm{P}(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que $\mathrm{P}(T) = 0{,}2625$.

3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.

4. **a.** Parmi les événements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T$, $\bar{A} \cap T$, $A \cap \bar{T}$, $\bar{A} \cap \bar{T}$.

b. On définit l'événement E : « le test fournit un résultat erroné ».
Démontrer que $\mathrm{P}(E) = 0{,}0625$.

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.

On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}0625$.

b. Calculer P(X=7).

c. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.

2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $\mathrm{P}(X \geqslant 10)$ soit supérieure à 0,95 ?

EXERCICE 2 (7 points) **Thème : suites, fonctions**

Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes. On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de *k*.

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1{,}9$ et $u_0 = 0{,}1$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}9u_n(1 - u_n)$.

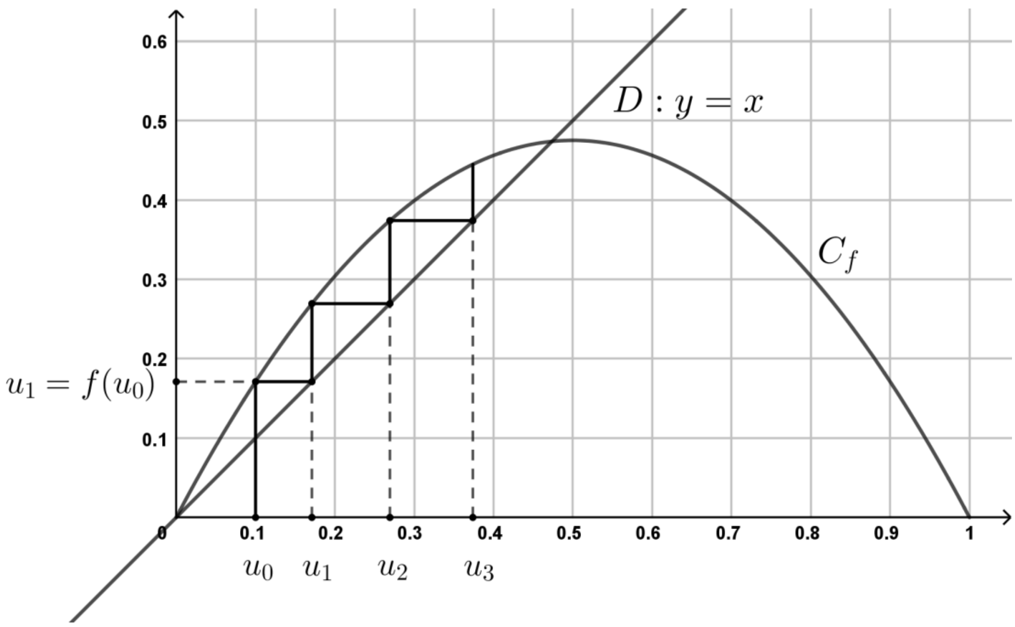
1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = 1{,}9x(1 - x)$.

a. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;1]$.

b. En déduire que si $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ alors $f(x) \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe C_f de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.

Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. **a.** En utilisant les résultats de la question **1**, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

c. Déterminer sa limite.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. On considère la fonction Python `algo(p)` où `p` désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
     u = 1/4
     n = 0
     while u > 10**(-p) :
          u = 1/2*u*(1-u)
          n = n+1
     return(n)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul `p`, la boucle `while` ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

EXERCICE 3 (7 points) **Thème : fonctions**

Partie 1

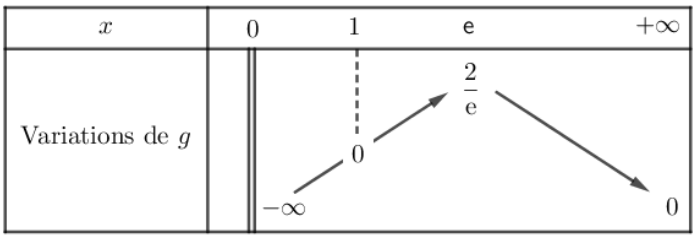
Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

1. On note g' la dérivée de g. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}$$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$:



Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau :

- **a.** la valeur $\dfrac{2}{e}$;
- **b.** les variations de la fonction g sur son ensemble de définition ;
- **c.** les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (\ln(x))^2$.

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1. Démontrer que sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.

2. À l'aide de la **partie 1**, étudier :

a. la convexité de la fonction f ;

b. les variations de la fonction f.

3. **a.** Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e.

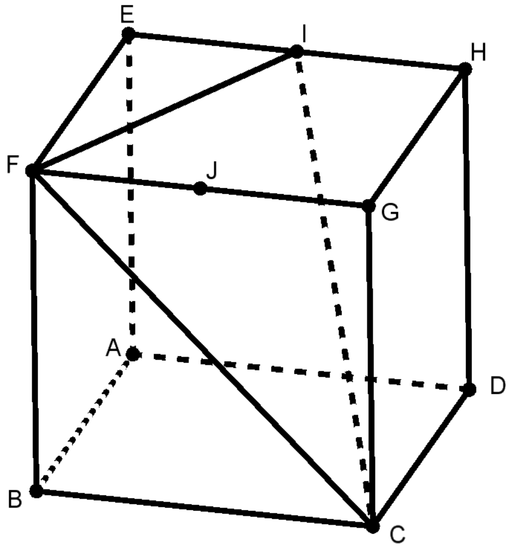
b. En déduire que, pour tout réel x dans $]0\,;\,\mathrm{e}]$:

$$(\ln(x))^2 \geqslant \frac{2}{\mathrm{e}}x - 1.$$

EXERCICE 4 (7 points) **Thème : géométrie dans le plan et dans l'espace**

On considère le cube ABCDEFGH. On note I le milieu du segment [EH] et on considère le triangle CFI.

L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0 ; \frac{1}{2} ; 1\right)$ dans ce repère.



1.

a. Donner sans justifier les coordonnées des points C, F et G.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (CFI).

c. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (CFI) est : $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

2. On note d la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. Démontrer que le point $K\left(\frac{7}{9} ; \frac{5}{9} ; \frac{5}{9}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (CFI).

c. Déduire des questions précédentes que la distance du point G au plan (CFI) est égale à $\frac{2}{3}$.

3. On considère la pyramide GCFI.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a. Démontrer que le volume de la pyramide GCFI est égal à $\frac{1}{6}$, exprimé en unité de volume.

b. En déduire l'aire du triangle CFI, en unité d'aire.