

Convexité — Tous les corrigés

LOGIMATHS

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)

1.a Affirmation 1 : la courbe de f passe par $A(\ln 2; \frac{1}{2})$. Vrai ou faux ?

L'équation $y' + 2y = 0$ s'écrit $y' = -2y$, de solutions $x \mapsto Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Comme $f(0) = 1 : C = 1$, donc $f(x) = e^{-2x}$.

$$f(\ln 2) = e^{-2 \ln 2} = e^{\ln(\frac{1}{4})} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}.$$

L'affirmation 1 est FAUSSE.

1.b Affirmation 2 : sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, la courbe de f est au-dessus de ses tangentes. Vrai ou faux ?

$$f'(x) = 1 + \sin(x), \text{ donc } f''(x) = \cos(x).$$

Sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, $\cos(x) \leq 0$: f est donc concave, et sa courbe est **en dessous** de ses tangentes (pas au-dessus).

L'affirmation 2 est FAUSSE.

1.c Affirmation 3 : $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f . Vrai ou faux ?

$$\text{Pour tout } x > 0 : -1 \leq \sin(x) \leq 1, \text{ donc } -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}, \text{ soit } 1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, les deux bornes tendent vers 1 : d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

L'affirmation 3 est VRAIE : $y = 1$ est bien asymptote horizontale en $+\infty$.

2. Affirmation 4 : $f(x) = 2x - e^{3x}$ est solution de (E_2) . Vrai ou faux ?

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = 2 - 3e^{3x}.$$

$$f'(x) - 3f(x) = (2 - 3e^{3x}) - 3(2x - e^{3x}) = 2 - 3e^{3x} - 6x + 3e^{3x} = 2 - 6x.$$

f vérifie donc bien l'équation (E_2) : **l'affirmation 4 est VRAIE.**

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 2)

Partie A — 1.a On considère $f(x) = e^x \sin(x)$ sur $[0; \pi/2]$. Démontrer que $f'(x) = e^x [\sin(x) + \cos(x)]$ sur cet intervalle.

f est un produit de fonctions dérivables : $f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) = e^x [\sin(x) + \cos(x)]$.

Partie A — 1.b Justifier que f est strictement croissante sur $[0; \pi/2]$.

Sur $[0; \pi/2]$, $\cos(x) \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$, et ils ne s'annulent jamais simultanément (sin ne s'annule qu'en 0 où $\cos(0) = 1$, cos ne s'annule qu'en $\pi/2$ où $\sin(\pi/2) = 1$) : donc $\sin(x) + \cos(x) > 0$ sur cet intervalle.

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , $f'(x) > 0$ comme produit de deux facteurs strictement positifs : f est strictement croissante sur $[0; \pi/2]$.

Partie A — 2.a Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.

$$f(0) = e^0 \sin(0) = 0 \text{ et } f'(0) = e^0 [\sin(0) + \cos(0)] = 1.$$

La tangente en 0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$, soit $y = x$.

Partie A — 2.b Démontrer que f est convexe sur $[0; \pi/2]$.

$$\text{Pour tout réel } x : f''(x) = e^x [\sin(x) + \cos(x)] + e^x [\cos(x) - \sin(x)] = 2e^x \cos(x).$$

$$\text{Sur } [0; \pi/2], \cos(x) \geq 0 \text{ et } e^x > 0, \text{ donc } f''(x) \geq 0 : f \text{ est convexe sur } [0; \pi/2].$$

Partie A — 2.c En déduire que, pour tout réel x de $[0; \pi/2]$, $e^x \sin(x) \geq x$.

La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier au-dessus de la tangente T d'équation $y = x$ au point d'abscisse 0.

$$\text{Donc, pour tout } x \in [0; \pi/2], f(x) \geq x, \text{ c'est-à-dire } e^x \sin(x) \geq x.$$

Partie A — 3. Justifier que le point d'abscisse $\pi/2$ de la courbe de f est un point d'inflexion.

$f''(x) = 2e^x \cos(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = \pi/2$ (positive avant, négative après, car cos change de signe en $\pi/2$) : le point d'abscisse $\pi/2$ est donc un point d'inflexion de la courbe de f .

Partie B — On note $I = \int_0^{\pi/2} e^x \sin(x) dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx$. En intégrant par parties de deux manières différentes, établir $I = 1 + J$ et $I = e^{\pi/2} - J$.

En posant $u(x) = e^x$, $v'(x) = \sin(x)$ (donc $u'(x) = e^x$, $v(x) = -\cos(x)$), l'intégration par parties

$$\text{donne : } I = [-\cos(x)e^x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx = 0 + 1 + J = 1 + J.$$

En posant $u(x) = \sin(x)$, $v'(x) = e^x$ (donc $u'(x) = \cos(x)$, $v(x) = e^x$), l'intégration par parties donne : $I = [\sin(x)e^x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx = e^{\pi/2} - J$.

On obtient donc bien $I = 1 + J$ et $I = e^{\pi/2} - J$.

Partie B — En déduire que $I = (1 + e^{\pi/2}) / 2$.

En additionnant les deux relations : $2I = 1 + J + e^{\pi/2} - J = 1 + e^{\pi/2}$, donc $I = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2}$.

Partie B — On note $g(x) = x$. Calculer l'aire exacte du domaine hachuré entre les courbes de f et g sur $[0 ; \pi/2]$.

D'après la partie A, $f(x) \geq g(x)$ sur $[0 ; \pi/2]$, donc l'aire cherchée est $\mathcal{A} = \int_0^{\pi/2} (f(x) - x) dx = I - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/2}$.

$$\mathcal{A} = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2} - \frac{\pi^2}{8} \text{ unités d'aire } (\approx 1,67 \text{ u.a.}).$$

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 1)

Partie A — 1. On donne la courbe de f , avec la tangente T_A en $A(1 ; 2)$ passant par $C(3 ; 0)$. Déterminer $f'(1)$.

$f'(1)$ est le coefficient directeur de $T_A : \frac{0 - 2}{3 - 1} = -1$.

Partie A — 2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle sur $]0 ; 3]$?

$f'(x) = 0$ correspond aux points où la tangente est horizontale : d'après le graphique, cela se produit **2 fois** sur $]0 ; 3]$.

