

Dérivation — Tous les corrigés

LOGIMATHS

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 1)

A.1 Justifier que $a = 1$.

Le point $A(0; 1)$ appartient à la courbe, donc $f(0) = 1$. Or $f(0) = a + \frac{b \ln(1)}{1} = a + 0 = a$. Donc $a = 1$.

A.2.a En utilisant le graphique, donner la valeur de $f'(0)$. Justifier.

La tangente T_A passe par $A(0; 1)$ et semble également passer par le point de coordonnées $(0,5; 3)$ (lecture graphique).

Son coefficient directeur est donc $\frac{3 - 1}{0,5 - 0} = \frac{2}{0,5} = 4$.

$f'(0) = 4$ (coefficient directeur de la tangente en A).

A.2.b En utilisant le graphique, donner le signe de $f''(1)$. Justifier.

Le graphique montre que la courbe atteint son maximum peu avant $x = 1$, puis décroît en restant concave (tournée vers le bas) au voisinage de $x = 1$.

Le signe de $f''(1)$ correspond donc au sens de variation de f' (la pente) à cet endroit, qui diminue juste après le maximum.

$f''(1)$ est négatif.

A.3.a Montrer que, pour tout réel x appartenant à $] -1; +\infty[$, on a $f'(x) = b(1 - \ln(x+1))/(x+1)^2$.

On dérive $\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ par la formule du quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = \ln(x+1)$ et $v = x+1$.

$u' = \frac{1}{x+1}$ et $v' = 1$, donc $u'v - uv' = \frac{1}{x+1} \times (x+1) - \ln(x+1) \times 1 = 1 - \ln(x+1)$.

Donc $f'(x) = b \times \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

A.3.b En déduire la valeur de b .

D'après la question 2.a, $f'(0) = 4$. Or $f'(0) = b \times \frac{1 - \ln(1)}{1^2} = b \times 1 = b$. Donc $b = 4$.

B.1 Justifier que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f .

Quand $x \rightarrow +\infty$, on sait que $\frac{\ln(x+1)}{x+1} \rightarrow 0$ (limite usuelle du type $\frac{\ln(t)}{t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$).

Donc $f(x) = 1 + \frac{4\ln(x+1)}{x+1} \rightarrow 1 + 0 = 1$ quand $x \rightarrow +\infty$.

La droite d'équation $y = 1$ est donc asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

B.2 Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x+1) > 0$ sur $] -1; +\infty[$.

$1 - \ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) < 1 \Leftrightarrow x+1 < e$ (la fonction $\ln$ étant strictement croissante), soit $x < e - 1$.

L'ensemble des solutions, en tenant compte du domaine $x > -1$, est $] -1; e - 1[$.

B.3 Dresser le tableau de variation complet de f , en indiquant la valeur exacte de son extremum.

Le signe de $f'(x) = \frac{4(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}$ est celui de $1 - \ln(x+1)$ (le dénominateur est toujours positif).

D'après la question précédente, $f'(x) > 0$ sur $] -1; e - 1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]e - 1; +\infty[$: f est donc croissante puis décroissante, avec un maximum en $x = e - 1$.

$f(e - 1) = 1 + \frac{4\ln(e)}{e} = 1 + \frac{4}{e}$ (valeur exacte du maximum).

Aux bornes : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ (admis) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (question B.1).

Tableau : f décroît de $-\infty$ à -1 (exclu), croît de $-\infty$ à $1 + \frac{4}{e}$ sur $] -1; e - 1]$, puis décroît de $1 + \frac{4}{e}$ vers 1 (sans l'atteindre) sur $[e - 1; +\infty[$.

B.4 Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution dans $[2; +\infty[$. En donner une valeur approchée à 10^{-1} .

Sur $[2; +\infty[$ (inclus dans $]e - 1; +\infty[$ puisque $e - 1 \approx 1,72 < 2$), f est continue et strictement décroissante.

$f(2) = 1 + \frac{4\ln(3)}{3} \approx 2,46$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Comme 1,5 est compris entre ces deux valeurs, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), **l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution dans $[2; +\infty[$.**

À l'aide de la calculatrice, on trouve une valeur approchée de cette solution : $x_0 \approx \mathbf{25,1}$.

B.5.a Montrer que l'intégrale de $\ln(x+1)/(x+1)$ entre 0 et 2 est égale à $(\frac{1}{2})(\ln 3)^2$.

On pose $u = \ln(x+1)$, donc $du = \frac{1}{x+1}dx$; quand $x = 0$, $u = \ln(1) = 0$ et quand $x = 2$, $u = \ln(3)$.

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \int_0^{\ln(3)} u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{\ln(3)} = \frac{(\ln 3)^2}{2} - 0 = \frac{1}{2}(\ln 3)^2.$$

B.5.b En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

Sur $[0; 2]$, la fonction f est strictement positive (elle vaut 1 en $x = 0$ et reste au-dessus de 2,4 ensuite) : l'aire cherchée est donc $\int_0^2 f(x) dx$.

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 1 dx + 4 \int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = [x]_0^2 + 4 \times \frac{1}{2}(\ln 3)^2 = 2 + 2(\ln 3)^2.$$

L'aire cherchée est $2 + 2(\ln 3)^2$ **unités d'aire**, soit environ 4,41 u.a.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)

A.1 Calculer V_1 et V_2 ($V_0 = 0$, $V_{n+1} = 0,995 V_n + 6$).

$$V_1 = 0,995 \times 0 + 6 = \mathbf{6 \text{ litres.}}$$

$$V_2 = 0,995 \times 6 + 6 = 5,97 + 6 = \mathbf{11,97 \text{ litres.}}$$

A.2 Recopier et compléter le programme Python pour qu'il renvoie le volume après n heures.

- `def volume(n) :`
- Ligne 2 : `v = 0`
- Ligne 3 : `for k in range(n) :`
- Ligne 4 : `v = 0.995*v + 6`
- Ligne 5 : `return v`

A.3 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.

Initialisation : $V_0 = 0$ et $V_1 = 6$ (question 1), donc $V_0 \leq V_1 \leq 1200$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ pour un entier n donné.

Comme $0,995 > 0$, on peut multiplier chaque membre : $0,995V_n \leq 0,995V_{n+1} \leq 0,995 \times 1200$, soit $0,995V_n \leq 0,995V_{n+1} \leq 1194$.

En ajoutant 6 partout : $0,995V_n + 6 \leq 0,995V_{n+1} + 6 \leq 1\,200$, c'est-à-dire $V_{n+1} \leq V_{n+2} \leq 1\,200$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $V_n \leq V_{n+1} \leq 1\,200$.

A.4 Justifier que la suite (V_n) converge, et calculer sa limite.

D'après la question précédente, la suite (V_n) est croissante et majorée par 1 200.

D'après le théorème de convergence monotone, **la suite (V_n) converge** vers une limite ℓ .

La fonction associée à la récurrence, $x \mapsto 0,995x + 6$, est continue (fonction affine), donc ℓ est solution de l'équation $x = 0,995x + 6$.

$$0,005x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{0,005} = 1\,200.$$

La suite (V_n) converge donc vers **1 200** : le volume de substance polluante se stabilise autour de 1 200 litres.

B.1.a Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,005y + 6$ sur $[0; +\infty[$.

(E) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,005$ et $b = 6$. Sa solution particulière constante est $y_p = -\frac{b}{a} = \frac{6}{0,005} = 1\,200$.

Les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-0,005t} + 1\,200$, où **C est une constante réelle**.

B.1.b Montrer que, pour tout réel t de $[0; +\infty[$, $v(t) = 1200(1 - e^{-0,005t})$.

Comme $v(0) = 0$: $Ce^0 + 1\,200 = 0$, donc $C = -1\,200$.

$$v(t) = -1\,200e^{-0,005t} + 1\,200 = 1\,200(1 - e^{-0,005t}).$$

B.1.c Calculer la limite de v en $+\infty$.

Quand $t \rightarrow +\infty$, $e^{-0,005t} \rightarrow 0$, donc $v(t) \rightarrow 1\,200 \times (1 - 0) = \mathbf{1\,200}$.

B.1.d Déterminer le sens de variation de la fonction v sur $[0; +\infty[$.

$$v'(t) = 1\,200 \times 0,005 \times e^{-0,005t} = 6e^{-0,005t}, \text{ toujours strictement positif.}$$

La fonction v est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

B.2 Un taux de substance polluante supérieur à 5 % du volume du bassin (30 000 L) nécessite un nettoyage complet. Le propriétaire devra-t-il procéder à ce nettoyage ?

Le seuil critique est $0,05 \times 30\,000 = 1\,500$ litres.

La fonction v est strictement croissante et tend vers 1 200 sans jamais l'atteindre : elle est donc toujours strictement inférieure à 1 200, donc à 1 500.

Non, selon ce modèle, le volume de substance polluante n'atteindra jamais le seuil de 1 500 litres : un nettoyage complet ne sera jamais nécessaire.

B.3 Déterminer la valeur exacte de l'instant au-delà duquel le volume dépasse 50 litres (en heure et minute, arrondi à la minute).

On résout $v(t) = 50 : 1\,200 (1 - e^{-0,005t}) = 50$, soit $1 - e^{-0,005t} = \frac{50}{1\,200} = \frac{1}{24}$.

$$e^{-0,005t} = \frac{23}{24}, \text{ donc } -0,005t = \ln\left(\frac{23}{24}\right).$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{23}{24}\right)}{-0,005} = 200 \ln\left(\frac{24}{23}\right) \text{ (valeur exacte), soit environ 8,51 heures.}$$

8,51 heures $\approx$ **8 h 31 min**.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)

A.1.a À l'aide du graphique, donner $f'(1)$ (la courbe admet une tangente horizontale au point C d'abscisse 1).

La tangente en C (abscisse 1) est parallèle à l'axe des abscisses, donc de coefficient directeur nul : $f'(1) = 0$.

A.1.b Donner la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$ (la courbe coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse $\frac{1}{2}$).

La courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'au point A, d'abscisse $\frac{1}{2}$: la solution de $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$ est $\frac{1}{2}$.

A.2 Déterminer $f'(\frac{1}{2})$ (la tangente en $A(\frac{1}{2}; 0)$ passe par $B(1; e^2)$).

$f'(\frac{1}{2})$ est le coefficient directeur de la tangente en A, c'est-à-dire de la droite (AB) :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{e^2 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = 2e^2.$$

A.3 Parmi les courbes C1, C2 et C3, indiquer lesquelles représentent des primitives de f.

Deux primitives d'une même fonction diffèrent uniquement d'une constante : leurs courbes se déduisent l'une de l'autre par une translation verticale.

C'est le cas de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, qui ont la même forme décalée verticalement.

$\mathcal{C}_3$ est décroissante là où f est positive (autour de $x = 0,5$ à $0,7$), ce qui est incompatible avec une primitive de f à cet endroit.

Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentent des primitives de f .

B.1.a Vérifier que, pour tout x de $[0; +\infty[$, $f(x) = e^2 \times (2x-1)/e^{2x-1}$ (avec $f(x) = (2x-1)e^{-2x+3}$).

On remarque que $-2x + 3 = -(2x - 1) + 2$, donc $e^{-2x+3} = e^{-(2x-1)} \times e^2$.

$$f(x) = (2x - 1) \times e^{-(2x-1)} \times e^2 = e^2 \times \frac{2x - 1}{e^{2x-1}}.$$

B.1.b En déduire la limite de f en $+\infty$ (on pourra poser $X = 2x-1$).

Quand $x \rightarrow +\infty$, $X = 2x - 1 \rightarrow +\infty$, et par croissances comparées $\frac{X}{e^X} \rightarrow 0$.

Donc $\frac{2x-1}{e^{2x-1}} \rightarrow 0$, puis $f(x) = e^2 \times \frac{2x-1}{e^{2x-1}} \rightarrow 0$.

B.2.a Montrer que, pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x) = (-4x+4)e^{-2x+3}$.

En dérivant le produit $f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3}$:

$$f'(x) = 2 \times e^{-2x+3} + (2x - 1) \times (-2)e^{-2x+3} = (2 - 2(2x - 1))e^{-2x+3} = (2 - 4x + 2)e^{-2x+3} = (-4x + 4)e^{-2x+3}.$$

B.2.b Construire le tableau complet des variations de f sur $[0; +\infty[$.

L'exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $(-4x + 4)$, positif avant $x = 1$ et négatif après.

f est donc croissante sur $[0; 1]$ puis décroissante sur $[1; +\infty[$.

$$f(0) = (0 - 1)e^3 = -e^3 \text{ et } f(1) = (2 - 1)e^1 = e.$$

Tableau : f croît de $-e^3$ à e sur $[0; 1]$, puis décroît de e vers 0 (sans l'atteindre) sur $[1; +\infty[$.

B.3 Justifier que la contrainte du client se traduit par $f(\alpha) = 0,15$, puis montrer qu'il existe une unique valeur de α dans $[1; +\infty[$ vérifiant cette égalité. En donner une valeur arrondie au dixième.

Le point $(\alpha; f(\alpha))$ et son symétrique $(\alpha; -f(\alpha))$ par rapport à l'axe des abscisses sont distants verticalement de $2f(\alpha)$.

Cette distance doit valoir 0,3 cm : $2f(\alpha) = 0,3 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0,15$.

Sur $[1; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, de $f(1) = e \approx 2,7$ vers 0 (sans l'atteindre).

Comme $0 < 0,15 < e$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), **l'équation $f(x) = 0,15$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$.**

À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 3,3$.

C.1 À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale I de f entre 0,5 et 3,3 est, arrondie au dixième, égale à 3,6.

On pose $u(x) = 2x - 1$ et $v'(x) = e^{-2x+3}$, donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$.

$$I = [u(x)v(x)]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} u'(x)v(x) dx = \left[-\frac{1}{2}(2x-1)e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} + \int_{0,5}^{3,3} e^{-2x+3} dx$$

Le crochet vaut $-\frac{1}{2}(5,6e^{-3,6} - 0) = -2,8e^{-3,6}$.

L'intégrale restante vaut $\left[-\frac{1}{2}e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} = -\frac{1}{2}e^{-3,6} + \frac{1}{2}e^2$.

$$I = -2,8e^{-3,6} - 0,5e^{-3,6} + 0,5e^2 = 0,5e^2 - 3,3e^{-3,6} \approx \mathbf{3,6}.$$

C.2 Déterminer le volume du porte-clé en cm^3 , arrondi au dixième (volume = aire du logo $\times$ épaisseur de 0,2 cm).

Le logo est symétrique par rapport à l'axe des abscisses : son aire est le double de l'aire sous la courbe de f entre 0,5 et 3,3, c'est-à-dire $2I \approx 2 \times 3,6 = 7,2 \text{ cm}^2$.

$$\text{Volume} \approx 7,2 \times 0,2 = \mathbf{1,4 \text{ cm}^3}.$$

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)

1.a Affirmation 1 : la courbe de f passe par $A(\ln 2; \frac{1}{2})$. Vrai ou faux ?

L'équation $y' + 2y = 0$ s'écrit $y' = -2y$, de solutions $x \mapsto Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Comme $f(0) = 1$: $C = 1$, donc $f(x) = e^{-2x}$.

$$f(\ln 2) = e^{-2 \ln 2} = e^{\ln(\frac{1}{4})} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}.$$

L'affirmation 1 est FAUSSE.

1.b Affirmation 2 : sur $[\pi/2; \pi]$, la courbe de f est au-dessus de ses tangentes. Vrai ou faux ?

$$f'(x) = 1 + \sin(x), \text{ donc } f''(x) = \cos(x).$$

Sur $[\pi/2; \pi]$, $\cos(x) \leq 0$: f est donc concave, et sa courbe est **en dessous** de ses tangentes (pas au-dessus).

L'affirmation 2 est FAUSSE.

1.c Affirmation 3 : $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f . Vrai ou faux ?

$$\text{Pour tout } x > 0 : -1 \leq \sin(x) \leq 1, \text{ donc } -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}, \text{ soit } 1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, les deux bornes tendent vers 1 : d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

L'affirmation 3 est VRAIE : $y = 1$ est bien asymptote horizontale en $+\infty$.

2. Affirmation 4 : $f(x) = 2x - e^{3x}$ est solution de (E_2) . Vrai ou faux ?

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = 2 - 3e^{3x}.$$

$$f'(x) - 3f(x) = (2 - 3e^{3x}) - 3(2x - e^{3x}) = 2 - 3e^{3x} - 6x + 3e^{3x} = 2 - 6x.$$

f vérifie donc bien l'équation (E_2) : **l'affirmation 4 est VRAIE.**

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)

A.1 Donner les variations de F_2 sur $]0; 3]$.

F_2 est une primitive de f_2 , donc ses variations sont données par le signe de f_2 . D'après le graphique, F_2 est **décroissante** sur $]0; 0,3]$, **croissante** sur $[0,3; 2,5]$, puis **décroissante** sur $[2,5; 3]$.

A.2 Identifier les courbes représentant f_2 et f_2' .

f_2 admet un maximum en $x \approx 0,75$ (là où F_2 change de croissante à décroissante) : sa dérivée doit s'y annuler. C'est la **courbe 1** qui s'annule vers 0,75 : elle représente f_2' .

