BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

<u>Exercice n°1</u> (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

<u>Affirmation 1</u> : Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 2y = -6x + 1$

La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 6x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).

<u>Affirmation 2</u> : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par

$$u_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

La suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

<u>Affirmation 3</u> : On considère la suite (u_n) définie dans l'affirmation 2.

L'instruction `suite(50)` ci-dessous, écrite en langage Python, renvoie u_{50}.

```python
def suite(k):
    S=0
    for i in range(k):
        S=S+(3/4)**k
    return S
```

<u>Affirmation 4</u> : Soit a un réel et f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = a\ln(x) - 2x$$

Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Il existe une valeur de a pour laquelle la tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

<u>Exercice n°2</u> (5 points)

Au cours d'une séance, un joueur de volley-ball s'entraîne à faire des services. La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,85.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le joueur réussit un service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant est égale à 0,6 ;
- si le joueur ne réussit pas un service, alors la probabilité qu'il ne réussisse pas le suivant est égale à 0,6.

Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

<u>Partie A</u> :

On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Démontrer que la probabilité de l'événement R_2 est égale à $0{,}57$.

3. Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, calculer la probabilité qu'il ait raté le premier.

4. Soit *Z* la variable aléatoire égale au nombre de services réussis au cours des deux premiers services.
   a. Déterminer la loi de probabilité de *Z* (on pourra utiliser l'arbre pondéré de la question 1).
   b. Calculer l'espérance mathématique E(*Z*) de la variable aléatoire *Z*. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

<u>Partie B</u> :

On s'intéresse maintenant au cas général.
Pour tout entier naturel n non nul, on note x_n la probabilité de l'évènement R_n.

1.
   a. Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}})$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $x_{n+1} = 0{,}2x_n + 0{,}4$

2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = x_n - 0{,}5$

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
   b. Déterminer l'expression de x_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (x_n).
   c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

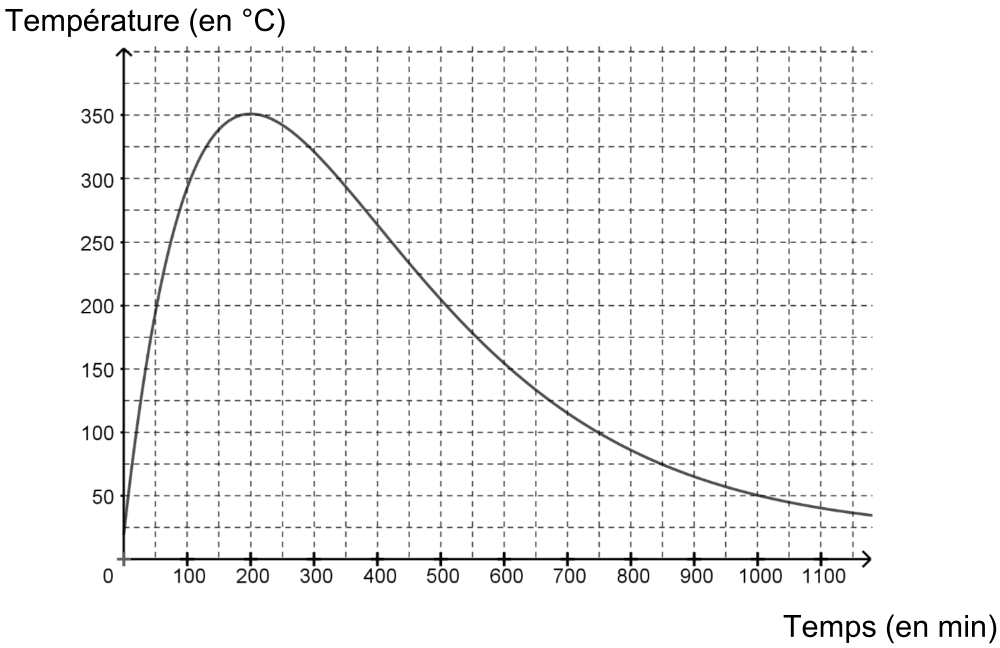
Exercice n°3 (7 points)

Un organisme certificateur est missionné pour évaluer deux appareils de chauffage, l'un d'une marque A et l'autre d'une marque B.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : appareil de la marque A

À l'aide d'une sonde, on a mesuré la température à l'intérieur du foyer d'un appareil de la marque A.
On a représenté, ci-dessous, la courbe de la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer en fonction du temps écoulé, exprimé en minutes, depuis l'allumage du foyer.



Par lecture graphique :

1. Donner le temps au bout duquel la température maximale est atteinte à l'intérieur du foyer.

2. Donner une valeur approchée, en minutes, de la durée pendant laquelle la température à l'intérieur du foyer dépasse $300°\text{C}$.