Partie A — 3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Sur $[0 ; 0,5]$, la courbe semble concave d'après le graphique, donc $f''(0,2) < 0$.

Partie B — 1. On admet que $f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$ sur $]0 ; +\infty[$. Résoudre $2X^2 - 3X + 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$, et en déduire que la courbe de f ne coupe pas l'axe des abscisses.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0$: l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$ n'a pas de solution réelle.

$f(x) = 0 \iff x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2] = 0$. Comme $x > 0$, cela équivaut à $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$, soit, en posant $X = \ln x$, à $2X^2 - 3X + 2 = 0$, qui n'a pas de solution.

L'équation $f(x) = 0$ n'a donc pas de solution : **la courbe de f ne coupe pas l'axe des abscisses.**

Partie B — 2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$ (on admet que la limite en 0 est 0).

$$f(x) = x(\ln x)^2 \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right) = 2.$$

$$\text{Par produit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Partie B — 3.a On admet que $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$. Montrer que $f''(x) = (1/x)(4\ln x + 1)$.

$$f''(x) = 2 \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(4 \ln x + 1).$$

Partie B — 3.b Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$ et préciser l'abscisse exacte du point d'inflexion.

$$\text{Sur }]0; +\infty[, \frac{1}{x} > 0, \text{ donc } f''(x) \text{ est du signe de } 4 \ln x + 1.$$

$$4 \ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{4} \iff x = e^{-\frac{1}{4}}; 4 \ln x + 1 > 0 \iff x > e^{-\frac{1}{4}}.$$

$$f \text{ est donc concave sur } \left] 0; e^{-\frac{1}{4}} \right] \text{ et convexe sur } \left[e^{-\frac{1}{4}}; +\infty \right], \text{ avec un point d'inflexion}$$

$$\text{d'abscisse exacte } e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,779.$$

Partie B — 3.c Montrer que la courbe de f est au-dessus de la tangente T_B sur $]1; +\infty[$.

Comme $e^{-\frac{1}{4}} < 1$, f est convexe sur $[1; +\infty[$: sur cet intervalle, la courbe est donc au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier T_B .

Partie C — 1. Justifier que la tangente T_B (au point d'abscisse e) a pour équation réduite $y = 2x - e$.

$$f'(e) = 2(\ln e)^2 + \ln e - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 \text{ et } f(e) = e(2 \times 1 - 3 + 2) = e \times 1 = e.$$

$$\text{La tangente en } e \text{ a pour équation } y = f'(e)(x - e) + f(e) = 2(x - e) + e = 2x - e.$$

Partie C — 2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale de $x \ln x$ entre 1 et e vaut $(e^2 + 1)/4$.

$$\text{On pose } u(x) = \ln x \text{ et } v'(x) = x \text{ (donc } u'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } v(x) = \frac{x^2}{2}).$$

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\ln x \times \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Partie C — 3. On admet que l'intégrale de $x(\ln x)^2$ entre 1 et e vaut $(e^2 - 1)/4$. En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine entre la courbe de f , la tangente T_B et les droites $x=1$ et $x=e$.

Sur $[1; e]$, la courbe est au-dessus de T_B , donc $\mathcal{A} = \int_1^e [f(x) - (2x - e)] dx = \int_1^e [2x(\ln x)^2 - 3x \ln x + e] dx$.

Par linéarité : $\mathcal{A} = 2 \times \frac{e^2 - 1}{4} - 3 \times \frac{e^2 + 1}{4} + [ex]_1^e = \frac{-e^2 - 5}{4} + (e^2 - e)$.

$\mathcal{A} = \frac{3e^2 - 4e - 5}{4}$ unités d'aire (soit environ 1,57 u.a.).

Bac Terminale 2025 — Polynésie française (jour 2)

1. On considère $f(x) = x \ln(x-2)$ sur $]2; +\infty[$, dont la courbe est donnée. Conjecturer le sens de variation, les limites aux bornes et les asymptotes éventuelles.

D'après le graphique, f semble strictement croissante sur $]2; +\infty[$, avec $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ (asymptote verticale $x = 2$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2; +\infty[$.

$f(x) = 0 \iff x \ln(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou $\ln(x-2) = 0$. Comme $x > 2$, $x \neq 0$, donc $\ln(x-2) = 0 \iff x-2 = 1 \iff x = 3$.

L'équation a une unique solution : $x = 3$.

3. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 2 par valeurs supérieures. Ce résultat confirme-t-il une conjecture de la question 1 ?

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0^+$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) = -\infty$; et $\lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$.

Ce résultat confirme la conjecture de limite en 2 et l'asymptote verticale d'équation $x = 2$.

4. Démontrer que, pour tout x de $]2; +\infty[$, $f'(x) = \ln(x-2) + x/(x-2)$.

f est un produit de fonctions dérivables : $f'(x) = 1 \times \ln(x-2) + x \times \frac{1}{x-2} = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$.

5.a On pose $g(x) = f'(x)$. Démontrer que, pour tout x de $]2; +\infty[$, $g'(x) = (x-4)/(x-2)^2$.

$g'(x) = f''(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1 \times (x-2) - x \times 1}{(x-2)^2} = \frac{x-2}{(x-2)^2} - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{x-4}{(x-2)^2}$.

5.b On admet que la limite de g en 2 (à droite) et en $+\infty$ vaut $+\infty$. En déduire le tableau de variation de g , avec la valeur exacte de son extremum.

$(x-2)^2 > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $x-4$: négatif sur $]2; 4[$, positif sur $]4; +\infty[$.

g est donc décroissante sur $]2; 4[$ puis croissante sur $]4; +\infty[$, avec un minimum $g(4) = \ln(2) + \frac{4}{2} = 2 + \ln(2)$.

5.c En déduire que, pour tout x de $]2; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Le minimum de g est $g(4) = 2 + \ln(2)$; comme $\ln(2) > 0$, $g(4) > 2 > 0$: $g(x) > 0$ pour tout x de $]2; +\infty[$.

5.d En déduire le sens de variation de f sur $]2; +\infty[$.

$g = f'$ est strictement positive sur $]2; +\infty[$: f est donc strictement croissante sur cet intervalle.

6. Étudier la convexité de f sur $]2; +\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion.