Le point A (point d'inflexion de $\mathcal{C}_2$) est situé vers $x \approx 1,6$: la dérivée seconde s'y annule. C'est la **courbe 2** qui s'annule vers 1,6 : elle représente f_2'' .

B.1.a Montrer que $f_1(x) = -1 - \ln(x)/x^2$.

$$f_1 = w + \frac{u}{v} \text{ avec } w(x) = 1 - x, u(x) = 1 + \ln x, v(x) = x, \text{ donc } w'(x) = -1, u'(x) = \frac{1}{x}, v'(x) = 1.$$

$$f_1'(x) = w'(x) + \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} = -1 + \frac{1 - (1 + \ln x)}{x^2} = -1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

B.1.b Déterminer la limite de $f_1(x)$ en $+\infty$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1'(x) = -1$.

B.2.a Justifier les variations de f_1 et la valeur de l'extremum.

$f_1''(x)$ a le signe de $2 \ln x - 1$ (car $x^3 > 0$), positif pour $x > e^{\frac{1}{2}}$.

f_1' est donc décroissante sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$ puis croissante sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$.

$f_1'(e^{\frac{1}{2}}) = -1 - \frac{\ln(e^{\frac{1}{2}})}{e} = -1 - \frac{1}{2e}$: c'est bien la valeur du minimum du tableau.

B.2.b Justifier la limite de f_1 en 0.

Quand $x \rightarrow 0^+$: $-\ln(x) \rightarrow +\infty$ et $x^2 \rightarrow 0^+$, donc par quotient puis somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1'(x) = +\infty$.

B.2.c Montrer qu'il existe une unique solution α à $f_1(x) = 0$, puis que f_1 admet un maximum.

Sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$, f_1' est continue et strictement décroissante, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1'(x) = +\infty > 0$ et $f_1'(e^{\frac{1}{2}}) = -1 - \frac{1}{2e} < 0$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_1'(x) = 0$ y admet une unique solution.

Sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$, f_1' est strictement croissante et tend vers -1 , donc reste toujours strictement négative : pas de solution sur cet intervalle.

Il existe donc **une unique solution** α à $f_1'(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$, et f_1 **admet un maximum en** α (signe de f_1' positif puis négatif).

B.2.d Compléter le script Python calculant une valeur approchée de α .

- Condition de la boucle « while » : **while d(u) > 0 :**
- Instruction dans la boucle : **u = u + 0.01**

C.1 Montrer que H est une primitive de h .

H est de la forme $\frac{1}{2}u^2$ avec $u(x) = 1 + \ln x$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$, et $H'(x) = u'(x)u(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x) = h(x)$.

H est donc bien une primitive de h sur $]0; +\infty[$.

C.2 Existe-t-il k tel que la valeur moyenne de f sur $[1; e]$ soit nulle ?

$$\begin{aligned} \text{La valeur moyenne est } \mu &= \frac{1}{e-1} \int_1^e f_k(x) dx = \frac{1}{e-1} \int_1^e (1-x+kh(x)) dx = \frac{1}{e-1} \left[x - \frac{x^2}{2} + kH(x) \right]_1^e \\ &= \frac{1}{e-1} \left(\left(e - \frac{e^2}{2} + k \frac{(1+1)^2}{2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} + k \frac{(1+0)^2}{2} \right) \right) = \frac{2e - e^2 + 3k - 1}{2(e-1)}. \\ \mu = 0 &\Leftrightarrow 2e - e^2 + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{e^2 - 2e + 1}{3} = \frac{(e-1)^2}{3}. \end{aligned}$$

Oui, il existe une unique valeur $k = \frac{(e-1)^2}{3}$ pour laquelle la valeur moyenne de f_k sur $[1; e]$ est nulle.

Bac Première 2026 — Métropole (SPE)

Affirmation 1 : quelle que soit la valeur de u , $x^2 + x - u^2 = 0$ possède deux solutions réelles distinctes. Vrai ou faux ?

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-u^2) = 1 + 4u^2$.

Comme $4u^2 \geq 0$ pour tout réel u , $\Delta \geq 1 > 0$: le discriminant est toujours strictement positif, l'équation admet donc toujours deux solutions réelles distinctes. L'affirmation 1 est **VRAIE**.

Affirmation 2 : la suite (u_n) définie par $u_n = 2^{-n}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Vrai ou faux ?

$$u_n = 2^{-n} = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n : (u_n) \text{ est bien géométrique de raison } \frac{1}{2}, \text{ de premier terme } u_0 = 1.$$

L'affirmation 2 est **VRAIE**.

Affirmation 3 : le point $A(3;3)$ appartient à la tangente à Cf en $x=0$, pour $f(x) = e^x - 1$. Vrai ou faux ?

$f'(x) = e^x$, donc $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$. L'équation de la tangente en $x = 0$ est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$.

Le point $A(3;3)$ vérifie $y = x$ (puisque $3 = 3$) : il appartient bien à la tangente. L'affirmation 3 est **VRAIE**.

Bac Première 2026 — Métropole (TECHNO)**1. Par lecture graphique, déterminer $f(-2)$ et $f(1)$.**

D'après les coordonnées des points A et B sur le graphique : $f(-2) = -5$ et $f(1) = 4$.

2. Par lecture graphique, déterminer $f'(-2)$ et $f'(1)$.

$f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente (d) en A, soit **6** ; $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T en B, horizontale, soit **0**.

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ par lecture graphique.

La courbe coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 3 : $\mathcal{S} = \{-1; 3\}$.

4. Dresser le tableau de variation de f par lecture graphique.

f est croissante sur $[-3; 1]$ (de -12 à 4) puis décroissante sur $[1; 4]$ (de 4 à -5).

5. On admet que $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Retrouver par le calcul les résultats de la question 1.

$f(-2) = -4 - 4 + 3 = -5$ et $f(1) = -1 + 2 + 3 = 4$: cela confirme la lecture graphique.

6.a Déterminer $f'(x)$ puis retrouver les résultats de la question 2.

$f'(x) = -2x + 2$. $f'(-2) = 4 + 2 = 6$ et $f'(1) = -2 + 2 = 0$: cela confirme la lecture graphique.

6.b Vérifier par le calcul que $f(x) = (x + 1)(-x + 3)$, puis retrouver les résultats de la question 3.

$(x + 1)(-x + 3) = -x^2 + 3x - x + 3 = -x^2 + 2x + 3$, ce qui correspond bien à $f(x)$.

$(x + 1)(-x + 3) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 3$: cela confirme les solutions trouvées en question 3.

6.c Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[-3; 4]$ et en déduire les variations de f .

$f'(x) = -2x + 2 = 0 \iff x = 1$, et $f'(x) > 0 \iff x < 1$ (fonction affine décroissante en x , de coefficient directeur -2).

f est donc croissante sur $[-3; 1]$ (où $f' \geq 0$) et décroissante sur $[1; 4]$ (où $f' \leq 0$), conformément à la lecture graphique.

Bac Première 2026 — Amérique du Nord (SPECIFIQUE)**1.a Par lecture graphique, donner la valeur de $f(3)$.**

Par lecture graphique, $f(3) \approx 5$.

1.b Par lecture graphique, donner la valeur de $f'(-1)$.

$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente en A : elle passe par $(-1; 5)$ et $(0; 9)$, de coefficient directeur $\frac{9-5}{0-(-1)} = 4$: $f'(-1) \approx 4$.

2.a Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.

$$f'(x) = -2x + 2.$$

2.b Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2; 4]$.

$-2x + 2 = 0 \iff x = 1$. Comme f' est affine de coefficient directeur négatif, $f'(x)$ est positif sur $[-2; 1]$ et négatif sur $[1; 4]$.

3. Donner les variations de f sur $[-2; 4]$.

$$f(-2) = -4 - 4 + 8 = 0, f(1) = -1 + 2 + 8 = 9, f(4) = -16 + 8 + 8 = 0.$$

f est croissante sur $[-2; 1]$ (de 0 à 9) et décroissante sur $[1; 4]$ (de 9 à 0), conformément au signe de f' .

Bac Première 2026 — Amérique du Nord (SPE)**1. Montrer que, pour tout x , $f'(x) = (-2x + 6)e^{-0,5x}$.**

$f(x) = (4x - 4)e^{-0,5x} + 5$ est de la forme $uv + 5$ avec $u(x) = 4x - 4$, $v(x) = e^{-0,5x}$, donc $u'(x) = 4$, $v'(x) = -0,5e^{-0,5x}$.

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 4e^{-0,5x} + (4x - 4) \times (-0,5)e^{-0,5x} = [4 - 0,5(4x - 4)]e^{-0,5x} = [4 - 2x + 2]e^{-0,5x} = (-2x + 6)e^{-0,5x}.$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de f .

$e^{-0,5x} > 0$ pour tout x , donc $f'(x)$ est du signe de $-2x + 6$, qui s'annule en $x = 3$ et est positif pour $x < 3$.

f est croissante sur $] -\infty; 3]$ et décroissante sur $[3; +\infty[$, avec un maximum $f(3) = 8e^{-1,5} + 5$.

3. La courbe admet-elle des points à tangente horizontale ?

La tangente est horizontale lorsque $f'(x) = 0$, soit uniquement en $x = 3$.

$$f(3) = (4 \times 3 - 4)e^{-0,5 \times 3} + 5 = 8e^{-1,5} + 5.$$

Oui, $\mathcal{C}_f$ admet un unique point à tangente horizontale, de coordonnées $(3; 8e^{-1,5} + 5)$.

Bac Première 2026 — Centres étrangers G1 (SPECIFIQUE)**1. Calculer l'expression de la dérivée f' pour $f(x) = -x^3 + 4,5x^2 - 6x + 2$.**

$$f'(x) = -3x^2 + 4,5 \times 2x - 6 = -3x^2 + 9x - 6.$$

2. Vérifier que $f'(x) = (3x - 6)(1 - x)$.

$$(3x - 6)(1 - x) = 3x - 3x^2 - 6 + 6x = -3x^2 + 9x - 6, \text{ ce qui correspond bien à } f'(x).$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; 10]$.

$$3x - 6 = 0 \iff x = 2, \text{ et } 3x - 6 > 0 \iff x > 2 \text{ (fonction affine croissante).}$$

$$1 - x = 0 \iff x = 1, \text{ et } 1 - x > 0 \iff x < 1 \text{ (fonction affine décroissante).}$$

Produit des signes : $f'(x)$ est négatif sur $[0; 1]$, positif sur $[1; 2]$, négatif sur $[2; 10]$.

4. En déduire les variations de f sur $[0; 10]$.

D'après le signe de f' : f est décroissante sur $[0; 1]$, croissante sur $[1; 2]$, puis décroissante sur $[2; 10]$.

Bac Première 2026 — Centres étrangers G1 (SPE)**1.a Donner $f(1)$.**

La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par $A(1; 20)$: $f(1) = 20$.

1.b Déterminer $f'(1)$.

$$f'(1) \text{ est le coefficient directeur de la tangente } T_A, \text{ c'est-à-dire de la droite (AB) : } f'(1) = \frac{10 - 20}{3 - 1} = \frac{-10}{2} = -5.$$

1.c Justifier que la tangente TA a pour équation $y = -5x + 25$.

$$\text{L'équation de la tangente en } x = 1 \text{ est } y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -5(x - 1) + 20 = -5x + 5 + 20 = -5x + 25.$$

2.a Démontrer que $f'(x) = (2x - 3)(2x + 3)/x^2$ pour $f(x) = (4x^2 + 7x + 9)/x$.

Par la formule de dérivation d'un quotient : $f'(x) = \frac{(8x + 7)x - (4x^2 + 7x + 9) \times 1}{x^2} = \frac{8x^2 + 7x - 4x^2 - 7x - 9}{x^2} = \frac{4x^2 - 9}{x^2}$.

$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3)$, donc $f'(x) = \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{x^2}$.

2.b Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

$x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$. $2x + 3 > 0$ toujours sur cet intervalle. $2x - 3 > 0 \iff x > \frac{3}{2}$. Donc $f'(x) < 0$ sur $]0; \frac{3}{2}[$ et $f'(x) > 0$ sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$.

2.c En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.

f est décroissante sur $]0; \frac{3}{2}]$ et croissante sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$.

3. Existe-t-il une tangente à C_f parallèle à la droite $y = 3x + 5$?

Deux droites sont parallèles ssi elles ont le même coefficient directeur : on cherche x_0 tel que $f'(x_0) = 3$.

$\frac{4x^2 - 9}{x^2} = 3 \iff 4x^2 - 9 = 3x^2 \iff x^2 - 9 = 0 \iff (x - 3)(x + 3) = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -3$.

Seule $x_0 = 3$ appartient à $]0; +\infty[$: **oui, il existe une unique tangente à C_f parallèle à $y = 3x + 5$, c'est la tangente au point d'abscisse 3.**

Bac Première 2026 — Centres étrangers G1 (TECHNO)

1.a Par lecture graphique, donner l'image de 3 par f .

Le point de la courbe d'abscisse 3 a pour ordonnée -2 : $f(3) = -2$.

1.b Par lecture graphique, déterminer $f'(3)$.

$f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente T , qui passe par $(3; -2)$ et $(4; 2)$: $f'(3) = \frac{2 - (-2)}{4 - 3} = 4$.

2.a Calculer $f(0)$ pour $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 16$.

$f(0) = 0 + 0 - 0 + 16 = 16$.

2.b Calculer $f'(x)$, en détaillant les calculs.

$f'(x) = -3x^2 + 9 \times 2x - 24 = -3x^2 + 18x - 24$.

2.c Vérifier que $f'(x) = -3(x - 2)(x - 4)$.

$$-3(x - 2)(x - 4) = -3(x^2 - 6x + 8) = -3x^2 + 18x - 24, \text{ ce qui correspond bien à } f'(x).$$

3.a Étudier le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variation de f sur $[0; 4]$.

$$f'(x) = -3(x - 2)(x - 4), \text{ avec } -3 < 0 \text{ toujours, } x - 2 \text{ nul en } 2 \text{ et } x - 4 \text{ nul en } 4 \text{ (négatif sur } [0; 4]).$$

Le produit $(x - 2)(x - 4)$ est positif à l'extérieur de $[2; 4]$ et négatif entre les deux : en tenant compte du -3 , $f'(x)$ est **négatif sur $[0; 2]$, positif sur $[2; 4]$.**

$$f(0) = 16, f(2) = -8 + 36 - 48 + 16 = -4, f(4) = -64 + 144 - 96 + 16 = 0.$$

f est décroissante sur $[0; 2]$ (de 16 à -4) puis croissante sur $[2; 4]$ (de -4 à 0).

3.b Quel est le minimum de f sur $[0; 4]$? En quelle valeur est-il atteint ?

D'après le tableau de variation, **le minimum de f sur $[0; 4]$ est -4 , atteint pour $x = 2$.**

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 1)

Partie A — 1. Les courbes C_1 et C_2 représentent deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, l'une étant la dérivée de l'autre ; C_1 coupe l'axe des ordonnées en $(0; 1)$, C_2 le coupe en $(0; 2)$ et coupe l'axe des abscisses en $(-2; 0)$ et $(1; 0)$. Associer à g et g' leur courbe.

La fonction représentée par C_1 est décroissante sur $] -\infty; -2]$ et $[1; +\infty[$, croissante sur $[-2; 1]$.

La fonction représentée par C_2 est négative sur $] -\infty; -2]$ et $[1; +\infty[$, positive sur $[-2; 1]$: ce sont exactement les intervalles où la fonction de C_1 croît ou décroît.

Le signe de la dérivée déterminant les variations, **C_1 représente g et C_2 représente g' .**

Partie A — 2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

La tangente en 0 a pour équation $y = g'(0)x + g(0)$.

C_1 coupe l'axe des ordonnées en $(0; 1)$ donc $g(0) = 1$; C_2 le coupe en $(0; 2)$ donc $g'(0) = 2$.

L'équation de la tangente est donc $y = 2x + 1$.

Partie B — 1. On considère l'équation différentielle (E) : $y + y' = (2x+3)e^{-x}$. Montrer que $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est une solution particulière de (E).

f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables : $f'_0(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x)(-e^{-x}) = (2x + 3 - x^2 - 3x)e^{-x} = (-x^2 - x + 3)e^{-x}$.

$f_0(x) + f'_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x} + (-x^2 - x + 3)e^{-x} = (2x + 3)e^{-x}$: f_0 vérifie bien (E).

Partie B — 2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y + y' = 0$.

(E_0) équivaut à $y' = -y$: ses solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie B — 3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

(E) est de la forme $y' = ay + f$ avec f_0 solution particulière : ses solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-x} + f_0(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie B — 4. On admet que g est solution de (E). Déterminer l'expression de g.

Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$. Comme $g(0) = 1 : 1 = (0 + 0 + C)e^0 = C$.

$$g(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}.$$

Partie B — 5. Déterminer les solutions de (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Une courbe admet exactement deux points d'inflexion si et seulement si sa dérivée seconde s'annule exactement deux fois en changeant de signe.

Soit $f(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$ une solution de (E) : $f'(x) = (-x^2 - x + 3 - C)e^{-x}$ et $f''(x) = (x^2 - x - 4 + C)e^{-x}$.

