BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 **(5 points)**

Les données publiées le 1er mars 2023 par le ministère de la transition écologique sur les immatriculations de véhicules particuliers en France en 2022 contiennent les informations suivantes :

- $22{,}86$ % des véhicules étaient des véhicules neufs ;
- $8{,}08$ % des véhicules neufs étaient des hybrides rechargeables ;
- $1{,}27$ % des véhicules d'occasion (c'est-à-dire qui ne sont pas neufs) étaient des hybrides rechargeables.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au dix-millième.

Partie A

Dans cette partie, on considère un véhicule particulier immatriculé en France en 2022.
On note :

- N l'événement « le véhicule est neuf » ;
- R l'événement « le véhicule est hybride rechargeable » ;
- $\overline{N}$ et $\overline{R}$ les événements contraires des événements contraires de N et R.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable.

3. Démontrer que la valeur arrondie au dix-millième de la probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est $0{,}0283$.

4. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable.

Partie B

Dans cette partie, on choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022. Dans la suite, on admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à $0{,}65$.
On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.

2. Déterminer la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs.

3. Déterminer la probabilité $p(X \geq 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

On choisit désormais n véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022, où n désigne un entier naturel strictement positif.

On rappelle que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à $0{,}65$.

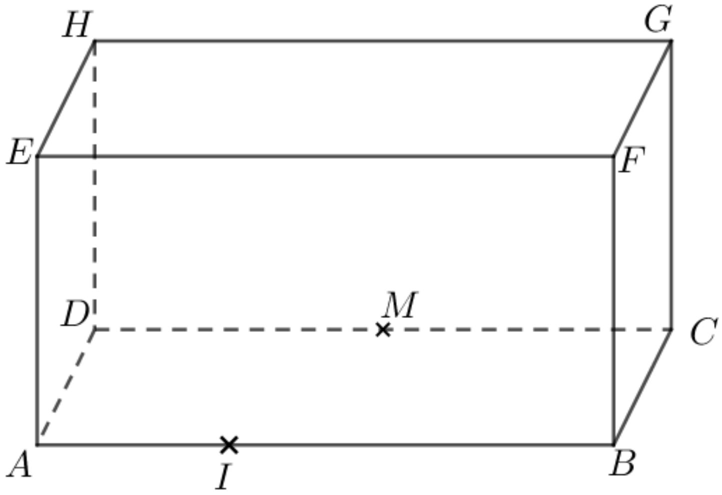
On assimile le choix de ces n véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

1. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n que tous ces véhicules soient d'occasion.

2. On note q_n la probabilité qu'au moins un de ces véhicules soit neuf. En résolvant une inéquation, déterminer la plus petite valeur de n telle que $q_n \geq 0{,}9999$.

Exercice 2 **(5 points)**

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$ et $AD = AE = 1$ représenté ci-dessous.



On considère le point I du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment $[CD]$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.

2. a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :
   $$2x + 6y + 3z - 9 = 0$$
   c) Le plan $\mathcal{P}$ dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).

4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).
   Déterminer les coordonnées du point N.

5. Le point R de coordonnées $\left(3; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF)? Justifier la réponse.

<u>Exercice 3</u> (6 points)

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $g(x) = 2x - x^2$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1 et u_2.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.

7. En déduire une expression de v_n en fonction de n.

8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.

9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang `n` à partir duquel la suite dépasse $0{,}95$.

```
def seuil():
    n=0
    u=0.5
    while u<0.95:
        n=...
        u=...
    return n
```

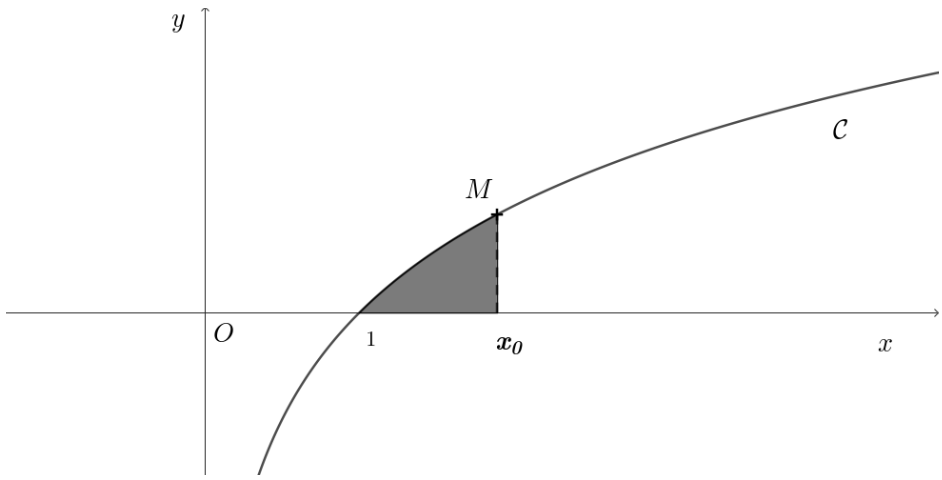
<u>Exercice 4</u> (4 points)

Soit a un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a\ln(x)$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

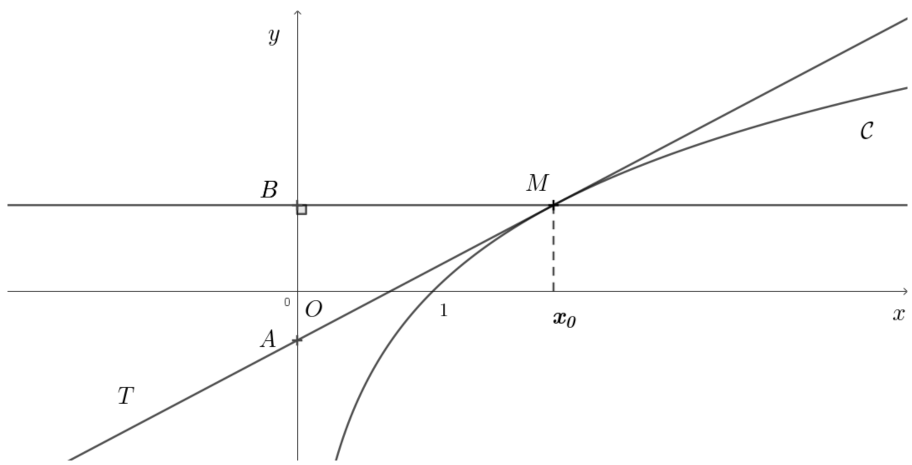
1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.

2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a(x\ln(x) - x)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. En déduire l'aire du domaine grisé en fonction de a et de x_0 .



On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point M d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera. *Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.*