3. On note f la fonction représentée sur le graphique.

   Estimer la valeur de $\frac{1}{600}\int_0^{600} f(t)dt$. Interpréter le résultat.

<u>Partie 2</u> : étude d'une fonction

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = 10t\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 20$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que pour tout $t \in [\,0\,;\,+\infty\,[$, $g'(t) = (-0{,}1t + 10)\mathrm{e}^{-0{,}01t}$

   b. Étudier les variations de la fonction g sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ et construire son tableau de variations.

3. Démontrer que l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$. En donner des valeurs approchées à l'unité.

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^{600} g(t)dt$.

<u>Partie 3</u> : évaluation

Pour un appareil de la marque B, la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer t minutes après l'allumage est modélisée sur $[0; 600]$ par la fonction g.

L'organisme certificateur attribue une étoile par critère validé parmi les quatre suivants :

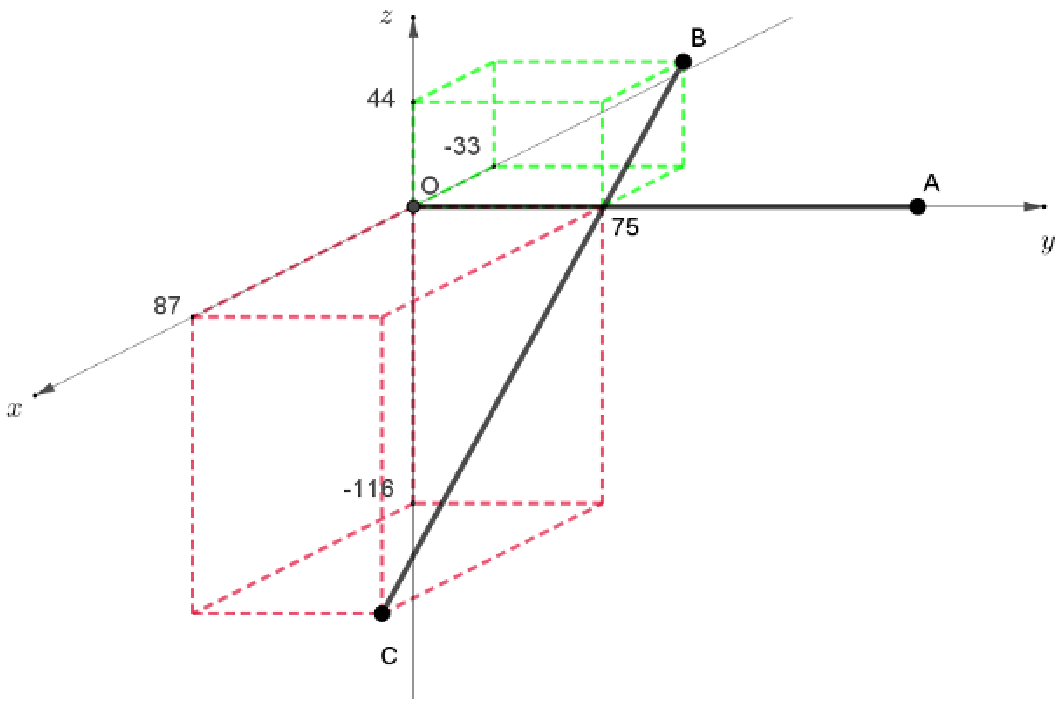
- Critère 1 : la température maximale est supérieure à 320°C.
- Critère 2 : la température maximale est atteinte en moins de 2 heures.
- Critère 3 : la température moyenne durant les 10 premières heures après l'allumage dépasse 250 °C.
- Critère 4 : la température à l'intérieur du foyer ne doit pas dépasser 300°C pendant plus de 5 heures.

Chaque appareil obtient-il exactement trois étoiles ? Justifier votre réponse.

Exercice n°4 (4 points)

On modélise un passage de spectacle de voltige aérienne en duo de la manière suivante :

- on se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, une unité représentant un mètre ;
- l'avion n°1 doit relier le point O au point $\mathrm{A}(0; 200; 0)$ selon une trajectoire rectiligne, à la vitesse constante de $200\ \mathrm{m/s}$;
- l'avion n°2 doit, quant à lui, relier le point $\mathrm{B}(-33; 75; 44)$ au point $\mathrm{C}(87; 75; -116)$ également selon une trajectoire rectiligne, et à la vitesse constante de $200\ \mathrm{m/s}$.
- au même instant, l'avion n°1 est au point O et l'avion n°2 est au point B.



1. Justifier que l'avion n°2 mettra autant de temps à parcourir le segment [BC] que l'avion n°1 à parcourir le segment [OA].

2. Montrer que les trajectoires des deux avions se coupent.

3. Les deux avions risquent-ils de se percuter lors de ce passage ?