L'exponentielle étant strictement positive, $f''(x)$ est du signe de $x^2 - x - 4 + C$, dont le discriminant est $\Delta = 1 - 4(-4 + C) = 17 - 4C$.

Ce polynôme change deux fois de signe si et seulement si $\Delta > 0$, soit $C < \frac{17}{4}$.

Les solutions cherchées sont les fonctions $x \mapsto (x^2 + 3x + C)e^{-x}$ avec $C < \frac{17}{4}$.

Partie C — 1. On considère $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la limite de f en $+\infty$ est égale à 0.

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} + 3\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}.$$

Par croissances comparées, pour tout entier n non nul, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$; donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Partie C — 2.a Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$.

$$f'(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x + 2)(-e^{-x}) = (2x + 3 - x^2 - 3x - 2)e^{-x} = (-x^2 - x + 1)e^{-x}.$$

Partie C — 2.b Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de f .

L'exponentielle étant strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $-x^2 - x + 1$, de discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$.

Ses racines sont $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$; le coefficient dominant étant négatif, $-x^2 - x + 1$ est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles.

f est décroissante sur $] -\infty ; x_1]$ et sur $[x_2 ; +\infty[$, croissante sur $[x_1 ; x_2]$.

Partie C — 3. Expliquer pourquoi f est positive sur $[0 ; +\infty[$.

L'exponentielle étant strictement positive, $f(x)$ est du signe de $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$, de racines -2 et -1 .

Le coefficient dominant étant positif, ce polynôme est positif sur $] -1 ; +\infty[$, donc en particulier sur $[0 ; +\infty[$: f est positive sur $[0 ; +\infty[$.

Partie C — 4. On admet que $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$ est une primitive de f . Pour α réel positif, déterminer l'aire $A(\alpha)$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites $x = 0$ et $x = \alpha$.

f étant positive sur $[0 ; \alpha]$, l'aire cherchée est $\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx = F(\alpha) - F(0)$.

$F(0) = (0 - 0 - 7)e^0 = -7$, donc $\mathcal{A}(\alpha) = (-\alpha^2 - 5\alpha - 7)e^{-\alpha} + 7$ unités d'aire.

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 2)**Partie A — 1.a On considère $f(x) = e \sin(x)$ sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$. Démontrer que $f'(x) = e [\sin(x) + \cos(x)]$ sur cet intervalle.**

f est un produit de fonctions dérivables : $f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) = e^x [\sin(x) + \cos(x)]$.

Partie A — 1.b Justifier que f est strictement croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

Sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$, et ils ne s'annulent jamais simultanément (sin ne s'annule qu'en 0 où $\cos(0) = 1$, cos ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$ où $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$) : donc $\sin(x) + \cos(x) > 0$ sur cet intervalle.

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , $f'(x) > 0$ comme produit de deux facteurs strictement positifs : f est strictement croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

Partie A — 2.a Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.

$$f(0) = e^0 \sin(0) = 0 \text{ et } f'(0) = e^0 [\sin(0) + \cos(0)] = 1.$$

La tangente en 0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$, soit $y = x$.

Partie A — 2.b Démontrer que f est convexe sur $[0; \pi/2]$.

$$\text{Pour tout réel } x : f''(x) = e^x [\sin(x) + \cos(x)] + e^x [\cos(x) - \sin(x)] = 2e^x \cos(x).$$

$$\text{Sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos(x) \geq 0 \text{ et } e^x > 0, \text{ donc } f''(x) \geq 0 : f \text{ est convexe sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Partie A — 2.c En déduire que, pour tout réel x de $[0; \pi/2]$, $e \sin(x) \geq x$.

La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier au-dessus de la tangente T d'équation $y = x$ au point d'abscisse 0.

$$\text{Donc, pour tout } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], f(x) \geq x, \text{ c'est-à-dire } e^x \sin(x) \geq x.$$

Partie A — 3. Justifier que le point d'abscisse $\pi/2$ de la courbe de f est un point d'inflexion.

$f''(x) = 2e^x \cos(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = \frac{\pi}{2}$ (positive avant, négative après, car $\cos$ change de signe en $\frac{\pi}{2}$) : le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est donc un point d'inflexion de la courbe de f.

Partie B — On note $I = \int_0^{\pi/2} e \sin(x) dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} e \cos(x) dx$. En intégrant par parties de deux manières différentes, établir $I = 1 + J$ et $I = e^{\pi/2} - J$.

En posant $u(x) = e^x$, $v'(x) = \sin(x)$ (donc $u'(x) = e^x$, $v(x) = -\cos(x)$), l'intégration par parties donne : $I = [-\cos(x)e^x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx = 0 + 1 + J = 1 + J$.

En posant $u(x) = \sin(x)$, $v'(x) = e^x$ (donc $u'(x) = \cos(x)$, $v(x) = e^x$), l'intégration par parties donne : $I = [\sin(x)e^x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx = e^{\pi/2} - J$.

On obtient donc bien $I = 1 + J$ et $I = e^{\pi/2} - J$.

Partie B — En déduire que $I = (1 + e^{\pi/2}) / 2$.

En additionnant les deux relations : $2I = 1 + J + e^{\pi/2} - J = 1 + e^{\pi/2}$, donc $I = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2}$.

Partie B — On note $g(x) = x$. Calculer l'aire exacte du domaine hachuré entre les courbes de f et g sur $[0 ; \pi/2]$.

D'après la partie A, $f(x) \geq g(x)$ sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, donc l'aire cherchée est $\mathcal{A} = \int_0^{\pi/2} (f(x) - x) dx =$

$$I - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/2}.$$

$$\mathcal{A} = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2} - \frac{\pi^2}{8} \text{ unités d'aire } (\approx 1,67 \text{ u.a.}).$$

Bac Terminale 2025 — Asie (jour 1)

1.a On considère $g(x) = e^{\sqrt{x}}$ sur $]0 ; +\infty[$, et $f(x) = e^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$. Montrer que $g'(x) = f(x)$.

g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables : $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = f(x)$.

1.b Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)/(4x\sqrt{x})$.

f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$. En dérivant $f = \frac{g}{2\sqrt{x}}$ (avec

$$g' = f) : f'(x) = \frac{f(x) \times 2\sqrt{x} - g(x) \times \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x}.$$

$$\text{En réduisant au même dénominateur : } f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}.$$

2.a Déterminer la limite de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{x} = 0^+, \text{ avec } f(x) > 0 : \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

2.b Interpréter graphiquement ce résultat.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote verticale d'équation $x = 0$** .

3.a Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Par croissances comparées, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$; en posant $u = \sqrt{x}$ (qui tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$), par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3.b Étudier le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

Pour tout $x > 0$, $e^{\sqrt{x}} > 0$ et $4x\sqrt{x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{x} - 1$.

$\sqrt{x} - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$: f est donc décroissante sur $]0 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$, avec un minimum $f(1) = \frac{e}{2}$.

3.c Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[1; +\infty[$, avec une valeur approchée à 10^{-1} près.

Sur $[1; +\infty[$, f est continue et strictement croissante, de $f(1) = \frac{e}{2} \approx 1,36$ à $+\infty$.

Comme $2 \in \left[\frac{e}{2}; +\infty\right]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$.

À la calculatrice, $\alpha \approx 4,6$.

4.a On pose $I = \int_1^2 f(x) \, dx$. Calculer I .

D'après la question 1.a, g est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

$$I = [g(x)]_1^2 = \left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^2 = e^{\sqrt{2}} - e.$$

4.b Interpréter graphiquement ce résultat.

f étant positive, $I = e^{\sqrt{2}} - e$ représente l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = 2$, en unités d'aire.

5.a On admet que $f''(x) = e^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)/(8x^2\sqrt{x})$. En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ sur $]0; +\infty[$.

En posant $X = \sqrt{x}$, l'expression devient $X^2 - 3X + 3$, un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$.

Comme $\Delta < 0$ et que le coefficient dominant est positif, $X^2 - 3X + 3 > 0$ pour tout réel X , donc $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ pour tout $x > 0$.

5.b Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$: $e^{\sqrt{x}} > 0$, $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ (question précédente) et $8x^2\sqrt{x} > 0$, donc $f''(x) > 0$: f est convexe sur $]0; +\infty[$.

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 1)

Partie A — 1. On considère $f(x) = 4\ln(x+1) - x^2/25$ sur $] -1; +\infty[$. Déterminer la limite de f en -1 .

$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0^+$, donc, par composition avec $\ln$ (qui tend vers $-\infty$ en 0^+), $\lim_{x \rightarrow -1} 4\ln(x+1) = -\infty$.

Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow -1} \left(-\frac{x^2}{25}\right) = -\frac{1}{25}$, donc par somme, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

Partie A — 2. Montrer que, pour tout x de $]-1; +\infty[$, $f'(x) = (100 - 2x - 2x^2) / (25(x+1))$.

f est dérivable sur $]-1; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables : la dérivée de $4 \ln(x+1)$ est $\frac{4}{x+1}$, et celle de $-\frac{x^2}{25}$ est $-\frac{2x}{25}$.

$$f'(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{2x}{25} = \frac{4 \times 25 - (x+1) \times 2x}{25(x+1)} = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}.$$

Partie A — 3. Étudier les variations de f sur $]-1; +\infty[$ et en déduire que f est strictement croissante sur $[2; 6,5]$.

Comme $25(x+1) > 0$ sur $]-1; +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $100 - 2x - 2x^2$, trinôme de coefficient dominant négatif (-2).

$$\Delta = 4 + 800 = 804 > 0 : \text{les racines sont } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{201}}{2} \approx 6,6 \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{201}}{2} \approx -7,6 < -1.$$

Le coefficient dominant étant négatif, $f'(x) > 0$ sur $]-1; x_1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]x_1; +\infty[$: f est croissante sur $]-1; x_1]$ puis décroissante.

Comme $[2; 6,5] \subset]-1; x_1[$ (car $x_1 \approx 6,6 > 6,5$), f est strictement croissante sur $[2; 6,5]$.

Partie A — 4. On pose $h(x) = f(x) - x$ sur $[2; 6,5]$, avec un maximum $M \approx 2,265$ atteint en $m \approx 2,364$. Montrer que $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2; 6,5]$.

$h(2) = f(2) - 2 \approx 2,23 > 0$. Sur $[2; m]$, h est strictement croissante et $h(2) > 0$, donc $h(x) > 0$ sur cet intervalle : pas de solution ici.

Sur $[m; 6,5]$, h est continue et strictement décroissante, avec $h(m) = M \approx 2,265 > 0$ et $h(6,5) \approx -0,13 < 0$.

0 est compris entre $h(m)$ et $h(6,5)$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[m; 6,5]$, donc sur $[2; 6,5]$.

Partie A — 5.a On donne un script Python bornes(n) qui affine un encadrement de α . Donner les valeurs renvoyées par bornes(2) (arrondies au centième).

À la calculatrice, 'bornes(2)' renvoie (6,36 ; 6,37).

Partie A — 5.b Interpréter ces valeurs.

Ces valeurs donnent un encadrement de α : $6,36 < \alpha < 6,37$.

Partie B — 1. On considère (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence que, pour tout n , $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, donc $2 \leq u_0 \leq u_1 < 6,5$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que, pour un entier n , $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$. Comme f est strictement croissante sur $[2 ; 6,5]$: $f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(6,5)$.

Or $f(2) \approx 4,23 > 2$ et $f(6,5) \approx 6,37 < 6,5$, donc $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6,5$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n , $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$.

Partie B — 2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite .

D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée par 6,5 : toute suite croissante et majorée étant convergente, (u_n) **converge vers une limite** $\ell \leq 6,5$.

Partie B — 3. On rappelle que α est l'unique solution de $h(x) = 0$ sur $[2 ; 6,5]$. Justifier que $\ell = \alpha$.

(u_n) vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue : d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de $f(x) = x$, c'est-à-dire de $h(x) = 0$. Comme $\ell \in [2 ; 6,5]$ et que cette équation y admet l'unique solution α , on a $\ell = \alpha$.

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 1)

Partie A — 1. On considère (E_1) : $y' + 0,48y = \frac{1}{250}$. Montrer que la fonction constante $h(t) = \frac{1}{120}$ est solution de (E_1) .

h est dérivable et $h'(t) = 0$ pour tout t , donc $h'(t) + 0,48h(t) = 0 + 0,48 \times \frac{1}{120} = \frac{1}{250}$: h est bien solution de (E_1) .

Partie A — 2. Donner la forme générale des solutions de $y' + 0,48y = 0$.

Les solutions sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-0,48t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie A — 3. En déduire l'ensemble des solutions de (E_1) .

Les solutions de (E_1) sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie B — 1. Une population de bactéries $p(t)$ (en milliers, $p(0)=30$) vérifie (E_2) : $p' = p(120-p)/250$. On pose $y = 1/p$. Montrer que si p est solution de (E_2) , alors y est solution de (E_1) .

$$p = \frac{1}{y} \text{ donne } p' = -\frac{y'}{y^2}. \text{ En remplaçant dans } (E_2) : -\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{250} \times \frac{1}{y} \times \left(120 - \frac{1}{y}\right).$$

$$\text{En multipliant par } -y^2 : y' = -\frac{y}{250} \times (120y - 1) = -0,48y + \frac{1}{250}, \text{ soit } y' + 0,48y = \frac{1}{250}.$$

y est donc bien solution de (E_1) .

Partie B — 2. En admettant la réciproque, montrer que $p(t) = 120 / (1 + Ke^{-0,48t})$, avec K une constante réelle.

$$\text{D'après la partie A, } y(t) = Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

$$p(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120}} = \frac{120}{120Ce^{-0,48t} + 1}.$$

$$\text{En posant } K = 120C : p(t) = \frac{120}{Ke^{-0,48t} + 1}.$$

Partie B — 3. En utilisant la condition initiale $p(0) = 30$, déterminer la valeur de K .

$$p(0) = 30 \iff \frac{120}{K+1} = 30 \iff K+1 = \frac{120}{30} = 4 \iff K = 3.$$

Partie B — 4. Déterminer la limite de $p(t)$ en $+\infty$ et interpréter.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,48t) = -\infty, \text{ donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,48t} = 0, \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} (3e^{-0,48t} + 1) = 1.$$

Par quotient, $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 120$: la population de bactéries se stabilise autour de 120 000 individus.

Partie B — 5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population dépasse 60 000 individus (en heures et minutes).

$$p(t) = 60 \iff \frac{120}{3e^{-0,48t} + 1} = 60 \iff 3e^{-0,48t} + 1 = 2 \iff e^{-0,48t} = \frac{1}{3}.$$

$$-0,48t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3) \iff t = \frac{\ln(3)}{0,48} \approx 2,289 \text{ heures.}$$

Il faut environ 2 heures et 17 minutes pour que la population dépasse 60 000 individus.

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 2)

Partie A — 1. Une population animale du milieu A est modélisée par une suite géométrique (u_n) , $u_0 = 6$ (en milliers), de raison 0,93 (n = années depuis 2025). Donner la population au 1er janvier 2026.

$$u_1 = u_0 \times 0,93 = 6 \times 0,93 = 5,58 \text{ (milliers), soit } \mathbf{5\,580 \text{ individus.}}$$

Partie A — 2. Exprimer u_n en fonction de n .

(u_n) étant géométrique de premier terme 6 et de raison 0,93 : $u_n = 6 \times 0,93^n$.

Partie A — 3. Déterminer la limite de (u_n) et interpréter.

Comme $0,93 \in]-1 ; 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,93^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, la population du milieu A tend vers l'extinction.

Partie B — 1. On modélise la population du milieu B par $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n$. Donner la population au 1er janvier 2026.

$v_1 = -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 = -1,8 + 6,6 = 4,8$ (milliers), soit **4 800 individus**.

Partie B — 2. On pose $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$ sur $[0 ; +\infty[$. Démontrer que f est croissante sur $[0 ; 11]$.

f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$: $f'(x) = -0,1x + 1,1$.

$f'(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{1,1}{0,1} = 11$: f est donc croissante sur $[0 ; 11]$.

Partie B — 3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.

Initialisation : $v_0 = 6$ et $v_1 = 4,8$, donc $2 \leq v_1 \leq v_0 \leq 6$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que, pour un entier n , $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$. Comme $v_n, v_{n+1} \in [0 ; 11]$ et que f est croissante sur $[0 ; 11]$: $f(2) \leq f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \leq f(6)$.

Or $f(2) = -0,05 \times 4 + 2,2 = 2$ et $f(6) = v_1 = 4,8 \leq 6$, donc $2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 6$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n , $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.

Partie B — 4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite .

D'après la question précédente, (v_n) est décroissante (car $v_{n+1} \leq v_n$) et minorée par 2 : toute suite décroissante et minorée étant convergente, (v_n) **converge vers une limite $\ell \geq 2$** .

Partie B — 5.a Justifier que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, puis en déduire la valeur de ℓ .

(v_n) vérifie $v_{n+1} = f(v_n)$ avec f continue : d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

$f(\ell) = \ell \iff -0,05\ell^2 + 1,1\ell = \ell \iff 0,05\ell^2 - 0,1\ell = 0 \iff 0,05\ell(\ell - 2) = 0$, soit $\ell = 0$ ou $\ell = 2$.