$f' = g$ est décroissante sur $]2; 4[$ (donc f concave) et croissante sur $]4; +\infty[$ (donc f convexe) : f change de convexité en $x = 4$.

$f(4) = 4 \ln(2) = \ln(16)$: le point d'inflexion a pour coordonnées $(4; \ln(16))$.

7. Combien de valeurs de x donnent une tangente à la courbe de f de coefficient directeur 3 ?

On cherche $f'(x) = 3$, soit $g(x) = 3$. Or $g(4) = 2 + \ln(2) \approx 2,7$.

Sur $]2; 4[$, g est continue et strictement décroissante de $+\infty$ à $2,7$: comme 3 est dans cet intervalle, il existe une unique solution α .

Sur $]4; +\infty[$, g est continue et strictement croissante de $2,7$ à $+\infty$: il existe de même une unique solution β .

Il existe donc exactement deux valeurs de x pour lesquelles la tangente a un coefficient directeur égal à 3.

Bac Terminale 2024 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1.a Soit $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ sur $] -\infty ; 1[$. Déterminer la limite de f en 1.

$e^x \rightarrow e > 0$ et $x-1 \rightarrow 0^-$ (négatif sur l'intervalle) : par quotient, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

1.b En déduire une interprétation graphique.

La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

$e^x \rightarrow 0$ et $x - 1 \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; la droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

3.a Montrer que $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}.$$

3.b Dresser, en justifiant, le tableau de variations de f sur $] -\infty ; 1[$.

$e^x > 0$ et $(x-1)^2 > 0$: $f'(x)$ est du signe de $x-2$, strictement négatif sur $] -\infty ; 1[$. f est strictement décroissante, de 0 (limite en $-\infty$) vers $-\infty$ (limite en 1).

4.a On admet $f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}$. Étudier la convexité de f sur $] -\infty ; 1[$.

$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0$ pour tout réel x , et $e^x > 0$; sur $] -\infty ; 1[$, $(x-1)^3 < 0$.

$f''(x) < 0$ sur tout l'intervalle : f est concave sur $] -\infty ; 1[$.

4.b Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

$$f(0) = -1 \text{ et } f'(0) = \frac{-2 \times 1}{1} = -2 : T : y = -2x - 1.$$

4.c En déduire que, pour tout x de $] -\infty ; 1[$, $e^x \geq (-2x-1)(x-1)$.

f étant concave, sa courbe est sous ses tangentes : $f(x) \leq -2x - 1$, soit $\frac{e^x}{x-1} \leq -2x - 1$.

En multipliant par $x-1 < 0$ (le sens change) : $e^x \geq (-2x-1)(x-1)$.

5.a Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $] -\infty ; 1[$.

f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty ; 1[$, et -2 est compris entre $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_1 f = -\infty$: par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution α .

5.b À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

$f(0,31) \approx -1,98 > -2$ et $f(0,32) \approx -2,03 < -2$: $0,31 < \alpha < 0,32$.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 1)

1. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$, deux fois dérivable, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

En 0 : on écrit $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + 1 - 0 = 1$.

En $+\infty$: on factorise, $f(x) = x(3 - 2 \ln(x)) + 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2 \ln(x)) = -\infty$, et donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(3 - 2 \ln(x)) = -\infty$. On en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2.a Démontrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 1 - 2 \ln(x)$.

En dérivant chaque terme : $f'(x) = 3 - 2 \ln(x) - 2x \times \frac{1}{x} = 3 - 2 \ln(x) - 2 = 1 - 2 \ln(x)$.

2.b Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$, en faisant apparaître les limites et la valeur exacte de l'extremum.

On résout $f'(x) > 0 \iff 1 - 2 \ln(x) > 0 \iff \ln(x) < \frac{1}{2} \iff x < e^{\frac{1}{2}}$ (la fonction exponentielle étant strictement croissante). Donc f' est strictement positive sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}[$ et strictement négative sur $]e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}]$ puis strictement décroissante sur $]e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$, avec un maximum en $x = e^{\frac{1}{2}}$ valant $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - 2e^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - e^{\frac{1}{2}} = 2e^{\frac{1}{2}} + 1 \approx 4,3$.

Le tableau de variation part de la limite 1 en 0, croît jusqu'au maximum $2e^{\frac{1}{2}} + 1$ en $x = e^{\frac{1}{2}}$, puis décroît vers $-\infty$.

3.a Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable, donc continue, sur $]0 ; +\infty[$.

Sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}]$, f est strictement croissante et sa valeur minimale y est $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 > 0$: f y est donc strictement positive, et l'équation $f(x) = 0$ n'y a pas de solution.

Sur $]e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, passant de la valeur $2e^{\frac{1}{2}} + 1 > 0$ à $-\infty$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ y admet une unique solution, notée α .

Donc, la réponse est que $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$, avec $\alpha > e^{\frac{1}{2}}$.

3.b En déduire le signe de f sur $]0 ; +\infty[$.

D'après les variations de f et le résultat précédent : $f(x) > 0$ sur $]0 ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, et $f(x) < 0$ sur $] \alpha ; +\infty[$.

4. Soit F une primitive quelconque de f sur $]0 ; +\infty[$. Peut-on affirmer que F est strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty\right[$?

Non. Par définition d'une primitive, $F' = f$. Or f est strictement positive sur $\left[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty\right[$ (question 3.b), donc F est strictement croissante sur cet intervalle, ce qui contredit l'affirmation proposée : F n'est pas décroissante sur tout $\left[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty\right[$.

5.a Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes.

La dérivée seconde vaut $f''(x) = -2 \times \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$, strictement négative sur $]0 ; +\infty[$. La fonction f est donc **concave** sur cet intervalle, ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **en dessous de** chacune de ses tangentes.

5.b Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

On a $f(1) = 3 \times 1 + 1 - 2 \times 1 \times \ln(1) = 4 - 0 = 4$ et $f'(1) = 1 - 2 \ln(1) = 1$.

L'équation de la tangente en un point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, donc ici $y = 1 \times (x - 1) + 4$, soit $T : y = x + 3$.

5.c En déduire que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$.

Puisque $\mathcal{C}_f$ est sous chacune de ses tangentes (question 5.a), elle est en particulier sous T : pour tout $x > 0$, $f(x) \leq x + 3$.

