BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

MARDI 9 SEPTEMBRE 2025

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1 : (5 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 0{,}4y = \mathrm{e}^{-0{,}4t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t.

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur **R** qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur **R** par : $u(t) = t\mathrm{e}^{-0{,}4t}$

Vérifier que u est solution de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur **R**.

On note g la fonction définie sur **R** par : $g(t) = f(t) - u(t)$

Soit (H) l'équation différentielle $y' + 0{,}4y = 0$

a. Démontrer que si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

On admettra que la réciproque est vraie.

b. Résoudre l'équation différentielle (H).

c. En déduire les solutions de (E).

d. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie B

On s'intéresse à la glycémie chez une personne venant de prendre un repas.

La glycémie en g.L^{-1}, en fonction du temps t, exprimé en heure, écoulé depuis la fin du repas, est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par :

$$f(t) = (t + 1)\mathrm{e}^{-0,4t}$$

1. **a**. Montrer que, pour tout $t \in [0\,;6]$, $f'(t) = (-0,4t + 0,6)\mathrm{e}^{-0,4t}$.

b. Étudier les variations de f sur $[0\,;6]$ puis dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

2. Une personne est en hypoglycémie lorsque sa glycémie est inférieure à $0,7$ g.L^{-1}.

a. Démontrer que sur l'intervalle $[0\,;6]$ l'équation $f(t) = 0,7$ admet une unique solution que l'on notera α.

b. Au bout de combien de temps après avoir pris son repas cette personne est-elle en hypoglycémie ?

On exprimera ce temps à la minute près.

3. On souhaite déterminer la glycémie moyenne en g.L^{-1} chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = -23,75\mathrm{e}^{-2,4} + 8,75$$

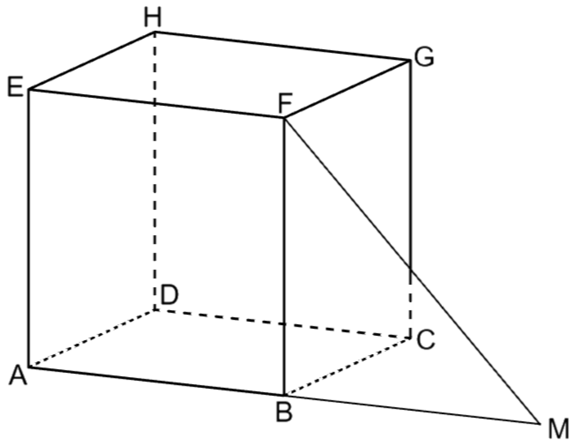
b. Calculer la glycémie moyenne en g.L^{-1} chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

c. En remarquant que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E), expliquer comment on aurait pu obtenir ce résultat autrement.

Exercice 2 : (5 points)

On considère le cube $\mathrm{ABCDEFGH}$.

On place le point M tel que $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.



Partie A

1. Montrer que les droites (FG) et (FM) sont perpendiculaires.

2. Montrer que les points $\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{G}$ et H sont coplanaires.

Partie B

On se place dans le repère orthonormé $(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{GM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ et montrer qu'ils ne sont pas colinéaires.

2. **a**. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (GM) est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbf{R}.$$

b. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (AH) est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbf{R}.$$

Montrer que le point d'intersection de (GM) et (AH), que l'on nommera N, a pour coordonnées $(0\,;2\,;2)$.

3. **a**. Montrer que le triangle AMN est un triangle rectangle en A.

b. Calculer l'aire de ce triangle.

4. Soit J le centre de la face BCGF.

a. Déterminer les coordonnées du point J.

b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}$ est un vecteur normal au plan (AMN).

c. Montrer que J appartient au plan (AMN). En déduire qu'il est le projeté orthogonal du point F sur le plan (AMN).

5. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre ou d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h,$$

$\mathcal{B}$ étant l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Montrer que le volume du tétraèdre AMNF est le double du volume de la pyramide BCGFM.

Exercice 3 : (6 points)

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x-2}$.

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2		$+\infty$
$f(x)$			$+\infty$
		$\nearrow$	
	2		

On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On appelle ℓ la limite de (u_n).
On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$.
Déterminer la valeur de ℓ.

4. On considère la fonction rang écrite ci-dessous en langage Python.
On rappelle que sqrt(x) renvoie la racine carrée du nombre x.

```python
from math import *

def rang(a):
    u = 6
    n = 0
    while u >= a:
        u = sqrt(3*u - 2)
        n = n + 1
    return n
```

a. Pourquoi peut-on affirmer que rang(2.000001) renvoie une valeur ?

b. Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction rang(a) renvoie-t-elle un résultat ?

Partie B

On admet que la suite (v_n) vérifiant $v_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $v_{n+1} = 3 - \frac{2}{v_n}$ est bien définie.

1. Calculer v_1.

2. Pour tout n entier naturel, on admet que $v_n \neq 2$ et on pose :

$$w_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$$

a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme w_0.

b. On admet que, pour tout n entier naturel,

$$w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2}$$

En déduire que, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}$$

c. Calculer la limite de (v_n).

3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $v_n < 2{,}01$ en résolvant l'inéquation.

Partie C

À l'aide des parties précédentes, déterminer le plus petit entier N tel que pour tout $n \geq N$, les termes v_n et u_n appartiennent à l'intervalle $]1{,}99\,;2{,}01[$.

Exercice 4 : (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Un musée propose des visites avec ou sans audioguide. Les billets peuvent être achetés en ligne ou directement au guichet.

1. Lorsqu'une personne achète son billet en ligne, un code de validation lui est envoyé par SMS afin qu'elle confirme son achat. Ce code est généré de façon aléatoire et est constitué de 4 chiffres deux à deux distincts, le premier chiffre étant différent de 0.

Affirmation 1 : Le nombre de codes différents pouvant être générés est 5040.

2. Une étude a permis de considérer que :

- la probabilité qu'une personne choisisse l'audioguide sachant qu'elle a acheté son billet en ligne est égale à $0,8$;
- la probabilité qu'une personne achète son billet en ligne est égale à $0,7$;
- la probabilité qu'une personne opte pour une visite sans audioguide est égale à $0,32$.

Affirmation 2 : La probabilité qu'un visiteur ne prenne pas l'audioguide sachant qu'il a acheté son billet au guichet est supérieure à deux tiers.

3. On choisit au hasard 12 visiteurs de ce musée.
On suppose que le choix de l'option « audioguide » est indépendant d'un visiteur à l'autre.

Affirmation 3 : La probabilité qu'exactement la moitié de ces visiteurs opte pour l'audioguide est égale à $924 \times 0,2176^6$.

4. Lorsqu'une personne dispose d'un audioguide, elle peut choisir parmi trois parcours :

- un premier d'une durée de cinquante minutes,
- un deuxième d'une durée d'une heure et vingt minutes,
- un troisième d'une durée d'une heure et quarante minutes.

Le temps de parcours peut être modélisé par une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	50 min	1 h 20 min	1 h 40 min
$P(X = x_i)$	0,1	0,6	0,3

Affirmation 4 : L'espérance de X est 77 minutes.