Comme $\ell \geq 2$, on a $\ell = 2$.

Partie B — 5.b Interpréter ce résultat.

Au bout d'un grand nombre d'années, la population du milieu B se stabilise autour de 2 000 individus, soit le tiers de la population initiale.

Partie C — 1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.

On cherche $u_n < 3 \iff 6 \times 0,93^n < 3 \iff 0,93^n < \frac{1}{2}$.

En passant au logarithme népérien (croissant) : $n \ln(0,93) < -\ln(2)$, et comme $\ln(0,93) < 0$:
 $n > -\frac{\ln(2)}{\ln(0,93)} \approx 9,55$, soit $n \geq 10$.

La population du milieu A passera sous 3 000 individus à partir de 2035.

Partie C — 2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.

(v_n) étant décroissante, on calcule : $v_5 \approx 3,14$ et $v_6 \approx 2,96$: la population du milieu B passera sous 3 000 individus à partir de 2031 ($n = 6$).

Partie C — 3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera celle du milieu A.

(u_n) converge vers 0 et (v_n) converge vers 2, toutes deux décroissantes à partir de la même valeur initiale $u_0 = v_0 = 6$: il existera donc nécessairement un rang N à partir duquel $v_N > u_N$.

Partie C — 4.a Compléter le programme Python (n=0, u=6, v=6; while ... : u=...; v=...; n=n+1; print(2025+n)) pour qu'il affiche l'année où la population B dépasse la population A.

Il faut compléter par 'while u >= v :', 'u = 0.93*u', 'v = -0.05*v+1.1*v' (les formules de récurrence des deux suites).

Partie C — 4.b Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

À la calculatrice : $u_{12} \approx 2,51$ et $v_{12} \approx 2,41$ (encore $u > v$) ; $u_{13} \approx 2,34$ et $v_{13} \approx 2,36$ (désormais $v > u$) : le programme affiche **2038**.

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 2)**Partie A — 1. On considère $f(x) = 1/(a+e^{-bx})$ sur $[0; +\infty[$, avec $a, b > 0$. Par lecture graphique (points A(0; 0,5), B(10; 1) sur la courbe), donner une valeur approchée de $f(10)$.**

Par lecture graphique, $f(10) \approx 0,9$.

Partie A — 2. On admet que la limite de f en $+\infty$ est 1. Interpréter graphiquement.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.**

Partie A — 3. Justifier que $a = 1$.

$f(0) = \frac{1}{a+1}$, et le point $A(0 ; 0,5)$ appartient à la courbe, donc $\frac{1}{a+1} = 0,5 \iff a+1 = 2 \iff a = 1$.

Partie A — 4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0,5}{10 - 0} = \frac{0,5}{10} = 0,05.$$

Partie A — 5.a Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et b .

f est de la forme $\frac{1}{1 + e^{-bx}}$, de dérivée $-\frac{-be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2} = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}$.

Partie A — 5.b En déduire la valeur de b .

(AB) étant tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0, son coefficient directeur est $f'(0) = \frac{b}{(1+1)^2} = \frac{b}{4}$.

$$\frac{b}{4} = 0,05 \iff b = 0,2.$$

Partie B — 1. On admet que $f(x) = 1/(1+e^{-0,2x})$ sur $[0 ; +\infty[$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,2x} = 0 \text{ (par composition), donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Partie B — 2. Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{0,2e^{-0,2x}}{(1 + e^{-0,2x})^2} \text{ (même calcul que ci-dessus avec } b = 0,2).$$

Pour tout $x \geq 0$, le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs : $f'(x) > 0$, donc f est **strictement croissante** sur $[0 ; +\infty[$.

Partie B — 3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0,97$.

$f(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$: f est continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, à valeurs dans $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

Comme $0,97 \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,97$ admet une unique solution α sur $[0 ; +\infty[$.

Partie B — 4. À l'aide de la calculatrice, encadrer α par deux entiers consécutifs et interpréter.

À la calculatrice, $\alpha \approx 17,4$, donc $\alpha \in]17 ; 18[$.

Partie C — 1. Montrer que, pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f(x) = e^{0,2x} / (1 + e^{0,2x})$.

En multipliant numérateur et dénominateur de $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$ par $e^{0,2x}$: $f(x) = \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x} + 1}$.

Partie C — 2. En déduire une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.

En écrivant $f(t) = \frac{1}{0,2} \times \frac{0,2e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}} = 5 \times \frac{0,2e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}}$, on reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u(t) = 1 + e^{0,2t} > 0$), de primitive $\ln(u)$.

Une primitive de f est donc $F(t) = 5 \ln(1 + e^{0,2t})$.

Partie C — 3. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0 ; 40]$ (valeur exacte puis approchée au millième).

$$I = \frac{1}{40} \int_0^{40} f(t) dt = \frac{1}{40} [5 \ln(1 + e^{0,2t})]_0^{40} = \frac{5}{40} (\ln(e^8 + 1) - \ln(2)).$$

$$I = \frac{1}{8} \ln\left(\frac{e^8 + 1}{2}\right) \approx 0,913.$$

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 1)

Partie A — 1. On donne la courbe de f , avec la tangente T_A en $A(1 ; 2)$ passant par $C(3 ; 0)$. Déterminer $f'(1)$.

$f'(1)$ est le coefficient directeur de T_A : $\frac{0 - 2}{3 - 1} = -1$.

Partie A — 2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle sur $]0 ; 3]$?

$f'(x) = 0$ correspond aux points où la tangente est horizontale : d'après le graphique, cela se produit **2 fois** sur $]0 ; 3]$.

Partie A — 3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Sur $[0 ; 0,5]$, la courbe semble concave d'après le graphique, donc $f''(0,2) < 0$.

Partie B — 1. On admet que $f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$ sur $]0 ; +\infty[$. Résoudre $2X^2 - 3X + 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$, et en déduire que la courbe de f ne coupe pas l'axe des abscisses.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0$: l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$ n'a pas de solution réelle.

$f(x) = 0 \iff x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2] = 0$. Comme $x > 0$, cela équivaut à $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$, soit, en posant $X = \ln x$, à $2X^2 - 3X + 2 = 0$, qui n'a pas de solution.

L'équation $f(x) = 0$ n'a donc pas de solution : la courbe de f ne coupe pas l'axe des abscisses.

Partie B — 2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$ (on admet que la limite en 0 est 0).

$$f(x) = x(\ln x)^2 \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right) = 2.$$

$$\text{Par produit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Partie B — 3.a On admet que $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$. Montrer que $f''(x) = (1/x)(4\ln x + 1)$.

$$f''(x) = 2 \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(4 \ln x + 1).$$

Partie B — 3.b Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$ et préciser l'abscisse exacte du point d'inflexion.

Sur $]0; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $4 \ln x + 1$.

$$4 \ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{4} \iff x = e^{-\frac{1}{4}}; 4 \ln x + 1 > 0 \iff x > e^{-\frac{1}{4}}.$$

f est donc **concave** sur $\left] 0; e^{-\frac{1}{4}} \right]$ et **convexe** sur $\left[e^{-\frac{1}{4}}; +\infty \right[$, avec un point d'inflexion

d'abscisse exacte $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,779$.

Partie B — 3.c Montrer que la courbe de f est au-dessus de la tangente T_B sur $]1; +\infty[$.

Comme $e^{-\frac{1}{4}} < 1$, f est convexe sur $[1; +\infty[$: sur cet intervalle, la courbe est donc au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier T_B .

Partie C — 1. Justifier que la tangente T_B (au point d'abscisse e) a pour équation réduite $y = 2x - e$.

$$f'(e) = 2(\ln e)^2 + \ln e - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 \text{ et } f(e) = e(2 \times 1 - 3 + 2) = e \times 1 = e.$$

$$\text{La tangente en } e \text{ a pour équation } y = f'(e)(x - e) + f(e) = 2(x - e) + e = 2x - e.$$

Partie C — 2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale de $x \ln x$ entre 1 et e vaut $(e^2 + 1)/4$.

On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$ (donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$).

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\ln x \times \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Partie C — 3. On admet que l'intégrale de $x(\ln x)^2$ entre 1 et e vaut $(e^2 - 1)/4$. En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine entre la courbe de f , la tangente T_B et les droites $x=1$ et $x=e$.

Sur $[1 ; e]$, la courbe est au-dessus de T_B , donc $\mathcal{A} = \int_1^e [f(x) - (2x - e)] \, dx = \int_1^e [2x(\ln x)^2 - 3x \ln x + e] \, dx$.

Par linéarité : $\mathcal{A} = 2 \times \frac{e^2 - 1}{4} - 3 \times \frac{e^2 + 1}{4} + [ex]_1^e = \frac{-e^2 - 5}{4} + (e^2 - e)$.

$\mathcal{A} = \frac{3e^2 - 4e - 5}{4}$ unités d'aire (soit environ 1,57 u.a.).

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 2)

On définit la suite (u_n) par $u_n = (1 + 5^n)/(2 + 3^n)$. **Affirmation 1 :** la suite (u_n) converge vers $\frac{5}{3}$. Vraie ou fausse ?

En écrivant $u_n = \frac{\frac{1}{5^n} + 1}{\frac{2}{5^n} + (\frac{3}{5})^n}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{5^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{3}{5})^n = 0$ (car $0 < \frac{3}{5} < 1$).

Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur tend vers 0 (par valeurs positives) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

L'affirmation est fausse (la suite diverge, elle ne converge pas vers $\frac{5}{3}$).

On considère (w_n) définie par $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3$. **Affirmation 2 :** pour tout entier naturel n , $w_n \geq n$. Vraie ou fausse ?

Initialisation : $w_0 = 0 \geq 0$: vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que, pour un entier n , $w_n \geq n$. Alors $3w_n \geq 3n$, donc $3w_n - 2n \geq n$, soit $w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3 \geq n + 3 > n + 1$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n , $w_n \geq n$. **L'affirmation est vraie.**

On donne la courbe d'une fonction f sur $]0; +\infty[$, avec sa tangente T au point A d'abscisse 8. **Affirmation 3 : d'après le graphique, f est convexe sur son ensemble de définition. Vraie ou fausse ?**

Si f était convexe, sa courbe serait au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier au point A ; or le graphique montre le contraire (la courbe est en dessous de T au voisinage de A). **L'affirmation est fausse.**

Affirmation 4 : pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) - x + 1 \leq 0$. Vraie ou fausse ?

Soit $f(x) = \ln(x) - x + 1$ sur $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

$f'(x) = 0 \iff x = 1$; $f'(x) > 0$ pour $x < 1$ et $f'(x) < 0$ pour $x > 1$: f admet donc un maximum en $x = 1$, avec $f(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0$.

f est donc toujours inférieure ou égale à son maximum 0 : $f(x) \leq 0$ pour tout $x > 0$. **L'affirmation est vraie.**

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 2)

Partie A — 1. D'après le graphique (courbe de d , la distance parcourue par un chariot en zone de freinage), au bout de combien de temps le chariot a-t-il parcouru 15 m ?

Par lecture graphique, $d(2) \approx 15$: le chariot a parcouru 15 m au bout de **2 secondes**.

Partie A — 2. Quelle longueur minimale prévoir pour la zone de freinage ?

L'asymptote horizontale Δ de la courbe est proche de $y = 23$: une zone de **23 mètres** semble suffisante.

Partie A — 3. Que vaut $d'(4,7)$? Interpréter.

Le coefficient directeur de la tangente T (passant par $(0 ; 16,5)$ et $(4,7 ; 21)$) vaut $\frac{21 - 16,5}{4,7} \approx 0,96$: $d'(4,7) \approx 0,96$ m/s, c'est la vitesse instantanée du chariot à $t = 4,7$ s.

Partie B — 1.a On modélise la vitesse v , solution de (E) : $y' + 0,6y = e^{-0,6t}$, avec $v(0)=12$. Résoudre (E') : $y' + 0,6y = 0$.

Les solutions de (E') sont les fonctions $t \mapsto Ke^{-0,6t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Partie B — 1.b Soit $g(t) = te^{-0,6t}$. Vérifier que g est solution de (E).

$$g'(t) = e^{-0,6t} - 0,6te^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 0,6t).$$

$$g'(t) + 0,6g(t) = e^{-0,6t}(1 - 0,6t) + 0,6te^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 0,6t + 0,6t) = e^{-0,6t}.$$

g est bien solution de (E).

Partie B — 1.c En déduire les solutions de (E) sur $[0 ; +\infty[$.

Les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto e^{-0,6t}(t + K)$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Partie B — 1.d En déduire que $v(t) = (12 + t)e^{-0,6t}$.

v est de cette forme et vérifie $v(0) = 12 : e^0(0 + K) = 12 \iff K = 12$, donc $v(t) = (12 + t)e^{-0,6t}$.

Partie B — 2.a Montrer que $v'(t) = (-6,2 - 0,6t)e^{-0,6t}$.

v vérifie (E) : $v'(t) + 0,6v(t) = e^{-0,6t}$, donc $v'(t) = e^{-0,6t} - 0,6(12 + t)e^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 7,2 - 0,6t) = e^{-0,6t}(-6,2 - 0,6t)$.

Partie B — 2.b En admettant que $v(t) = 12e^{-0,6t} + t/e^{0,6t}$, déterminer la limite de v en $+\infty$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} 12e^{-0,6t} = 0$, et par croissances comparées $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{0,6t}} = 0$: par somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$ (le chariot finit par s'arrêter).

Partie B — 2.c Étudier le sens de variation de v sur $[0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

$e^{-0,6t} > 0$ pour tout t , donc $v'(t)$ est du signe de $-6,2 - 0,6t$, qui est strictement négatif pour tout $t \geq 0$.

v est donc strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$, de $v(0) = 12$ vers 0.

Partie B — 2.d Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une unique solution α , avec une valeur approchée au dixième.

v est continue (dérivable) et strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$, de 12 à 0 ; comme $1 \in]0 ; 12]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $v(t) = 1$ admet une unique solution α .

À la calculatrice : $v(4) \approx 1,5$, $v(5) \approx 0,85$ (donc $4 < \alpha < 5$) ; $v(4,6) \approx 1,05$, $v(4,7) \approx 0,995$: $\alpha \approx 4,7$.

Partie B — 3. Déterminer, en justifiant, au bout de combien de temps le système d'arrêt se déclenche (vitesse ≤ 1 m/s).

D'après la question précédente, $v(t) = 1$ pour $t = \alpha \approx 4,7$ s, et v étant décroissante, $v(t) \leq 1$ pour $t \geq \alpha$: le système se déclenche au bout d'environ 4,7 secondes.

Partie C — 1. On admet que $d(t) = \int_{12}^{12+x} v(x) dx$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $d(t) = e^{-0,6t}(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9}) + \frac{205}{9}$.

On pose $u(x) = 12 + x$ et $v'(x) = e^{-0,6x}$ (donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\frac{1}{0,6}e^{-0,6x}$).

$$d(t) = \left[-(12+x) \times \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} \right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} dx = \left[-(12+x) \times \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} - \frac{1}{0,36} e^{-0,6x} \right]_0^t.$$

En simplifiant ($\frac{1}{0,6} = \frac{5}{3}$ et $\frac{1}{0,36} = \frac{25}{9}$) : $d(t) = e^{-0,6t} \left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}$.

Partie C — 2. Déterminer, au centième près, la distance parcourue par le chariot avant le déclenchement du dispositif d'arrêt.

Le dispositif se déclenche à $t \approx 4,7$ s : $d(4,7) = e^{-0,6 \times 4,7} \left(-\frac{5}{3} \times 4,7 - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9} \approx \mathbf{20,95 \text{ m}}$.

Bac Terminale 2025 — Polynésie française (jour 2)

1. On considère $f(x) = x \ln(x-2)$ sur $]2; +\infty[$, dont la courbe est donnée. Conjecturer le sens de variation, les limites aux bornes et les asymptotes éventuelles.

D'après le graphique, f semble strictement croissante sur $]2; +\infty[$, avec $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ (asymptote verticale $x = 2$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2; +\infty[$.

$f(x) = 0 \iff x \ln(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou $\ln(x-2) = 0$. Comme $x > 2$, $x \neq 0$, donc $\ln(x-2) = 0 \iff x-2 = 1 \iff x = 3$.

L'équation a une unique solution : $x = 3$.

3. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 2 par valeurs supérieures. Ce résultat confirme-t-il une conjecture de la question 1 ?

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0^+$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) = -\infty$; et $\lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$.

Ce résultat confirme la conjecture de limite en 2 et l'asymptote verticale d'équation $x = 2$.

4. Démontrer que, pour tout x de $]2; +\infty[$, $f'(x) = \ln(x-2) + x/(x-2)$.

f est un produit de fonctions dérivables : $f'(x) = 1 \times \ln(x-2) + x \times \frac{1}{x-2} = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$.

5.a On pose $g(x) = f'(x)$. Démontrer que, pour tout x de $]2; +\infty[$, $g'(x) = (x-4)/(x-2)^2$.

$$g'(x) = f''(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1 \times (x-2) - x \times 1}{(x-2)^2} = \frac{x-2}{(x-2)^2} - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

5.b On admet que la limite de g en 2 (à droite) et en $+\infty$ vaut $+\infty$. En déduire le tableau de variation de g , avec la valeur exacte de son extremum.