Cette inégalité s'écrit $3x + 1 - 2x \ln(x) \leq x + 3$, soit $2x - 2 \leq 2x \ln(x)$. En divisant par $2x > 0$: $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x)$.

Donc, la réponse est que pour tout réel x strictement positif, $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$.

Bac Terminale 2023 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

1. Soit f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x e^{-x}$, de courbe $\mathcal{C}_f$. En remarquant que $f(x) = \frac{x}{e^x}$, démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ et donner son équation.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Donc, la réponse est : $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses).

2. Démontrer que, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$.

f est un produit de fonctions dérivables : $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$.

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$, avec les valeurs aux bornes et la valeur exacte de l'extremum.

Pour tout x , $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $(1 - x)$: $f'(x) > 0$ sur $[0 ; 1[$, $f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$ sur $]1 ; +\infty[$.

f est donc strictement croissante sur $[0 ; 1]$ puis strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$, avec $f(0) = 0$, $f(1) = e^{-1}$ (maximum) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (question 1).

Tableau : x varie de 0 à 1 à $+\infty$; f croît de 0 à e^{-1} puis décroît de e^{-1} à 0.

4. Déterminer, sur $[0 ; +\infty[$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{367}{1000}$.

On a $e^{-1} \approx 0,368 > 0,367$.

Sur $[0 ; 1]$, f est continue et strictement croissante, allant de 0 à $e^{-1} > 0,367$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,367$ y admet une unique solution.

Sur $[1 ; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, allant de $e^{-1} > 0,367$ à 0 : elle y admet aussi une unique solution.

Donc, la réponse est : l'équation $f(x) = \frac{367}{1000}$ admet exactement **deux solutions** sur $[0 ; +\infty[$.

5. On admet que, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $f''(x) = e^{-x}(x - 2)$. Étudier la convexité de f sur $[0 ; +\infty[$.

Pour tout x , $e^{-x} > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $(x - 2)$: négatif sur $[0 ; 2[$, nul en 2, positif sur $]2 ; +\infty[$.

Donc, la réponse est : f est concave sur $[0 ; 2]$ et convexe sur $[2 ; +\infty[$; la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

6.a Pour $a \in [0 ; +\infty[$, soit A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a et T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A . Démontrer que T_a a pour équation réduite $y = [(1 - a)e^{-a}]x + a^2e^{-a}$.

La tangente en A a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, soit $y = (1 - a)e^{-a}(x - a) + ae^{-a}$.

En développant : $y = (1 - a)e^{-a}x - a(1 - a)e^{-a} + ae^{-a} = (1 - a)e^{-a}x - ae^{-a} + a^2e^{-a} + ae^{-a}$.

Donc, la réponse est : T_a a pour équation $y = [(1 - a)e^{-a}]x + a^2e^{-a}$.

6.b T_a coupe l'axe des ordonnées en H_a , d'ordonnée notée $g(a)$. En déduire l'expression de $g(a)$.

L'ordonnée de H_a s'obtient en prenant $x = 0$ dans l'équation de T_a : $g(a) = [(1 - a)e^{-a}] \times 0 + a^2e^{-a} = a^2e^{-a}$.

6.c Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

On étudie la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 e^{-x}$: $g'(x) = 2x e^{-x} + x^2 \times (-e^{-x}) = -x(x-2)e^{-x}$.

Pour $x > 0$, $e^{-x} > 0$ et $-x < 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $-(x-2)$: positif sur $[0 ; 2[$, nul en 2, négatif sur $]2 ; +\infty[$.

g est donc croissante puis décroissante sur $[0 ; +\infty[$: elle admet un maximum unique en $x = 2$.

Or $x = 2$ est exactement l'abscisse du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ (question 5). Donc, la réponse est : $g(a)$ est maximum lorsque A est le point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 2)

1. Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant. Affirmation : la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.

Vraie. Pour tout entier naturel n , $n+1 \geq 1 > 0$, donc $\frac{1}{n+1} \leq 1$, d'où $-1 \leq -\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n+1} \leq 1$.

De plus, pour tout entier naturel n , $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc, en divisant par $n+1 > 0$: $-\frac{1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$.

En combinant les deux encadrements : $-1 \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq 1$. Donc, la réponse est que la suite u est bornée par -1 et 1 .

2. Affirmation : toute suite bornée est convergente.

Fausse. La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ est bornée par -1 et 1 , mais elle prend alternativement les valeurs -1 et 1 : elle n'admet pas de limite, donc elle ne converge pas. Ce contre-exemple suffit à invalider l'affirmation.

3. Affirmation : toute suite croissante tend vers $+\infty$.

Fausse. La suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = -\frac{1}{n}$ est croissante (car $\frac{1}{n}$ décroît) mais elle converge vers 0 et non vers $+\infty$. Ce contre-exemple suffit à invalider l'affirmation.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Affirmation : f est convexe sur l'intervalle $[-3 ; 1]$.

Fausse. Étudier la convexité de f revient à étudier le signe de f'' . On pose $u(x) = x^2 + 2x + 2$ (strictement positif sur $\mathbb{R}$ car de discriminant négatif), avec $u'(x) = 2x + 2$; $f = \ln(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$.

En dérivant à nouveau $f' = \frac{v}{w}$ avec $v(x) = 2x + 2$, $w(x) = x^2 + 2x + 2$, $v'(x) = 2$, $w'(x) = 2x + 2$:

$$f''(x) = \frac{v'w - w'v}{w^2} = \frac{2(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)^2}{w^2}.$$

Au numérateur : $2x^2 + 4x + 4 - (4x^2 + 8x + 4) = -2x^2 - 4x = -2x(x + 2)$. Comme $w^2 > 0$, $f''(x)$ est du signe de $-2x(x + 2)$, trinôme de coefficient dominant négatif, de racines -2 et 0 : il est positif entre les racines et négatif à l'extérieur.

$f''(x) > 0$ sur $] -2 ; 0[$ et $f''(x) < 0$ sur $] -\infty ; -2[\cup] 0 ; +\infty[$: f est donc convexe sur $[-2 ; 0]$ et concave ailleurs. Sur $[-3 ; 1]$, f n'est pas concave ni convexe partout (elle est concave près de -3 et de 1) : elle n'est donc pas convexe sur tout l'intervalle $[-3 ; 1]$.