$(x-2)^2 > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $x-4$: négatif sur $]2; 4[$, positif sur $]4; +\infty[$.

g est donc décroissante sur $]2; 4]$ puis croissante sur $[4; +\infty[$, avec un minimum $g(4) = \ln(2) + \frac{4}{2} = 2 + \ln(2)$.

5.c En déduire que, pour tout x de $]2; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Le minimum de g est $g(4) = 2 + \ln(2)$; comme $\ln(2) > 0$, $g(4) > 2 > 0$: $g(x) > 0$ pour tout x de $]2; +\infty[$.

5.d En déduire le sens de variation de f sur $]2; +\infty[$.

$g = f'$ est strictement positive sur $]2; +\infty[$: f est donc strictement croissante sur cet intervalle.

6. Étudier la convexité de f sur $]2; +\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion.

$f' = g$ est décroissante sur $]2; 4]$ (donc f concave) et croissante sur $[4; +\infty[$ (donc f convexe) : f change de convexité en $x = 4$.

$f(4) = 4 \ln(2) = \ln(16)$: le point d'inflexion a pour coordonnées $(4; \ln(16))$.

7. Combien de valeurs de x donnent une tangente à la courbe de f de coefficient directeur 3 ?

On cherche $f'(x) = 3$, soit $g(x) = 3$. Or $g(4) = 2 + \ln(2) \approx 2,7$.

Sur $]2; 4]$, g est continue et strictement décroissante de $+\infty$ à 2,7 : comme 3 est dans cet intervalle, il existe une unique solution α .

Sur $[4; +\infty[$, g est continue et strictement croissante de 2,7 à $+\infty$: il existe de même une unique solution β .

Il existe donc exactement deux valeurs de x pour lesquelles la tangente a un coefficient directeur égal à 3.

Bac Terminale 2025 — Polynésie française (jour 2)

On donne $E = 1, \dots, 7$ et $F = 0, \dots, 9$. Affirmation 1 : il y a plus de 3-uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F . Vraie ou fausse ?

Les 3-uplets d'éléments distincts de E (ordre compté, sans répétition) : $\frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

Les combinaisons à 4 éléments de F : $\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$.

Les deux quantités sont égales ($210 = 210$), pas l'une supérieure à l'autre : **l'affirmation est fausse**.

On représente la fonction carré f et un carré ABCD de côté 3. Affirmation 2 : la zone hachurée (sous la courbe de f entre 0 et 3) et le carré ABCD ont la même aire. Vraie ou fausse ?

L'aire du carré ABCD est $3^2 = 9$ unités d'aire.

L'aire sous la courbe (f positive) est $\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9$ unités d'aire.

Les deux aires sont égales : **l'affirmation est vraie**.

On considère J , l'intégrale de $x \ln(x)$ entre 1 et 2. Affirmation 3 : une intégration par parties donne $J = \frac{7}{11}$. Vraie ou fausse ?

On pose $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $v(x) = \ln(x)$ (donc $u'(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$).

$$J = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x dx = 2 \ln(2) - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 2 \ln(2) - \frac{3}{4} \approx 0,636.$$

Or $\frac{7}{11} \approx 0,6364$: $J \neq \frac{7}{11}$ (l'écart est réel bien que très faible). **L'affirmation est fausse**.

On considère (E) : $y' = 2y - e^x$. Affirmation 4 : $f(x) = e^x + e^{2x}$ est solution de (E). Vraie ou fausse ?

$$f'(x) = e^x + 2e^{2x}.$$

$$2f(x) - e^x = 2(e^x + e^{2x}) - e^x = e^x + 2e^{2x} = f'(x).$$

f vérifie bien (E) : **l'affirmation est vraie**.

Soit $x \in [0 ; 1[$. On pose $u_n = (x - 1)e^n + \cos(n)$. Affirmation 5 : la suite (u_n) diverge vers $-\infty$. Vraie ou fausse ?

$x \in [0 ; 1[$, donc $x - 1 \in [-1 ; 0[$ est strictement négatif.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty \text{ et } (x - 1) < 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (x - 1)e^n = -\infty, \text{ puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} [(x - 1)e^n + 1] = -\infty.$$

Comme $\cos(n) \leq 1$ pour tout $n : u_n \leq (x-1)e^n + 1$, donc par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
L'affirmation est vraie.

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. Une fonction f est représentée par une courbe $\mathcal{C}$ sur $[0 ; +\infty[$, avec une tangente T au point A d'abscisse $\frac{5}{2}$. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de f sur $[0 ; 5]$.

Par lecture graphique, f croît de $f(0) = -5,5$ jusqu'à un maximum d'environ 2,4 atteint en $x = 1,5$, puis décroît jusqu'à environ 0,35 en $x = 5$.

Partie A — 2. Que semble présenter la courbe $\mathcal{C}$ au point A ?

La courbe semble traverser sa tangente au point A : elle semble y admettre un **point d'inflexion**.

Partie A — 3. Deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentent f' et f'' . Associer chaque fonction à sa courbe, en justifiant.

f est croissante sur $[0 ; 1,5[$ puis décroissante : f' est positive puis négative, ce qui correspond à la courbe $\mathcal{C}_2$.

f est concave sur $[0 ; 2,5[$ puis convexe : f'' est négative puis positive, ce qui correspond à la courbe $\mathcal{C}_1$.

Partie A — 4. La courbe $\mathcal{C}_3$ peut-elle représenter une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$?

Une primitive F de f vérifie $F' = f$; comme f est négative sur $[0 ; 0,5[$ puis positive, F devrait être décroissante puis croissante. Or la courbe $\mathcal{C}_3$ fait exactement l'inverse : **elle ne peut pas représenter une primitive de f .**

Partie B — 1.a On considère désormais $f(x) = (4x - 2)e^{-x+1}$ sur $[0 ; +\infty[$. Montrer que $f'(x) = (-4x + 6)e^{-x+1}$.

$$f'(x) = 4e^{-x+1} + (4x - 2) \times (-e^{-x+1}) = (4 - 4x + 2)e^{-x+1} = (-4x + 6)e^{-x+1}.$$

Partie B — 1.b En déduire le tableau complet des variations de f sur $[0 ; +\infty[$ (on admet que la limite en $+\infty$ vaut 0).

$e^{-x+1} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-4x + 6$: positif pour $x < \frac{3}{2}$, négatif au-delà.

f croît de $f(0) = -2e \approx -5,44$ jusqu'à son maximum $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4e^{-\frac{1}{2}} \approx 2,43$, puis décroît vers 0 en $+\infty$ — en cohérence avec la lecture graphique de la partie A.

Partie B — 1.c Étudier la convexité de f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

$$f''(x) = -4e^{-x+1} + (-4x + 6) \times (-e^{-x+1}) = (4x - 10)e^{-x+1}, \text{ du signe de } 4x - 10.$$

f est donc **concave** sur $\left[0 ; \frac{5}{2}\right]$ **et convexe** sur $\left[\frac{5}{2} ; +\infty\right]$, avec un point d'inflexion à l'abscisse $\frac{5}{2}$ (le point A).

Partie B — 2.a Soit $F(x) = (ax + b)e^{-x+1}$. Déterminer a et b pour que F soit une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.

$$F'(x) = ae^{-x+1} - (ax + b)e^{-x+1} = (-ax + a - b)e^{-x+1}.$$

$F' = f$ impose, par identification (car $e^{-x+1} > 0$) : $-a = 4$ et $a - b = -2$, soit $a = -4$ et $b = -2$.

Partie B — 2.b En déduire la valeur exacte, puis approchée à 10^{-2} près, de $I = \int_{\frac{3}{2}}^8 f(x) dx$.

$$I = \left[(-4x - 2)e^{-x+1}\right]_{\frac{3}{2}}^8 = -34e^{-7} + 8e^{-\frac{1}{2}} \approx \mathbf{4,82}.$$

Partie B — 3.a Le profil d'une piste de trottinette est donné par la courbe de f sur $\left[\frac{3}{2} ; 8\right]$ (unité : le mètre). Donner, au cm près, la hauteur du point de départ D.

$$\text{La hauteur du départ vaut } f\left(\frac{3}{2}\right) = 4e^{-\frac{1}{2}} \approx \mathbf{2,43 \text{ m}}.$$

Partie B — 3.b Une artiste couvre 75 % du mur de profil ; une bombe de 150 mL couvre $0,8 \text{ m}^2$. Combien de bombes faut-il ?

L'aire du mur vaut $I \approx 4,82 \text{ m}^2$; 75 % de cette surface représente $0,75 \times 4,82 \approx 3,62 \text{ m}^2$.

$$\frac{3,62}{0,8} \approx 4,5 : \text{il faudra } \mathbf{5 \text{ bombes}} \text{ de peinture.}$$

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 2)

Partie A — 1. Soit $f(x) = x^2 - x \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

En 0 : $x^2 \rightarrow 0$ et, par croissances comparées, $x \ln(x) \rightarrow 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

En $+\infty$: $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$, avec $\frac{\ln(x)}{x} \rightarrow 0$: le facteur entre parenthèses tend vers 1, et $x^2 \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie A — 2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.

$$f'(x) = 2x - \ln(x) - x \times \frac{1}{x} = 2x - 1 - \ln(x).$$

Partie A — 3. Montrer que $f''(x) = \frac{2x-1}{x}$.

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}.$$

Partie A — 4. Étudier les variations de f' sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations (avec la valeur exacte de l'extremum).

Sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $2x - 1$: négatif sur $]0 ; \frac{1}{2}[$, positif au-delà.

f' décroît puis croît, avec un minimum en $x = \frac{1}{2}$: $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$.

Partie A — 5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Le minimum de f' vaut $\ln(2) > 0$: $f'(x) > 0$ sur tout l'intervalle, donc f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B — 1. Soit $g(x) = x - \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau des variations de g .

$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, du signe de $x - 1$: g décroît sur $]0 ; 1]$ puis croît sur $[1 ; +\infty[$, avec un minimum $g(1) = 1 - 0 = 1$.

Partie B — 2. Sachant que 1 est l'unique solution de $g(x) = 1$, résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0 ; +\infty[$.

$f(x) = x \iff x^2 - x \ln(x) - x = 0 \iff x(x - 1 - \ln(x)) = 0$; comme $x > 0$, cela équivaut à $x - \ln(x) = 1$, soit $g(x) = 1$.

L'unique solution est donc $x = 1$.

Partie C — 1. Soit (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence que, pour tout n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Initialisation : $u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,597$, donc $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$: vrai au rang 0.

Hérédité : si $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$, la stricte croissance de f donne $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(1) = 1$; comme $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,6 \geq \frac{1}{2}$, l'encadrement est vrai au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Partie C — 2. Justifier que la suite (u_n) converge.

(u_n) est croissante et majorée par 1 : **elle converge** vers une limite ℓ avec $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

Partie C — 3. Sachant que la limite vérifie $f(\ell) = \ell$, déterminer ℓ .

D'après la partie B, l'équation $f(x) = x$ a pour unique solution 1 sur $]0 ; +\infty[: \ell = 1$.

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 2)

Affirmation 1. Si, pour tout n , $\frac{1}{2} < u_n \leq \frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1}$, alors $\lim u_n = \frac{1}{2}$. Vraie ou fausse ?

En factorisant par n^2 : $\frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1} = \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}}{6 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(u_n) est encadrée par deux suites de limite $\frac{1}{2}$: par le théorème des gendarmes, $\lim u_n = \frac{1}{2}$. **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 2. La dérivée h' d'une fonction h est représentée graphiquement sur $[-4 ; 4]$.

La fonction h est convexe sur $[-1 ; 3]$. Vraie ou fausse ?

Sur $[-1 ; 3]$, la courbe de h' n'est pas croissante (elle monte puis redescend) : h n'est donc pas convexe sur tout cet intervalle. **L'affirmation est fausse.**

Affirmation 3. Un code est composé de 4 chiffres (répétitions permises) suivis de 2 lettres distinctes parmi A, B, C. Il existe 20 634 codes contenant au moins un 0. Vraie ou fausse ?

Nombre total de codes : $10^4 \times 3 \times 2 = 60\,000$. Codes sans aucun 0 : $9^4 \times 3 \times 2 = 39\,366$.

Codes avec au moins un 0 : $60\,000 - 39\,366 = 20\,634$. **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 4. La fonction $f(x) = x \ln(x)$ est solution sur $]0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle $xy' - y = x$. Vraie ou fausse ?

$f'(x) = \ln(x) + 1$, donc $xf'(x) - f(x) = x \ln(x) + x - x \ln(x) = x$: l'équation est bien vérifiée.

L'affirmation est vraie.

Bac Terminale 2024 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1.a Soit $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ sur $] -\infty ; 1[$. Déterminer la limite de f en 1.

$e^x \rightarrow e > 0$ et $x-1 \rightarrow 0^-$ (négatif sur l'intervalle) : par quotient, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

1.b En déduire une interprétation graphique.

La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

$e^x \rightarrow 0$ et $x - 1 \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; la droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

3.a Montrer que $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}.$$

3.b Dresser, en justifiant, le tableau de variations de f sur $] -\infty ; 1[$.

$e^x > 0$ et $(x-1)^2 > 0$: $f'(x)$ est du signe de $x-2$, strictement négatif sur $] -\infty ; 1[$. f est strictement décroissante, de 0 (limite en $-\infty$) vers $-\infty$ (limite en 1).

4.a On admet $f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}$. Étudier la convexité de f sur $] -\infty ; 1[$.

$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0$ pour tout réel x , et $e^x > 0$; sur $] -\infty ; 1[$, $(x-1)^3 < 0$.

$f''(x) < 0$ sur tout l'intervalle : f est concave sur $] -\infty ; 1[$.

4.b Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

$$f(0) = -1 \text{ et } f'(0) = \frac{-2 \times 1}{1} = -2 : T : y = -2x - 1.$$

4.c En déduire que, pour tout x de $] -\infty ; 1[$, $e^x \geqslant (-2x-1)(x-1)$.

f étant concave, sa courbe est sous ses tangentes : $f(x) \leqslant -2x - 1$, soit $\frac{e^x}{x-1} \leqslant -2x - 1$.

En multipliant par $x-1 < 0$ (le sens change) : $e^x \geqslant (-2x-1)(x-1)$.

5.a Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $] -\infty ; 1[$.

f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty ; 1[$, et -2 est compris entre $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_1 f = -\infty$: par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution α .

5.b À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

$f(0,31) \approx -1,98 > -2$ et $f(0,32) \approx -2,03 < -2$: $0,31 < \alpha < 0,32$.

Bac Terminale 2024 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A — 1. Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$ sur $[0 ; +\infty[$. Démontrer que f est croissante sur cet intervalle.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0 \text{ sur } [0 ; +\infty[: f \text{ est croissante.}$$

Partie A — 2. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}$.

$$\begin{aligned} \text{En multipliant par la quantité conjuguée : } \sqrt{x+1} - x &= \frac{(\sqrt{x+1} - x)(\sqrt{x+1} + x)}{\sqrt{x+1} + x} = \frac{(x+1) - x^2}{\sqrt{x+1} + x} = \\ &= \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}. \end{aligned}$$

Partie A — 3. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ sur $[0 ; +\infty[$.

Le dénominateur étant strictement positif, $f(x) = x \iff -x^2 + x + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 5$.

Les racines sont $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$: seule la première appartient à $[0 ; +\infty[$. $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or).

Partie B — 1. Soit (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer par récurrence que, pour tout n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation : $u_1 = \sqrt{6} \approx 2,45$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0 = 5$: vrai au rang 0.

Hérédité : si $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$, la croissance de f donne $f(1) = \sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$, et $\sqrt{2} \geq 1$: vrai au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Partie B — 2. En déduire que la suite (u_n) converge.

(u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge.

Partie B — 3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

f étant continue sur $[0 ; +\infty[$, la limite vérifie $f(\ell) = \ell$; d'après la partie A, l'unique solution de cette équation est $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$: c'est la limite de la suite.

Partie B — 4.a Un script Python 'seuil(n)' compte les itérations nécessaires pour que $|u_i - \ell| < 10^{-n}$. Donner la valeur renvoyée par seuil(2).

À la calculatrice, $|u_4 - \ell| \approx 0,02 \geq 10^{-2}$ et $|u_5 - \ell| \approx 0,007 < 10^{-2}$: la fonction renvoie 5.

Partie B — 4.b La valeur renvoyée par seuil(4) est 9. Interpréter.

u_9 est le premier terme de la suite qui approche le nombre d'or ℓ à moins de 10^{-4} près : **il faut 9 itérations pour obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.**

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 1)

Partie A — 1.a Soit $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

En 0 : $x - 2 \rightarrow -2$ et $\ln(x) \rightarrow -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. En $+\infty$: les deux termes tendent vers $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie A — 1.b Montrer que $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{2x+1}{2x}.$$

Partie A — 1.c Étudier le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.

Pour $x > 0$, numérateur et dénominateur de $f'(x)$ sont strictement positifs : $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Partie A — 1.d Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$.

$$f''(x) = -\frac{1}{2x^2} < 0 : f \text{ est concave sur }]0 ; +\infty[.$$

Partie A — 2.a Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α , appartenant à $[1 ; 2]$.

f est continue et strictement croissante, de $-\infty$ à $+\infty$: par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution α .

$$f(1) = -1 < 0 \text{ et } f(2) = \frac{\ln 2}{2} > 0 : \text{donc } \alpha \in [1 ; 2].$$

Partie A — 2.b Déterminer le signe de $f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

f étant strictement croissante et s'annulant en α : $f(x) < 0$ sur $]0 ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, et $f(x) > 0$ sur $]\alpha ; +\infty[$.

Partie A — 2.c Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha - 2 + \frac{1}{2} \ln(\alpha) = 0 \iff \frac{1}{2} \ln(\alpha) = 2 - \alpha \iff \ln(\alpha) = 2(2 - \alpha).$$

Partie B — 1. Soit $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln(x)$ **sur** $]0 ; 1]$. **Calculer** $g'(x)$ **et vérifier que** $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$g'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}(2x \ln(x) + x) = 1 - 2x - \frac{x \ln(x)}{2}.$$

$$\text{En factorisant par } x : g'(x) = x \left(\frac{1}{x} - 2 - \frac{\ln(x)}{2} \right) = x \left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{x}\right) \right) = xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

Partie B — 2.a Justifier que, pour $x \in \left]0 ; \frac{1}{\alpha}\right]$, $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

Si $0 < x < \frac{1}{\alpha}$, alors $\frac{1}{x} > \alpha$, et f est strictement positive sur $]\alpha ; +\infty[$: donc $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

Partie B — 2.b En déduire le tableau de variations de g **sur** $]0 ; 1]$.

$g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ est du signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ (car $x > 0$) : g est **croissante sur** $\left]0 ; \frac{1}{\alpha}\right]$ **puis décroissante sur** $\left[\frac{1}{\alpha} ; 1\right]$, avec un maximum en $\frac{1}{\alpha}$.

Partie C — 1.a Justifier la position relative de $\mathcal{C}_g$ **et de la parabole** $\mathcal{P}$ **d'équation** $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ **sur** $]0 ; 1]$.

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2 \ln(x) \geq 0 \text{ sur }]0 ; 1] \text{ (car } \ln(x) \leq 0) : \mathcal{C}_g \text{ est au-dessus de } \mathcal{P}.$$

Partie C — 1.b Démontrer que $\int_{1/\alpha}^1 x^2 \ln(x) dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$.

$$\begin{aligned} \text{Par intégration par parties avec } u(x) = \ln(x) \text{ et } v'(x) = x^2 : \int_{1/\alpha}^1 x^2 \ln(x) dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} \right]_{1/\alpha}^1 = \\ &= -\frac{1}{9} - \frac{1}{3\alpha^3} \left(-\ln(\alpha) - \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

$$\text{En remplaçant } \ln(\alpha) \text{ par } 2(2 - \alpha) : = -\frac{1}{9} + \frac{4}{3\alpha^3} - \frac{2}{3\alpha^2} + \frac{1}{9\alpha^3} = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}.$$

Partie C — 2. En déduire l'expression, en fonction de α , **de l'aire** $\mathcal{A}$ **du domaine compris entre** $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{P}$, **et les droites** $x = \frac{1}{\alpha}$ **et** $x = 1$.

$$\mathcal{A} = \int_{1/\alpha}^1 \left(-\frac{1}{4}x^2 \ln(x) \right) dx = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3} \approx 0,07 \text{ unité d'aire.}$$

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 2)

Partie A — 1. La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par $B(-1; -2)$, où sa tangente T passe aussi par $A(0; -1)$. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.

$$f(-1) = -2 \text{ (ordonnée de B), et } f'(-1) \text{ est le coefficient directeur de } T = (AB) : \frac{-1 - (-2)}{0 - (-1)} = 1.$$

Partie A — 2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ?

Non : la courbe passe **en dessous** de sa tangente T pour les abscisses proches de -2 , ce qui est impossible pour une fonction convexe. Elle semble concave puis convexe, avec un point d'inflexion vers $x \approx -1,4$.

Partie A — 3. Conjecturer le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près.

La courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'une seule fois, vers $x \approx 0,1$.

Partie B — 1. On considère $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$ sur $] -2 ; +\infty[$. Déterminer la limite de f en -2 et interpréter.

$x^2 + 2x - 1 \rightarrow -1$ et $\ln(x + 2) \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$. La droite $x = -2$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

Partie B — 2. Montrer que, pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.

$$f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x + 2} = \frac{(2x + 2)(x + 2) + 1}{x + 2} = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}.$$

Partie B — 3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations complet.

Le numérateur $2x^2 + 6x + 5$ a pour discriminant $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$: il est strictement positif pour tout x ; le dénominateur $x + 2$ est positif sur l'intervalle.

$f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $] -2 ; +\infty[$, de $-\infty$ à $+\infty$.

Partie B — 4. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α , et donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

f est continue, strictement croissante, de $-\infty$ à $+\infty$: par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution α . Par balayage : $\alpha \approx 0,12$.

Partie B — 5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $] -2 ; +\infty[$.

$f(x) < 0$ sur $] -2 ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, et $f(x) > 0$ sur $] \alpha ; +\infty[$.

Partie B — 6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

$$f''(x) = \frac{(4x+6)(x+2) - (2x^2+6x+5)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}, \text{ du signe du numérateur.}$$

Le trinôme $2x^2+8x+7$ a pour discriminant $\Delta = 64 - 56 = 8 > 0$, avec pour racines $-2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; seule $-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ appartient à l'intervalle.

f'' s'y annule en changeant de signe : l'unique point d'inflexion a pour abscisse $-2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -1,29$.

Partie C — 1. Soit $g(x) = \ln(x+2)$, $J(0; 1)$ et M le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x . Justifier que $h(x) = JM^2 = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.

$$JM^2 = (x-0)^2 + (g(x)-1)^2 = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2 \text{ (repère orthonormé).}$$

Partie C — 2.a On admet $h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$. Dresser le tableau de variations de h .

$\frac{2}{x+2} > 0$ sur l'intervalle : $h'(x)$ est du signe de $f(x)$. h décroît sur $] -2 ; \alpha]$ puis croît sur $[\alpha ; +\infty[$, avec un minimum en α .

Partie C — 2.b En déduire que la distance JM est minimale pour $x = \alpha$.

La distance JM est minimale lorsque son carré $h(x)$ est minimal (croissance de la racine carrée), c'est-à-dire pour $x = \alpha$.

Partie C — 3.a Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha+2) = 0 \iff \ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2.$$

Partie C — 3.b En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_g$ en M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

La tangente a pour coefficient directeur $g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha+2}$; la droite (JM_α) a pour coefficient directeur $\frac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha} = \frac{-2\alpha - \alpha^2}{\alpha} = -2 - \alpha$.

Le produit vaut $\frac{1}{\alpha+2} \times (-2 - \alpha) = -1$: les deux droites sont perpendiculaires.

Bac Terminale 2024 — Polynésie française (jour 2)

QCM — 1. Quelle est la fonction f , solution de $y' = -3y + 7$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$? A. $f(x) = e^{-3x}$ B. $f(x) = -\frac{4}{3}e^{-3x} + \frac{7}{3}$ C. $f(x) = e^{-3x} + \frac{7}{3}$ D. $f(x) = -\frac{10}{3}e^{-3x} - \frac{7}{3}$

Les solutions de $y' = -3y$ sont les fonctions $x \mapsto Ke^{-3x}$ ($K \in \mathbb{R}$) ; une solution constante α de $y' = -3y + 7$ vérifie $0 = -3\alpha + 7$, soit $\alpha = \frac{7}{3}$.

Les solutions de $y' = -3y + 7$ sont donc $x \mapsto Ke^{-3x} + \frac{7}{3}$. La condition $f(0) = 1$ donne $K + \frac{7}{3} = 1 \iff K = -\frac{4}{3}$: **réponse B.**

QCM — 2. La courbe d'une fonction f positive sur $[0 ; +\infty[$ est donnée dans le sujet, quadrillée en carreaux d'aire 1. Un encadrement de $I = \int_1^5 f(x) dx$ est proposé parmi : A. $0 \leq I \leq 4$ B. $1 \leq I \leq 5$ C. $5 \leq I \leq 10$ D. $10 \leq I \leq 15$.

La courbe étant positive sur $[1 ; 5]$, I est l'aire sous la courbe entre les droites $x = 1$ et $x = 5$; en comptant les carreaux du quadrillage, cette aire est comprise entre 5 et 10 unités d'aire : **réponse C.**

QCM — 3. Soit $g(x) = x^2 \ln(x^2 + 4)$ définie sur $\mathbb{R}$. Que vaut $\int_0^2 g'(x) dx$ à 10^{-1} près ? A. 4,9 B. 8,3 C. 1,7 D. 7,5

g est une primitive de g' , donc $\int_0^2 g'(x) dx = g(2) - g(0) = 4 \ln(8) - 0 = 4 \ln(8)$.

$4 \ln(8) = 4 \ln(2^3) = 12 \ln(2) \approx 8,3$: **réponse B.**

QCM — 4. Une professeure veut former un groupe de 5 élèves parmi 31. Combien de groupes différents peut-elle former ? A. 31^5 B. $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$ C. $31 + 30 + 29 + 28 + 27$ D. $\binom{31}{5}$

Un groupe est un choix de 5 élèves parmi 31 sans ordre ni répétition : le nombre de possibilités est $\binom{31}{5}$: **réponse D.**

QCM — 5. Parmi ces 31 élèves : 10 font physique-chimie, 20 font SES, 1 fait LLCE espagnol. Combien de groupes de 5 élèves comportant exactement 3 élèves de SES peut-on former ? A. $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$ B. $\binom{20}{3} + \binom{11}{2}$ C. $\binom{20}{3}$ D. $20^3 \times 11^2$

Il faut choisir 3 élèves parmi les 20 faisant SES, soit $\binom{20}{3}$ façons, puis 2 élèves parmi les $31 - 20 = 11$ élèves ne faisant pas SES, soit $\binom{11}{2}$ façons ; les deux choix étant indépendants, le nombre total de

groupes est $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$: réponse A.

Bac Terminale 2024 — Polynésie française (jour 2)

1.a La suite (u_n) est définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$. Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2 .

$$u_1 = 8 - \ln\left(\frac{8}{4}\right) = 8 - \ln(2) \approx \mathbf{7,31}.$$

$$u_2 = u_1 - \ln\left(\frac{u_1}{4}\right) \approx 7,3069 - \ln(1,8267) \approx \mathbf{6,70}.$$

1.b Une fonction Python ‘mystere(k)’ initialise ‘u = 8’ et ‘S = 0’, puis répète ‘k’ fois ‘S = S + u’ suivi de ‘u = u - log(u/4)’, avant de renvoyer ‘S’. L’appel ‘mystere(10)’ renvoie 58,440... Que représente ce résultat ?

À chaque tour de boucle, ‘S’ accumule la valeur courante de ‘u’ avant sa mise à jour : après 10 tours, ‘S’ contient donc $u_0 + u_1 + \dots + u_9$, c’est-à-dire **la somme des dix premiers termes de la suite (u_n) , de u_0 à u_9 .**

1.c Modifier la fonction pour qu’elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite.

- def mystere(k) :
- u = 8
- S = 0
- for i in range(k) :
- S = S + u
- u = u - log(u / 4)
- return S / k

2. Soit $f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$ définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Étudier les variations de f et préciser la valeur exacte de son minimum.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x-1$: $f'(x) < 0$ sur $]0 ; 1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$.

f est donc strictement décroissante sur $]0 ; 1]$ puis strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$, avec un minimum en $x = 1$ valant $f(1) = 1 - \ln\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \ln(4)$.

3.a On admet que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n . Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation : $u_0 = 8$ et $u_1 \approx 7,31$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour un certain n . Comme f est croissante sur $[1 ; +\infty[$, on a $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, soit $f(1) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Or $f(1) = 1 + \ln(4) \approx 2,39 \geq 1$, donc $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

3.b En déduire que (u_n) converge, et noter ℓ sa limite.

L'encadrement précédent montre que (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leq u_n$) et minorée par 1 : elle converge donc vers une limite réelle $\ell \geq 1$.

3.c Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0 ; +\infty[$.

$f(x) = x \iff x - \ln\left(\frac{x}{4}\right) = x \iff \ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \iff \frac{x}{4} = 1 \iff x = 4$: l'unique solution est 4.

3.d En déduire la valeur de ℓ .

f est continue sur $]0 ; +\infty[$ (car dérivable) ; en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. D'après la question précédente, la seule solution possible est $\ell = 4$: $\ell = 4$.

Bac Terminale 2023 — Amérique du Nord (jour 1)

Partie A — On étudie la fonction auxiliaire g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$. 1.a Déterminer la limite de g en $-\infty$.

Par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 3) = +\infty$; par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.

Partie A — 1.b Déterminer la limite de g en $+\infty$.

La forme est indéterminée : on factorise, pour $x \neq 0$, $g(x) = 2x \left(3 \times \frac{e^{2x}}{2x} - 1 - \frac{3}{2x} \right)$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$, donc le facteur entre parenthèses tend vers $+\infty$, tout comme $2x$.

Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Partie A — 2.a g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée g' . Montrer que $g'(x) = 6e^{2x} - 2$.

Pour tout réel x : $g'(x) = 3 \times 2e^{2x} - 2 = 6e^{2x} - 2$.

Partie A — 2.b Étudier le signe de g' sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) > 0 \iff 6e^{2x} > 2 \iff e^{2x} > \frac{1}{3} \iff 2x > \ln\left(\frac{1}{3}\right) \iff x > -\frac{1}{2}\ln(3)$ (la fonction $\ln$ étant strictement croissante).

Donc g' est strictement négative sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\ln(3)\right[$, nulle en $-\frac{1}{2}\ln(3)$, et strictement positive sur $\left]-\frac{1}{2}\ln(3) ; +\infty\right[$.

Partie A — 2.c En déduire le tableau de variations de g et vérifier que son minimum vaut $\ln(3) - 2$.

D'après le signe de g' , g est strictement décroissante sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\ln(3)\right[$ puis strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2}\ln(3) ; +\infty\right[$: elle admet donc un minimum en $x = -\frac{1}{2}\ln(3)$.

$$g\left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right) = 3e^{-\ln(3)} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right) - 3 = 3 \times \frac{1}{3} + \ln(3) - 3 = \ln(3) - 2.$$

On retrouve bien le minimum annoncé, $\ln(3) - 2 \approx -0,90$, avec g tendant vers $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Partie A — 3.a Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.

$$g(0) = 3e^0 - 2 \times 0 - 3 = 3 - 3 = 0, \text{ donc } x = 0 \text{ est bien solution de } g(x) = 0.$$

Partie A — 3.b Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution α , non nulle, et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} .

Sur $\left]-\frac{1}{2}\ln(3) ; +\infty\right[$, g est strictement croissante et s'annule en 0 : c'est donc l'unique solution de $g(x) = 0$ sur cet intervalle.

Sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\ln(3)\right[$, g est continue (car dérivable) et strictement décroissante, avec $\lim_{-\infty} g = +\infty$ et $g\left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \ln(3) - 2 < 0$: 0 est une valeur intermédiaire, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

L'équation $g(x) = 0$ admet donc exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$: 0 et α .

Un balayage à la calculatrice donne $g(-1,5) \approx 0,149 > 0$ et $g(-1,4) \approx -0,018 < 0$, d'où l'encadrement $-1,5 < \alpha < -1,4$.

Partie A — 4. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

D'après les variations de g et la question précédente, g est strictement positive sur $\left]-\infty ; \alpha\right[$ et sur $]0 ; +\infty[$, et strictement négative sur $] \alpha ; 0[$.

Partie B — On étudie désormais $f(x) = e^{3x} - (2x + 1)e^x$, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f' . 1. Montrer que $f'(x) = e^x g(x)$.

Pour tout réel x : $f'(x) = 3e^{3x} - 2e^x - (2x + 1)e^x = e^x (3e^{2x} - 2 - (2x + 1)) = e^x (3e^{2x} - 2x - 3) = e^x g(x)$.

Partie B — 2. En déduire le signe de f' puis les variations de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$.

D'après la question A.4, f est donc strictement croissante sur $] -\infty ; \alpha[$ et sur $]0 ; +\infty[$, et strictement décroissante sur $[\alpha ; 0]$.

Partie B — 3. Expliquer pourquoi f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

Si f était convexe sur $\mathbb{R}$, sa dérivée f' serait croissante sur $\mathbb{R}$. Or f' est positive sur $] -\infty ; \alpha[$ puis négative sur $] \alpha ; 0[$: par exemple $f'(-2) > 0$ alors que $f'(-1) < 0$, donc f' n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction f n'est donc pas convexe sur $\mathbb{R}$.

Bac Terminale 2023 — Amérique du Nord (jour 1)

Partie A — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{11}{u_n} \right)$ (on admet qu'elle est bien définie). 1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.

$$u_1 = \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{11}{u_0} \right) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{11}{5} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{36}{5} = \frac{18}{5}.$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(u_1 + \frac{11}{u_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{18}{5} + \frac{55}{18} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{324 + 275}{90} = \frac{599}{180}.$$

Partie A — 2. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{11}{x} \right)$. Démontrer que f est croissante sur $[\sqrt{11} ; +\infty[$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme fraction rationnelle, et pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{11}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 11}{2x^2}$.