5. On considère la fonction Python ‘mystere’ ci-dessous, qui prend en paramètre une liste L de nombres (‘len(L)’ renvoie le nombre d’éléments de L).

- def mystere(L) :
 - M = L[0]
 - for i in range(len(L)) :
 - if L[i] > M :
 - M = L[i]
 - return M
- # on initialise M avec le premier élément
 -
 - # on parcourt tous les indices de L
 - # si un élément dépasse M
 - # on met M à jour
 -

5. (suite) Affirmation : l'exécution de ‘mystere([2, 3, 7, 0, 6, 3, 2, 0, 5])’ renvoie 7.

Vraie. La variable M est initialisée avec le premier élément de la liste, puis à chaque étape, si un élément de la liste dépasse la valeur courante de M , M est remplacé par cet élément. L'algorithme calcule donc le maximum des éléments de la liste, qui vaut ici 7 (le plus grand des termes 2,3,7,0,6,3,2,0,5).

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 2)

Partie A — 1. Sur un graphique (non reproduit ici) sont tracées les courbes représentatives $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'une fonction f et de sa dérivée f' , toutes deux définies sur $]3 ; +\infty[$: $\mathcal{C}_1$ part de $-\infty$ au voisinage de 3 et croît ensuite jusqu'à $+\infty$; $\mathcal{C}_2$ part de valeurs élevées au voisinage de 3 et décroît en restant positive. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente, en justifiant.

Si $\mathcal{C}_1$ représentait la dérivée f' , celle-ci serait toujours négative puis positive selon la lecture du graphique ; or la fonction représentée par $\mathcal{C}_2$ n'est pas décroissante puis croissante : elle est toujours décroissante. Il y a donc une contradiction.

$\mathcal{C}_2$ reste positive sur tout l'intervalle $]3 ; +\infty[$, ce qui est cohérent avec une fonction f strictement croissante sur cet intervalle (comme le montre $\mathcal{C}_1$) : une fonction croissante a une dérivée positive.

Donc, la réponse est que $\mathcal{C}_2$ représente la fonction dérivée f' , et $\mathcal{C}_1$ représente la fonction f .

Partie A — 2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.

Par lecture graphique de la courbe $\mathcal{C}_1$, on lit approximativement $f(5,6) \approx 3$. Donc, la réponse est que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution proche de $x = 5,6$.

Partie A — 3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f .

La courbe $\mathcal{C}_1$ « tourne le dos » à l'axe des abscisses de façon décroissante sur tout l'intervalle observé : elle est située sous chacune de ses tangentes. Donc, la réponse est que la fonction f semble concave sur $]3 ; +\infty[$.

Partie B — 1. Justifier que la quantité $\ln(x^2 - x - 6)$ est bien définie pour les valeurs de x de l'intervalle $I =]3 ; +\infty[$.

Le trinôme $x^2 - x - 6$ a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2$.

Ses racines sont donc $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$.

Un trinôme du second degré est du signe de son coefficient dominant (ici positif, $a = 1$) à l'extérieur de ses racines, et du signe opposé entre ses racines : $x^2 - x - 6 > 0$ pour $x \in]-\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[$.

Donc, la réponse est que $x^2 - x - 6 > 0$ sur $I =]3 ; +\infty[$, et donc $\ln(x^2 - x - 6)$ y est bien défini.

Partie B — 2. On admet que $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ sur I . Calculer les limites de f aux deux bornes de I , puis en déduire une équation d'une asymptote à la courbe de f .

Limite en $+\infty$: pour $x > 3$, on factorise $x^2 - x - 6 = x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right) = 1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x - 6 = +\infty$, puis par composition avec la fonction logarithme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en 3 : en écrivant $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, on a $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x+2)(x-3) = 5 \times 0^+ = 0^+$, donc par composition avec la fonction logarithme, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$.

Donc, la réponse est que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .

Partie B — 3.a Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$.

La fonction $x \mapsto x^2 - x - 6$ est dérivable et strictement positive sur I (question B.1), donc $f = \ln(x^2 - x - 6)$ est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables, et $f'(x) = \frac{(x^2 - x - 6)'}{x^2 - x - 6} = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$.

Donc, la réponse est $f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$.

Partie B — 3.b Étudier le sens de variation de f sur I , puis dresser son tableau de variations en y faisant figurer les limites aux bornes de I .

Sur I , le dénominateur $x^2 - x - 6$ est strictement positif (question B.1), donc $f'(x)$ est du signe du numérateur $2x - 1$.

Pour tout $x > 3$, on a $2x - 1 > 2 \times 3 - 1 = 5 > 0$, donc $f'(x) > 0$ sur tout l'intervalle I .

Donc, la réponse est que f est strictement croissante sur I , de $-\infty$ (limite en 3) à $+\infty$ (limite en $+\infty$).

Partie B — 4.a Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5 ; 6[$.

La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur I , donc en particulier sur $]5 ; 6[$.

$$f(5) = \ln(5^2 - 5 - 6) = \ln(14) \approx 2,64 < 3 \text{ et } f(6) = \ln(6^2 - 6 - 6) = \ln(24) \approx 3,18 > 3.$$

Comme 3 est une valeur intermédiaire entre $f(5)$ et $f(6)$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur $]5 ; 6[$.

Donc, la réponse est que l'équation $f(x) = 3$ admet bien une unique solution $\alpha \in]5 ; 6[$.

Partie B — 4.b Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.

La calculatrice donne $f(5,63) \approx 2,999 < 3$ et $f(5,64) \approx 3,004 > 3$.

Donc, la réponse est $5,63 < \alpha < 5,64$.

Partie B — 5.a Justifier que $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.

La fonction $f' = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$ est un quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas : elle est donc dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, $f''(x) = \frac{2 \times (x^2 - x - 6) - (2x - 1) \times (2x - 1)}{(x^2 - x - 6)^2}$.

On développe le numérateur : $2(x^2 - x - 6) - (2x - 1)^2 = 2x^2 - 2x - 12 - (4x^2 - 4x + 1) = 2x^2 - 2x - 12 - 4x^2 + 4x - 1 = -2x^2 + 2x - 13$.

Donc, la réponse est $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.

Partie B — 5.b Étudier la convexité de f sur I .