Pour $x \geq \sqrt{11}$, on a $x^2 \geq 11$ (la fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}^+$), donc $x^2 - 11 \geq 0$, et comme $2x^2 > 0$, on obtient $f'(x) \geq 0$.

f est donc croissante sur $[\sqrt{11} ; +\infty[$.

Partie A — 3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$.

On remarque d'abord que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n , et que $f(\sqrt{11}) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{11} + \frac{11}{\sqrt{11}} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{11} + \sqrt{11}) = \sqrt{11}$.

Initialisation : $u_0 = 5$ et $u_1 = \frac{18}{5} = 3,6$, avec $\sqrt{11} \approx 3,317$, donc $u_0 \geq u_1 \geq \sqrt{11}$: l'inégalité est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que, pour un entier n fixé, $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$. Comme f est croissante sur $[\sqrt{11}; +\infty[$, on en déduit $f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \geq f(\sqrt{11})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq \sqrt{11}$: la propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$.

Partie A — 4. En déduire que (u_n) converge, et noter a sa limite.

D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{11}$: d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite réelle a telle que $a \geq \sqrt{11}$.

Partie A — 5. En posant une équation dont a est solution, donner la valeur exacte de a .

La suite (u_n) converge vers a et vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue sur $\mathbb{R}^{*+}$: d'après le théorème du point fixe, a est solution de l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

$$f(x) = x \iff \frac{1}{2} \left(x + \frac{11}{x} \right) = x \iff x + \frac{11}{x} = 2x \iff \frac{11}{x} = x \iff x^2 = 11 \iff x = \sqrt{11} \quad (\text{car } x > 0).$$

Cette équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{*+}$, donc, la suite étant minorée par $\sqrt{11} > 0$, on conclut $a = \sqrt{11}$.

Partie B — Pour tout entier naturel n , un rectangle R_n d'aire 11 a pour largeur ℓ_n et longueur L_n , avec $L_0 = 5$ et $L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$. 1.a Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2,2$.

L'aire de R_0 vaut 11 et sa longueur $L_0 = 5$, donc sa largeur vérifie $L_0 \times \ell_0 = 11$, d'où $\ell_0 = \frac{11}{5} = 2,2$.

Partie B — 1.b Établir que, pour tout entier naturel n , $\ell_n = \frac{11}{L_n}$.

Pour tout entier naturel n , le rectangle R_n a pour aire 11 et pour longueur L_n , donc sa largeur vérifie $L_n \times \ell_n = 11$, d'où $\ell_n = \frac{11}{L_n}$.

Partie B — 2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la partie A.

En remplaçant ℓ_n par $\frac{11}{L_n}$ dans la relation de récurrence : $L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2} = \frac{1}{2} \left(L_n + \frac{11}{L_n} \right)$, qui est exactement la relation vérifiée par (u_n) . Comme de plus $L_0 = u_0 = 5$, les deux suites sont identiques.

Partie B — 3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $\ell_n \leq \sqrt{11} \leq L_n$.

D'après la partie A, (u_n) , donc (L_n) , est minorée par $\sqrt{11}$, ce qui donne $\sqrt{11} \leq L_n$.

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, $\sqrt{11} \leq L_n \implies \frac{1}{\sqrt{11}} \geq \frac{1}{L_n} \implies \frac{11}{\sqrt{11}} \geq \frac{11}{L_n}$, soit $\sqrt{11} \geq \ell_n$.

En combinant les deux inégalités, on obtient bien $\ell_n \leq \sqrt{11} \leq L_n$.

Partie B — 4. On admet que (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Géométriquement, les dimensions du rectangle R_n se rapprochent de plus en plus l'une de l'autre et tendent toutes deux vers $\sqrt{11}$: le rectangle R_n tend donc à devenir un carré de côté $\sqrt{11}$.

Partie B — 5.a Un script Python, nommé heron, initialise $L = 5$ et $\ell = 2,2$, puis répète n fois les instructions $L \leftarrow \frac{L + \ell}{2}$ et $\ell \leftarrow \frac{11}{L}$, avant de renvoyer les deux valeurs arrondies au millionième. Que renvoie l'appel 'heron(3)' ?

- L'appel 'heron(3)' renvoie ℓ_3 et L_3 , arrondis au millionième.
- On obtient les valeurs **0,316606 + 3** (soit $\ell_3 \approx 3,316606$) et $L_3 \approx \mathbf{3,316643}$.

Partie B — 5.b Donner une interprétation de ces deux valeurs.

Ces deux valeurs encadrent $\sqrt{11}$: on a $3,316606 \leq \sqrt{11} \leq 3,316643$, soit un encadrement d'amplitude inférieure à 4×10^{-5} , obtenu avec seulement trois itérations de l'algorithme.

Bac Terminale 2023 — Asie (jour 2)**Partie A — 1. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.**

Quand $x \rightarrow -\infty$, $2x \rightarrow -\infty$ donc $e^{2x} \rightarrow 0$, et $e^x \rightarrow 0$; par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 - 0 + 1 = 1$.

Partie A — 2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

On factorise par le terme dominant : $g(x) = e^x (e^x - 1 + e^{-x})$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow 0$, donc par somme $e^x - 1 + e^{-x} \rightarrow +\infty$; par produit de limites infinies, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Partie A — 3. Montrer que $g'(x) = e^x(2e^x - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et $g'(x) = 2e^{2x} - e^x = e^x(2e^x - 1)$.

Partie A — 4. Étudier le signe de g' et en déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ (avec les limites et l'extremum exact).

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , le signe de $g'(x)$ est celui de $2e^x - 1$.

$2e^x - 1 = 0 \iff e^x = \frac{1}{2} \iff x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$; de plus $2e^x - 1 > 0 \iff x > -\ln 2$, et $2e^x - 1 < 0 \iff x < -\ln 2$.

La fonction g est donc décroissante sur $] -\infty ; -\ln 2]$ et croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$, avec un minimum en $x = -\ln 2$.

$$g(-\ln 2) = e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} + 1 = \frac{1}{e^{2\ln 2}} - \frac{1}{e^{\ln 2}} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}.$$

Tableau de variations : g vaut 1 en $-\infty$ (limite), décroît jusqu'au minimum $\frac{3}{4}$ en $x = -\ln 2$, puis croît vers $+\infty$.

Partie A — 5. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ vaut $\frac{3}{4}$, qui est strictement positif. Donc, la réponse est : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

Partie A — 6. Sans mener les calculs, expliquer comment retrouver ce résultat en posant $X = e^x$.

En posant $X = e^x$ (avec $X > 0$), on a $g(x) = X^2 - X + 1$, un trinôme du second degré en X .

Sa forme canonique est $\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$: c'est une somme d'un carré (toujours positif ou nul) et d'une constante strictement positive $\frac{3}{4}$, donc ce trinôme est strictement positif pour tout X , ce qui redonne $g(x) > 0$.

Partie B — 1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$. Justifier qu'elle est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(g(x))$ avec $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$. Or on a montré que $g(x) > 0$ pour tout réel x : le logarithme népérien est donc bien défini, et f est définie sur $\mathbb{R}$.

Partie B — 2. Justifier que $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comme $f = \ln \circ g$ avec g dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, par dérivation d'une composée avec le logarithme, $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$.

Partie B — 3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

$$f(0) = \ln(1 - 1 + 1) = \ln(1) = 0.$$

$$f'(0) = \frac{2 \times 1 - 1}{1 - 1 + 1} = \frac{1}{1} = 1.$$

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$. Donc, la réponse est $y = x$.

Partie B — 4. Montrer que f est strictement croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$.

Puisque $g(x) > 0$ pour tout x , le signe de $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ est celui de $g'(x)$.

D'après la partie A, $g'(x) > 0$ sur $] -\ln 2 ; +\infty[$, donc $f'(x) > 0$ sur cet intervalle. Donc, la réponse est : f est strictement croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$.

Partie B — 5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-\ln 2 ; +\infty[$, et donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

$$f(-\ln 2) = \ln(g(-\ln 2)) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0,29, \text{ donc } f(-\ln 2) < 2.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, par composition avec le logarithme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$, avec $f(-\ln 2) < 2 < \lim_{+\infty} f$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

À la calculatrice : $f(1,12) \approx 1,99 < 2$ et $f(1,13) \approx 2,01 > 2$. Donc, la réponse est $\alpha \approx 1,12$ (à 10^{-2} près).

Partie C. Au vu des résultats précédents, les trois conjectures de l'élève (l'équation $f(x) = 2$ semble avoir une solution ; f semble croissante sur $[-0,5 ; +\infty[$; la tangente en 0 semble être $y = 1,5x$) sont-elles vraies ou fausses ?

Conjecture 1 (existence d'une solution à $f(x) = 2$) : vraie, confirmée par la question précédente.

Conjecture 2 (croissance sur $[-0,5 ; +\infty[$) : fausse : on a montré que f est croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$, avec $-\ln 2 \approx -0,69 \neq -0,5$.

Conjecture 3 (tangente $y = 1,5x$) : fausse : on a établi que l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = x$.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}$. Quel est son comportement : diverge vers $+\infty$, converge vers $\frac{2}{5}$, converge vers 0, ou converge vers $\frac{1}{3}$?

$$\text{En factorisant numérateur et dénominateur par } 5^n : u_n = \frac{5^n \left(\frac{1}{5^n} + \left(\frac{2}{5} \right)^n \right)}{5^n \left(\frac{3}{5^n} + 1 \right)} = \frac{\left(\frac{2}{5} \right)^n + \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{3}{5^n}}.$$

Les suites géométriques de raisons $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{5}$, toutes deux strictement comprises entre -1 et 1 , convergent vers 0 : par limite de somme puis de quotient, u_n converge vers $\frac{0+0}{1+0} = 0$.

Réponse : la suite converge vers 0.

2. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$. Quelle est l'expression de $f'(x)$?

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$f'(x) = 2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x = x(2 \ln(x) + 1).$$

Réponse : $f'(x) = x(2 \ln(x) + 1)$.

3. Une fonction h , continue sur $\mathbb{R}$, admet le tableau de variations suivant : h décroît de $+\infty$ (en $-\infty$) jusqu'à $-\infty$... en réalité h croît de $-\infty$ vers $+\infty$, en s'annulant en $x = 1$. On note H la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Que peut-on affirmer : H positive sur $] -\infty ; 0]$, H croissante sur $] -\infty ; 1]$, H négative sur $] -\infty ; 1]$, ou H croissante sur $\mathbb{R}$?

h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 1, donc $h(x) < 0$ pour tout $x < 1$.

H étant une primitive de h , on a $H' = h$: ainsi $H'(x) < 0$ sur $] -\infty ; 1[$, donc H est strictement décroissante sur cet intervalle.

Pour tout $x \leq 0$, x et 0 appartiennent à $] -\infty ; 1[$ où H décroît, donc $x \leq 0 \implies H(x) \geq H(0)$.

Or $H(0) = 0$ par définition de H , donc $H(x) \geq 0$ sur $] -\infty ; 0]$.

Réponse : H est positive sur $] -\infty ; 0]$.

4. Soit $a < b$ deux réels et f une fonction définie, continue et strictement croissante sur $[a ; b]$, qui s'annule en un réel α . Parmi quatre fonctions Python proposées (méthode de dichotomie), laquelle donne bien une valeur approchée de α à 0,001 près ?

Le programme correct doit recalculer le milieu $m = \frac{a+b}{2}$ à chaque tour de boucle (et non une seule fois avant la boucle), avec un test d'arrêt `\og tant que l'écart dépasse 0,001 \fg` correctement écrit.

Comme f est strictement croissante sur $[a ; b]$ et s'annule en α , on a $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Si

$f(m) < 0$, alors α se trouve entre m et b : il faut donc remplacer a par m (et garder b) pour l'itération suivante ; sinon, on remplace b par m .

Seule la version qui recalcule m à l'intérieur de la boucle, avec la condition 'while abs(b-a) >= 0.001', et l'affectation 'a = m' quand $f(m) < 0$, respecte ce principe.

Réponse : le programme qui recalcule m dans la boucle et affecte $a = m$ lorsque $f(m) < 0$.

5. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont 7 bleues et 3 vertes. On effectue trois tirages successifs avec remise. Quelle expression donne la probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes ?

Chaque tirage est une épreuve à deux issues (\og verte \fg ou pas), de probabilité de succès $p = \frac{3}{10}$, répétée $n = 3$ fois de façon identique et indépendante (tirages avec remise).

En notant X le nombre de boules vertes obtenues, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3 ; \frac{3}{10}\right)$.

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^1 = \binom{3}{2} \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{3}{10}\right)^2.$$

Réponse : $\binom{3}{2} \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{3}{10}\right)^2$.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

Un biologiste modélise l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'individus) par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = e^3 - e^{-0,5t^2+t+2}$, où t désigne le temps en heures. **Affirmation 1 :** « La population de bactéries augmente en permanence ». Vrai ou faux ?

f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables. En posant $g(t) = -0,5t^2+t+2$, donc $g'(t) = -t + 1$, on obtient $f'(t) = -g'(t) e^{g(t)} = (t - 1) e^{-0,5t^2+t+2}$.

L'exponentielle étant strictement positive, $f'(t)$ est du signe de $(t - 1)$: $f'(t) < 0$ sur $[0 ; 1[$ et $f'(t) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0 ; 1]$.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** : durant la première heure, la population diminue strictement.

Affirmation 2 : « À très long terme, la population dépassera 21 000 bactéries ». Vrai ou faux ?

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,5t^2+t+2} > 0$, donc $-e^{-0,5t^2+t+2} < 0$, d'où $f(t) = e^3 - e^{-0,5t^2+t+2} < e^3$.

Or $e^3 \approx 20,086$ (au millième près), donc $f(t)$ reste toujours strictement inférieur à environ 20,086 milliers d'individus, soit 20 086 bactéries.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** : la population ne dépassera jamais 20 086 bactéries, donc a fortiori jamais 21 000.

Affirmation 3 : « La population de bactéries atteindra un effectif de 10 000 individus à deux reprises au cours du temps ». Vrai ou faux ?

Un effectif de 10 000 bactéries correspond à $f(t) = 10$ (population exprimée en milliers). D'après l'étude de variations précédente, f est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$ puis strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

On calcule les valeurs utiles : $f(0) = e^3 - e^2 \approx 12,696$ et $f(1) = e^3 - e^{2,5} \approx 7,903$. De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,5t^2 + t + 2) = -\infty$ (le terme en t^2 l'emporte), donc par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,5t^2 + t + 2} = 0$, puis $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = e^3 \approx 20,086$.

Sur $[0 ; 1]$: f est continue et strictement décroissante, et 10 est compris strictement entre $f(1) \approx 7,903$ et $f(0) \approx 12,696$, donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 10$ admet une unique solution sur cet intervalle.

Sur $[1 ; +\infty[$: f est continue et strictement croissante, et 10 est compris strictement entre $f(1) \approx 7,903$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \approx 20,086$, donc l'équation $f(t) = 10$ admet là aussi une unique solution.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie** : l'équation $f(t) = 10$ admet exactement deux solutions sur $[0 ; +\infty[$, donc la population atteindra bien 10 000 individus à deux reprises.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. On pose $f(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$. Parmi $F(x) = \frac{x^2}{2}e^x$, $F(x) = (x-1)e^x$, $F(x) = (x+1)e^x$ et $F(x) = \frac{2}{x}e^{x^2}$, laquelle est une primitive de f sur $\mathbb{R}$?

Testons $F(x) = (x-1)e^x$, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, avec $u(x) = x-1$ et $v(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.

$F' = u'v + uv'$ donc $F'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x = f(x)$ pour tout réel x .

Donc, la réponse est $F(x) = (x-1)e^x$.

2. La courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$ admet un maximum en $x = 3$ et un unique point d'inflexion d'abscisse 5. Que peut-on affirmer parmi : f et f' de même signe sur $]0 ; 5[$; f et f' de même signe sur $]5 ; +\infty[$; f' et f'' de même signe sur $]0 ; 5[$; f et f'' de même signe sur $]5 ; +\infty[$?

Par lecture graphique de $\mathcal{C}$, $f(x) < 0$ sur $]0 ; 1[$ et $f(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$.

Le maximum étant atteint en $x = 3$, $f'(x) > 0$ sur $]0 ; 3[$ et $f'(x) < 0$ sur $]3 ; +\infty[$.

Le seul point d'inflexion étant d'abscisse 5, et la courbe étant concave puis convexe, $f''(x) < 0$ sur $]0 ; 5[$ et $f''(x) > 0$ sur $]5 ; +\infty[$.

Sur $]5 ; +\infty[$, $f(x) > 0$ et $f''(x) > 0$: ces deux fonctions sont donc de même signe sur cet intervalle.

Donc, la réponse est « **f et f'' sont de même signe sur $]5 ; +\infty[$** ».