Le dénominateur $(x^2 - x - 6)^2$ est strictement positif sur I , donc $f''(x)$ est du signe du numérateur $-2x^2 + 2x - 13$.

Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times (-13) = 4 - 104 = -100 < 0$: il n'a donc pas de racine réelle et garde un signe constant, celui de son coefficient dominant $a = -2 < 0$: il est donc strictement négatif pour tout réel x .

Donc, la réponse est que $f''(x) < 0$ pour tout $x \in I$: la fonction f est concave sur I .

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte ; aucune justification n'est demandée sur la copie, mais nous la donnons ici. 1. La courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :
a. $x = -2$; b. $y = -1$; c. $y = -2$; d. $y = 0$.

Pour $x \neq 0$, en factorisant par x^2 au numérateur et au dénominateur : $f(x) = \frac{x^2 \left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{3}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow \frac{-2}{1} = -2$. La droite d'équation $y = -2$ est donc asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$. **Réponse c.**

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{x^2}$. La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par : a. $F(x) = \frac{x^2}{2} e^{x^2}$; b. $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$; c. $F(x) = (1 + 2x^2) e^{x^2}$; d. $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}$.

On remarque que $f(x) = x e^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2}$, qui est de la forme $\frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$. Les primitives de $u' e^u$ sont les fonctions $e^u + k$ ($k \in \mathbb{R}$), donc les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2} e^{x^2} + k$. La condition $F(0) = 1$ donne $\frac{1}{2} \times e^0 + k = 1 \iff \frac{1}{2} + k = 1 \iff k = \frac{1}{2}$.
Donc $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}$. **Réponse d.**

3. On donne la représentation graphique de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$: la courbe de f' part de valeurs négatives en 0, croise l'axe des abscisses en $x = 2$, atteint un maximum aux alentours de $x = 3$, puis redescend en restant positive. On peut affirmer que la fonction f est : a. concave sur $]0 ; +\infty[$; b. convexe sur $]0 ; +\infty[$; c. convexe sur $[0 ; 2]$; d. convexe sur $[2 ; +\infty[$.

f est convexe sur un intervalle exactement lorsque sa dérivée f' y est croissante. D'après la représentation graphique, la courbe de f' est croissante de $x = 0$ jusqu'à son maximum (situé vers $x = 3$), donc en particulier sur tout l'intervalle $[0 ; 2]$, inclus dans $[0 ; 3]$. Donc f est convexe sur $[0 ; 2]$.

Réponse c.

4. Parmi les primitives de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$: a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$; b. toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$; c. certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$; d. toutes sont croissantes sur $] -\infty ; 0]$ et décroissantes sur $[0 ; +\infty[$.

Pour tout réel x , $e^{-x^2} > 0$, donc $f(x) = 3e^{-x^2} + 2 > 2 > 0$: la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Or, si F est une primitive de f , alors $F' = f$. Comme f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ tout entier, toute primitive F de f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. **Réponse a.**

5. La limite en $+\infty$ de f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2 \ln x}{3x^2 + 1}$ est égale à : a. $\frac{2}{3}$; b. $+\infty$; c. $-\infty$; d. 0.

On écrit $f(x) = \frac{2 \ln x}{3x^2 + 1} = \frac{2}{3} \times \frac{\frac{\ln x}{x^2}}{1 + \frac{1}{3x^2}}$ (en factorisant x^2 au dénominateur). Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right) = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{3} \times \frac{0}{1} = 0$. **Réponse d.**

6. L'équation $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$: a. trois solutions ; b. deux solutions ; c. une seule solution ; d. aucune solution.

On pose $X = e^x$ (avec $X > 0$ nécessairement). Comme $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$, l'équation devient $X^2 + X - 12 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 1 + 48 = 49 = 7^2$, donc les solutions sont $X = \frac{-1 - 7}{2} = -4$ et $X = \frac{-1 + 7}{2} = 3$. Comme $X = e^x > 0$, seule la solution $X = 3$ est acceptable, ce qui donne $e^x = 3 \iff x = \ln(3)$. L'équation admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}$. **Réponse c.**

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 1)

1.a. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 6x + 4 \ln(x)$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

Quand x tend vers 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -6x = 0$, tandis que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} 4 \ln(x) = -\infty$.

Par somme de limites, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

1.b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Pour $x > 0$, on factorise : $x^2 - 6x = x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{6}{x}\right) = 1$, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right) = +\infty$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \ln(x) = +\infty$, donc, par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2.a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et $f'(x) = 2x - 6 + \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$.

2.b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f .

Comme $x > 0$ sur l'intervalle d'étude, le signe de $f'(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ est celui du numérateur $2x^2 - 6x + 4$, c'est-à-dire celui de $x^2 - 3x + 2$ (même signe, car on divise par $2 > 0$).

Ce trinôme a pour racines évidentes 1 et 2 (leur somme vaut 3 et leur produit 2, ce qui correspond bien aux coefficients), donc $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Un trinôme du second degré de coefficient dominant positif est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur : $f'(x) < 0$ sur $]1 ; 2[$ et $f'(x) > 0$ sur $]0 ; 1[\cup]2 ; +\infty[$, avec $f'(1) = f'(2) = 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; 1]$, strictement décroissante sur $[1 ; 2]$, puis strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.

On calcule les valeurs aux bornes : $f(1) = 1 - 6 + 4 \ln(1) = 1 - 6 + 0 = -5$, et $f(2) = 4 - 12 + 4 \ln(2) = 4 \ln(2) - 8 \approx -5,23$.

Le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$ part donc de $-\infty$ (limite en 0), croît jusqu'à -5 en $x = 1$, décroît jusqu'à $4 \ln(2) - 8$ en $x = 2$, puis croît vers $+\infty$ (limite en $+\infty$).

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4 ; 5]$.

On calcule les images des bornes : $f(4) = 16 - 24 + 4 \ln(4) = -8 + 8 \ln(2) \approx -2,45$ et $f(5) = 25 - 30 + 4 \ln(5) = 4 \ln(5) - 5 \approx 1,44$.

Ainsi $f(4) < 0 < f(5)$. Or, d'après la question précédente, l'intervalle $[4 ; 5]$ est inclus dans $[2 ; +\infty[$, sur lequel f est continue (car dérivable) et strictement croissante.

Donc, d'après le théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[4 ; 5]$.

4.a. On admet que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}$. Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$ et préciser les coordonnées exactes des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Comme $x > 0$, le dénominateur x^2 est strictement positif, donc le signe de $f''(x)$ est celui du numérateur $2x^2 - 4$.

On résout $2x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$; seule la solution $x = \sqrt{2}$ appartient à $]0 ; +\infty[$.

Le trinôme $2x^2 - 4$ est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur, donc, restreint à $]0 ; +\infty[$: $f''(x) < 0$ sur $]0 ; \sqrt{2}[$ et $f''(x) > 0$ sur $]\sqrt{2} ; +\infty[$.

Donc f est concave sur $]0 ; \sqrt{2}[$ et convexe sur $]\sqrt{2} ; +\infty[$.

Comme f'' s'annule en $x = \sqrt{2}$ en changeant de signe, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion, d'abscisse $\sqrt{2}$.

Son ordonnée vaut $f(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \ln(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \times \frac{1}{2} \ln(2) = 2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln(2)$.

Donc, le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées exactes $(\sqrt{2} ; 2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln(2))$.

4.b. On note A le point de coordonnées $(\sqrt{2} ; f(\sqrt{2}))$. Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$ et M le point de coordonnées $(t ; f(t))$. En utilisant la question 4.a., indiquer, selon la valeur de t , les positions relatives du segment $[AM]$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Le segment $[AM]$ est une corde de la courbe $\mathcal{C}_f$ joignant le point d'inflexion A au point M.

Si $t \in]0 ; \sqrt{2}[$, les points A et M sont tous deux situés sur la partie de $\mathcal{C}_f$ où f est concave : une corde d'une courbe concave est toujours située en dessous de la courbe, donc le segment $[AM]$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$.

Si $t \in]\sqrt{2} ; +\infty[$, les points A et M sont tous deux situés sur la partie de $\mathcal{C}_f$ où f est convexe : une corde d'une courbe convexe est toujours située au-dessus de la courbe, donc le segment $[AM]$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 1)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$. **1.a** Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 , sous forme de fractions irréductibles.

$$u_1 = \frac{u_0}{1 + u_0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$u_2 = \frac{u_1}{1 + u_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}.$$

1.b Recopier et compléter les lignes 3 et 6 du script Python ci-dessous pour que ‘liste(k)’ prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des valeurs de u_0 à u_k .

- def liste(k) :
- L = []
- u = 1
- for i in range(0, k+1) :
- L.append(u)
- u = u / (1 + u)
- return L

2. On admet que, pour tout entier naturel n , u_n est strictement positif. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

$$\text{On étudie le signe de } u_{n+1} - u_n \text{ pour tout entier naturel } n : u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{u_n - u_n - u_n^2}{1+u_n} = \frac{-u_n^2}{1+u_n}.$$

Comme u_n est strictement positif pour tout n , on a $u_n^2 > 0$ et $1+u_n > 0$, donc $\frac{-u_n^2}{1+u_n} < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel n .

Donc, la réponse est que la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

La suite (u_n) est strictement décroissante (question précédente) et minorée par 0 (car u_n est strictement positif pour tout n , donc en particulier $u_n \geq 0$). Donc, la réponse est que, d'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) **converge** vers une limite réelle ℓ , avec $\ell \geq 0$.

4. Déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n) .

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+x}$. On a alors $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

La fonction f est continue sur $[0 ; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. La limite ℓ de la suite (u_n) vérifie donc l'égalité $f(\ell) = \ell$.

$$\text{On résout cette équation : } \frac{\ell}{1+\ell} = \ell \iff \ell = \ell(1+\ell) \iff \ell = \ell + \ell^2 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0.$$

Donc, la réponse est que la suite (u_n) converge vers **0**.

5.a Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .

D'après les premiers termes calculés à la question 1.a ($u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{3}$, $u_3 = \frac{1}{4}$), on peut conjecturer que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{n+1}$.

5.b Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

Notons P_n la proposition : $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Initialisation : pour $n = 0$, $\frac{1}{0+1} = 1 = u_0$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que P_n soit vraie pour un entier naturel n fixé, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{n+1}$. Montrons que P_{n+1} est alors vraie.

On a $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)+1}$: la relation est donc vraie au rang $n+1$, ce qui montre que P_{n+1} est vraie.

Comme P_0 est vraie, et que pour tout entier naturel n , P_n vraie entraîne P_{n+1} vraie, on peut conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Bac Terminale 2021 — Amérique du Nord

On considère un cube $ABCDEFGH$. **I** est le milieu de $[EF]$, **J** le milieu de $[BC]$ et **K** le milieu de $[AE]$. On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, dans lequel $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $F(1; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$, $H(0; 1; 1)$, $I(0,5; 0; 1)$, $J(1; 0,5; 0)$ et $K(0; 0; 0,5)$. 1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ?

$$\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont proportionnelles selon aucun facteur commun), donc, la réponse est que **les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.**

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

$$\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que $2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AE}$: ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ et les droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques $d_1 : x = 3 + t, y = 8 - 2t, z = -2 + 3t$ et $d_2 : x = 4 + t, y = 1 + t, z = 8 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$). Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

$$d_1 \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } d_2 \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc, la réponse est que **les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles**.

4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

$$\text{Le plan } \mathcal{P} \text{ admet pour vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ et } d_2 \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 1 \times 1 + 3 \times 1 + (-2) \times 2 = 1 + 3 - 4 = 0.$$

Le vecteur directeur de d_2 est donc orthogonal au vecteur normal de $\mathcal{P}$: la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

5. Montrer que le point $L(4; 0; 3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5; 3; 1)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

$$\overrightarrow{ML} \begin{pmatrix} 4 - 5 \\ 0 - 3 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ qui est l'opposé du vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{P} : \overrightarrow{ML} \text{ est donc lui aussi normal au plan } \mathcal{P}, \text{ ce qui montre que la droite (ML) est perpendiculaire à } \mathcal{P}.$$

D'autre part, les coordonnées de L vérifient l'équation de $\mathcal{P}$: $4 + 3 \times 0 - 2 \times 3 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, donc L appartient à $\mathcal{P}$.

Le point L appartient au plan $\mathcal{P}$ et la droite (ML) lui est perpendiculaire : donc, la réponse est que **L est bien le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$** .

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 1)

1. Une influenceuse compte $u_0 = 1\,000$ abonnés en 2020. Chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés puis en gagne 250 nouveaux. On note u_n le nombre d'abonnés en l'année $(2020 + n)$. Calculer u_1 .

Perdre 10 % revient à multiplier par 0,9. Donc $u_1 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = \mathbf{1\,150}$ abonnés.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

Multiplier par 0,9 traduit la perte de 10 % des abonnés d'une année sur l'autre.

On ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

3. Une fonction Python 'suite(n)' initialise 'u = 1000', puis répète 'n' fois 'u = 0.9*u + 250', avant de renvoyer 'u'. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la valeur renvoyée par l'appel 'suite(10)'.

La fonction calcule u_{10} , c'est-à-dire le nombre d'abonnés estimé en l'année 2030 ; la calculatrice donne $u_{10} \approx 1\,977$ abonnés.

4.a Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

Initialisation : $u_0 = 1\,000 \leq 2\,500$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq 2\,500$. Comme $0,9 > 0$, la multiplication conserve l'ordre : $0,9u_n \leq 0,9 \times 2\,500 = 2\,250$, puis en ajoutant 250 aux deux membres, $0,9u_n + 250 \leq 2\,500$, soit $u_{n+1} \leq 2\,500$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

4.b Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.

Or, d'après la question précédente, $u_n \leq 2\,500$, donc $0,1u_n \leq 250$, soit $-0,1u_n + 250 \geq 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est **croissante**.

4.c Dédurre des deux questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 500 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

5.a On pose $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n . Montrer que (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1\,500$.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500 = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9(u_n - 2\,500) = 0,9v_n$.

La relation $v_{n+1} = 0,9v_n$, vraie pour tout entier naturel n , montre que (v_n) est géométrique de raison 0,9.

Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

5.b Exprimer v_n en fonction de n , puis montrer que $u_n = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

Comme (v_n) est géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $v_0 = -1\,500$, pour tout entier naturel n : $v_n = -1\,500 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 2\,500$, donc $u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

5.c Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Comme $0 < 0,9 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc par produit puis somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\,500$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que le nombre d'abonnés de l'influenceuse **se stabilise autour de 2 500** au fil des années.

6. Écrire un programme qui détermine en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200, puis donner cette année.

- $n = 0$
- $u = 1000$
- tant que $u \leq 2200$:
- $u = 0,9 * u + 250$
- $n = n + 1$
- renvoyer n
- En simulant l'évolution terme à terme, on obtient $u_{15} \approx 2\,191,2 \leq 2\,200$ et $u_{16} \approx 2\,222,0 > 2\,200$: le programme renvoie $n = 16$.
- Donc, la réponse est que le nombre d'abonnés dépasse 2 200 la seizième année suivant 2020, c'est-à-dire en **2036**.

Bac Terminale 2021 — Polynésie française

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, et le point M défini par $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$. 1. Donner, par lecture graphique, les coordonnées des points B , D , E , G et H .

Dans ce repère : $B(1 ; 0 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$, $E(0 ; 0 ; 1)$, $G(1 ; 1 ; 1)$ et $H(0 ; 1 ; 1)$.

2.a Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

Les segments $[EG]$, $[GD]$ et $[ED]$ sont chacun la diagonale d'une face carrée de côté 1 du cube, donc $EG = GD = ED = \sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1) : **le triangle EGD est équilatéral**, de côté $\sqrt{2}$.

2.b On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Avec $c = \sqrt{2}$, l'aire du triangle EGD vaut $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

$$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de H moins celles de B), donc } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Comme } \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}, \text{ on obtient } x_M = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, y_M = \frac{1}{3} \text{ et } z_M = \frac{1}{3}.$$

Donc, la réponse est que M a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

4.a Justifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EGD).

$$\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de G moins celles de E), donc } \vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = -1 + 1 + 0 = 0.$$

$$\overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de D moins celles de E), donc } \vec{n} \cdot \overrightarrow{ED} = 0 + 1 - 1 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD) : **c'est donc un vecteur normal à ce plan.**

4.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est $-x + y + z - 1 = 0$.

Un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $-x + y + z + d = 0$, avec d réel à déterminer.

Le point E(0; 0; 1) appartient au plan (EGD), donc ses coordonnées vérifient cette équation : $-0 + 0 + 1 + d = 0 \iff d = -1$.

Donc, la réponse est que le plan (EGD) a pour équation $-x + y + z - 1 = 0$.

4.c Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) passant par M. Montrer qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan (EGD), elle est donc dirigée par le vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de ce plan ; elle passe de plus par $M(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$.

Un point $P(x ; y ; z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MP} = t\vec{n}$ pour un certain réel t , c'est-à-dire $x - \frac{2}{3} = -t$, $y - \frac{1}{3} = t$ et $z - \frac{1}{3} = t$.

Donc, la réponse est que $\mathcal{D}$ admet pour représentation paramétrique $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

5.a Soit K le pied de la hauteur issue de M dans la pyramide GEDM. Démontrer que les coordonnées de K sont $(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3})$.

La droite $\mathcal{D}$ passe par M et est perpendiculaire au plan (EGD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue de M, et son pied K est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan (EGD).

Les coordonnées de K vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ et l'équation du plan (EGD) : en substituant $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$ dans $-x + y + z - 1 = 0$, on obtient $-(\frac{2}{3} - t) + \frac{1}{3} + t + \frac{1}{3} + t - 1 = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \frac{1}{3}$.

En remplaçant t par $\frac{1}{3}$: $x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Donc, la réponse est que K a pour coordonnées $(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3})$.

5.b En déduire le volume de la pyramide GEDM. On rappelle que le volume d'une pyramide est $V = \frac{b \times h}{3}$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée.

$\overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (coordonnées de M moins celles de K), donc $KM^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$, d'où $KM = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

K est le pied de la hauteur issue de M pour la base EGD, donc $h = KM = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $b = \mathcal{A}(\text{EGD}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (question 2.b).

Le volume de la pyramide GEDM vaut donc $V = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{\frac{3}{6}}{3} = \frac{1}{6}$.

Donc, la réponse est que la pyramide GEDM a un volume égal à $\frac{1}{6}$.