3. Soit g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = \frac{a}{b + e^{-t}}$, avec $g(0) = 2$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 3$. Déterminer a et b parmi les couples $(2 ; 3)$, $(4 ; \frac{4}{3})$, $(4 ; 1)$ et $(6 ; 2)$.

$$g(0) = \frac{a}{b + e^0} = \frac{a}{b + 1} = 2, \text{ donc } a = 2(b + 1) = 2b + 2.$$

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-t) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, on a par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} (b + e^{-t}) = b$ et, par quotient, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \frac{a}{b}$.

Donc $\frac{a}{b} = 3$, soit $a = 3b$. En combinant avec $a = 2b + 2$: $3b = 2b + 2$, donc $b = 2$, puis $a = 3 \times 2 = 6$.

Donc, la réponse est **$a = 6$ et $b = 2$** .

4. Alice tire au hasard une urne parmi A (2 boules vertes, 2 rouges) et B (3 boules vertes, 1 rouge), puis une boule dans cette urne, et obtient une boule verte. Quelle est la probabilité qu'elle ait choisi l'urne B, parmi $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{8}$?

Notons A et B le choix de chaque urne, et V l'évènement « la boule tirée est verte ». On a $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P_A(V) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $P_B(V) = \frac{3}{4}$.

$$P(V \cap B) = P(B) \times P_B(V) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

Comme A et B forment une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne $P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

$$\text{On cherche } P_V(B) = \frac{P(V \cap B)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{8} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{5}.$$

Donc, la réponse est $\frac{3}{5}$.

5. On pose $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}$. Parmi quatre scripts Python (a, b, c, d) proposés pour calculer S , lequel convient ?

- Le script a réaffecte S à chaque tour de boucle sans cumuler les termes précédents : il renvoie seulement le dernier terme, pas la somme — écarté.
- Le script c initialise un compteur k mais teste la condition sur une variable S qui n'a pas été initialisée avant la boucle : il provoque une erreur — écarté.
- Le script d initialise k à 0 mais ne l'incrmente jamais dans la boucle : la condition ' $k < 100$ ' reste indéfiniment vraie, la boucle ne s'arrête jamais — écarté.

- Le script b initialise S à 0, puis cumule bien $S = S + 1/(k+1)$ pour k allant de 0 à 99 : c'est le seul qui calcule correctement S .

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A — 1. On définit f sur $] -1,5 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x + 3) - 1$, et $g(x) = f(x) - x$. Déterminer la limite de g en $-1,5$ (on admet que sa limite en $+\infty$ est $-\infty$).

Quand $x \rightarrow -1,5^+$, $2x + 3 \rightarrow 0^+$ (car $x > -1,5$), et $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow -1,5} \ln(2x + 3) = -\infty$.

De plus $-1 - x \rightarrow -1 - (-1,5) = 0,5$ quand $x \rightarrow -1,5$, donc par somme $\lim_{x \rightarrow -1,5} g(x) = -\infty$.

Partie A — 2. Étudier les variations de g sur $] -1,5 ; +\infty[$.

$g(x) = \ln(2x + 3) - 1 - x$ est dérivable sur $] -1,5 ; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$g'(x) = \frac{2}{2x + 3} - 1 = \frac{2 - (2x + 3)}{2x + 3} = \frac{-2x - 1}{2x + 3}.$$

Sur $] -1,5 ; +\infty[$, $2x + 3 > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $-2x - 1$, qui s'annule en $x = -0,5$: $g'(x) > 0$ sur $] -1,5 ; -0,5[$ et $g'(x) < 0$ sur $] -0,5 ; +\infty[$.

g est donc strictement croissante sur $] -1,5 ; -0,5[$ puis strictement décroissante sur $] -0,5 ; +\infty[$, avec un maximum en $x = -0,5$.

Partie A — 3.a Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -0,5 ; +\infty[$.

Sur $] -0,5 ; +\infty[$, g est continue (car dérivable) et strictement décroissante.

$$g(-0,5) = \ln(2 \times (-0,5) + 3) - 1 - (-0,5) = \ln(2) - 0,5 \approx 0,193, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ (admis).}$$

0 est bien compris entre $g(-0,5) \approx 0,193$ et cette limite : d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à une fonction strictement monotone, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -0,5 ; +\infty[$.

Partie A — 3.b Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

À la calculatrice, $g(0,2) \approx 0,024 > 0$ et $g(0,3) \approx -0,019 < 0$, donc $0,2 < \alpha < 0,3$.

En affinant, $g(0,25) \approx 0,003 > 0$ et $g(0,26) \approx -0,002 < 0$, donc $0,25 < \alpha < 0,26$.

Partie B — 1. On admet que f est strictement croissante sur $] -1,5 ; +\infty[$. Montrer que si $x \in [-1 ; \alpha]$ alors $f(x) \in [-1 ; \alpha]$.

f est strictement croissante sur $] -1,5 ; +\infty[$, donc en particulier sur $[-1 ; \alpha]$: si $-1 \leq x \leq \alpha$, alors $f(-1) \leq f(x) \leq f(\alpha)$.

Or $g(\alpha) = 0$ signifie $f(\alpha) - \alpha = 0$, donc $f(\alpha) = \alpha$. Et $f(-1) = \ln(2 \times (-1) + 3) - 1 = \ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$.

On obtient donc $-1 \leq f(x) \leq \alpha$, c'est-à-dire $f(x) \in [-1 ; \alpha]$.

Partie B — 2.a Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ (avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$).

Initialisation. $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = \ln(3) - 1 \approx 0,099$. Comme $\alpha \in]0,25 ; 0,26[$, on a bien $-1 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$: la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité. Supposons que, pour un entier naturel n fixé, $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

f étant croissante sur $[-1 ; \alpha]$ (question B.1), on en déduit $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha)$, c'est-à-dire $-1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ (car $f(-1) = -1$ et $f(\alpha) = \alpha$) : la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. La propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire, donc, par principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

Partie B — 2.b En déduire que la suite (u_n) converge.

D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante (car $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n) et majorée par α : elle **converge** donc, d'après le théorème de la limite monotone.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 1)

1. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$, deux fois dérivable, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

En 0 : on écrit $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + 1 - 0 = 1$.

En $+\infty$: on factorise, $f(x) = x(3 - 2 \ln(x)) + 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2 \ln(x)) = -\infty$, et donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(3 - 2 \ln(x)) = -\infty$. On en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2.a Démontrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 1 - 2 \ln(x)$.

En dérivant chaque terme : $f'(x) = 3 - 2 \ln(x) - 2x \times \frac{1}{x} = 3 - 2 \ln(x) - 2 = 1 - 2 \ln(x)$.

2.b Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$, en faisant apparaître les limites et la valeur exacte de l'extremum.

On résout $f'(x) > 0 \iff 1 - 2\ln(x) > 0 \iff \ln(x) < \frac{1}{2} \iff x < e^{\frac{1}{2}}$ (la fonction exponentielle étant strictement croissante). Donc f' est strictement positive sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}[$ et strictement négative sur $]e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}]$ puis strictement décroissante sur $]e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$, avec un maximum en $x = e^{\frac{1}{2}}$ valant $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - 2e^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - e^{\frac{1}{2}} = 2e^{\frac{1}{2}} + 1 \approx 4,3$.

Le tableau de variation part de la limite 1 en 0, croît jusqu'au maximum $2e^{\frac{1}{2}} + 1$ en $x = e^{\frac{1}{2}}$, puis décroît vers $-\infty$.

3.a Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable, donc continue, sur $]0 ; +\infty[$.

Sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}]$, f est strictement croissante et sa valeur minimale y est $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 > 0$: f y est donc strictement positive, et l'équation $f(x) = 0$ n'y a pas de solution.

Sur $]e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, passant de la valeur $2e^{\frac{1}{2}} + 1 > 0$ à $-\infty$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ y admet une unique solution, notée α .

Donc, la réponse est que $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$, avec $\alpha > e^{\frac{1}{2}}$.

3.b En déduire le signe de f sur $]0 ; +\infty[$.

D'après les variations de f et le résultat précédent : $f(x) > 0$ sur $]0 ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, et $f(x) < 0$ sur $] \alpha ; +\infty[$.

4. Soit F une primitive quelconque de f sur $]0 ; +\infty[$. Peut-on affirmer que F est strictement décroissante sur $]e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$?

Non. Par définition d'une primitive, $F' = f$. Or f est strictement positive sur $]e^{\frac{1}{2}} ; \alpha[$ (question 3.b), donc F est strictement croissante sur cet intervalle, ce qui contredit l'affirmation proposée : F n'est pas décroissante sur tout $]e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$.

5.a Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes.

La dérivée seconde vaut $f''(x) = -2 \times \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$, strictement négative sur $]0 ; +\infty[$. La fonction f est donc **concave** sur cet intervalle, ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **en dessous de chacune de ses tangentes**.

5.b Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

On a $f(1) = 3 \times 1 + 1 - 2 \times 1 \times \ln(1) = 4 - 0 = 4$ et $f'(1) = 1 - 2 \ln(1) = 1$.

L'équation de la tangente en un point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, donc ici $y = 1 \times (x - 1) + 4$, soit $T : y = x + 3$.

5.c En déduire que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$.

Puisque $\mathcal{C}_f$ est sous chacune de ses tangentes (question 5.a), elle est en particulier sous T : pour tout $x > 0$, $f(x) \leq x + 3$.

Cette inégalité s'écrit $3x + 1 - 2x \ln(x) \leq x + 3$, soit $2x - 2 \leq 2x \ln(x)$. En divisant par $2x > 0$: $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x)$.

Donc, la réponse est que pour tout réel x strictement positif, $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 2)

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}$. Calculer u_1 .

$$u_1 = \frac{6 \times 8 + 2}{8 + 5} = \frac{50}{13}.$$

2.a Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}$ (de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n). Montrer que f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, puis en déduire que $f(x) > 2$ pour tout réel $x > 2$.

Le dénominateur $x + 5$ ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$ (il vaut au moins 5), donc f y est dérivable, avec $f'(x) = \frac{6(x + 5) - (6x + 2)}{(x + 5)^2} = \frac{28}{(x + 5)^2}$.

Ce quotient est strictement positif sur $[0 ; +\infty[$, donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

Par ailleurs $f(2) = \frac{6 \times 2 + 2}{2 + 5} = \frac{14}{7} = 2$. La stricte croissance de f donne alors : pour tout $x > 2$, $f(x) > f(2) = 2$.

2.b Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 2$.

Initialisation : $u_0 = 8 > 2$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons $u_n > 2$ pour un entier n fixé. D'après la question précédente, $f(u_n) > 2$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 2$ puisque $u_{n+1} = f(u_n)$.

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire, donc par récurrence, $u_n > 2$ pour tout entier naturel n .

3. On admet que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}$. Montrer que (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle converge.

Comme $u_n > 2$ pour tout n (question 2.b), on a $u_n + 1 > 3 > 0$ et $u_n + 5 > 7 > 0$: le dénominateur et le second facteur du numérateur sont strictement positifs.

Le signe de $u_{n+1} - u_n$ est donc celui de $2 - u_n$, qui est strictement négatif puisque $u_n > 2$. Ainsi $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n : la suite (u_n) est strictement décroissante.

Étant décroissante et minorée par 2, la suite (u_n) converge, vers une limite ℓ vérifiant $\ell \geq 2$.

4.a On pose $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$ pour tout entier naturel n . Calculer v_0 .

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \frac{8 - 2}{8 + 1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

4.b Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

$$\text{En remplaçant } u_{n+1} \text{ par son expression : } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{6u_n + 2}{u_n + 5} - 2}{\frac{6u_n + 2}{u_n + 5} + 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{En réduisant chaque étage au même dénominateur } u_n + 5 : v_{n+1} &= \frac{(6u_n + 2) - 2(u_n + 5)}{(6u_n + 2) + (u_n + 5)} = \\ &= \frac{4u_n - 8}{7u_n + 7} = \frac{4(u_n - 2)}{7(u_n + 1)} = \frac{4}{7} v_n. \end{aligned}$$

La relation $v_{n+1} = \frac{4}{7} v_n$, valable pour tout entier naturel n , montre que (v_n) est géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

4.c Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n) , puis en déduire celle de (u_n) .

Comme (v_n) est géométrique de raison $\frac{4}{7}$ et de premier terme $v_0 = \frac{2}{3}$, on a $v_n = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{7}\right)^n$ pour tout n .

Or $-1 < \frac{4}{7} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$, et par produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

De $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$ et $u_n + 1 > 3$, on tire $u_n - 2 = v_n(u_n + 1)$, quantité qui tend vers 0. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$: la limite ℓ de (u_n) vaut **2**.

5. On considère la fonction Python ‘seuil(A)’ ci-dessous, où A est un réel strictement supérieur à 2, qui simule la suite (u_n) jusqu’à ce que le terme calculé descende à A ou en dessous, et renvoie le rang atteint.

- ‘def seuil(A) :‘
- ‘ n = 0‘
- ‘ u = 8‘

- ‘ while u > A :‘
- ‘ u = (6*u + 2) / (u + 5)‘
- ‘ n = n + 1‘
- ‘ return n‘

5. Donner, sans justification, la valeur renvoyée par ‘seuil(2.001)’, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l’exercice.

En simulant la suite terme à terme, on obtient $u_{13} \approx 2,00139$ (encore supérieur à 2,001) puis $u_{14} \approx 2,00079$ (passé sous 2,001) : la fonction renvoie donc **14**.

Cela signifie que u_{14} est le premier terme de la suite strictement inférieur à 2,001.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 2)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^x$. Le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l’équation $f(x) = -\frac{73}{100}$ est : **a.** 0 — **b.** 1 — **c.** 2 — **d.** une infinité.****

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, avec $f'(x) = 2e^x + 2xe^x = 2e^x(1+x)$, du signe de $1+x$.

f est donc strictement décroissante sur $] -\infty ; -1]$ et strictement croissante sur $[-1 ; +\infty[$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et $f(-1) = -2e^{-1} \approx -0,736$.

Sur $] -\infty ; -1]$, f est continue et strictement décroissante de 0 (limite, exclue) à $f(-1) \approx -0,736$: comme $-0,736 < -0,73 < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure une unique solution sur cet intervalle.

Sur $[-1 ; +\infty[$, f est continue et strictement croissante de $f(-1) \approx -0,736$ à $+\infty$: comme $-0,736 < -0,73 < +\infty$, on obtient de même une unique solution sur cet intervalle.

Donc, la réponse est **c** : l’équation admet exactement 2 solutions sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x+1}{e^x}$. La limite de g en $-\infty$ est : **a.** $-\infty$ — **b.** $+\infty$ — **c.** 0 — **d.** elle n’existe pas.****

On écrit $g(x) = (x+1) \times \frac{1}{e^x}$.

Quand $x \rightarrow -\infty$: $x+1 \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{e^x} = e^{-x} \rightarrow +\infty$.

Donc, la réponse est **a** : par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (4x-16)e^{2x}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_h$. On peut affirmer que : **a. h est convexe sur $\mathbb{R}$ — **b.** $\mathcal{C}_h$ a un point d'inflexion en $x = 3$ — **c.** h est concave sur $\mathbb{R}$ — **d.** $\mathcal{C}_h$ a un point d'inflexion en $x = 3,5$.**

h est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont. On calcule $h'(x) = 4e^{2x} + 2(4x-16)e^{2x} = e^{2x}(8x-28)$.

En dérivant à nouveau : $h''(x) = 2e^{2x}(8x-28) + 8e^{2x} = e^{2x}(16x-56+8) = e^{2x}(16x-48) = 16e^{2x}(x-3)$.

Comme $e^{2x} > 0$ pour tout réel x , le signe de $h''(x)$ est celui de $x-3$: h'' s'annule en changeant de signe en $x = 3$, donc la courbe $\mathcal{C}_h$ admet un unique point d'inflexion, d'abscisse $x = 3$.

Donc, la réponse est **b**.

4. On considère la fonction k définie sur $]0 ; +\infty[$ par $k(x) = 3\ln(x) - x$, de courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé, et T la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x = e$. Une équation de T est : **a. $y = (3-e)x$ — **b.** $y = \left(\frac{3-e}{e}\right)x$ — **c.** $y = \left(\frac{3}{e} - 1\right)x + 1$ — **d.** $y = (e-1)x + 1$.**

k est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ avec $k'(x) = \frac{3}{x} - 1$. On a $k(e) = 3\ln(e) - e = 3 - e$ et $k'(e) = \frac{3}{e} - 1 = \frac{3-e}{e}$.

L'équation de T s'écrit $y = k(e) + k'(e)(x-e) = (3-e) + \frac{3-e}{e}(x-e) = \frac{3-e}{e}x - (3-e) + (3-e) = \frac{3-e}{e}x$.

Donc, la réponse est **b** (la droite T passe par l'origine).

5. On considère l'équation $[\ln(x)]^2 + 10\ln(x) + 21 = 0$, d'inconnue $x \in]0 ; +\infty[$. Le nombre de solutions de cette équation est : **a. 0 — **b.** 1 — **c.** 2 — **d.** une infinité.**

On pose $X = \ln(x)$: l'équation devient $X^2 + 10X + 21 = 0$, un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 10^2 - 4 \times 21 = 100 - 84 = 16 = 4^2 > 0$, qui admet donc deux racines réelles distinctes.

Ces racines sont $X_1 = \frac{-10-4}{2} = -7$ et $X_2 = \frac{-10+4}{2} = -3$.

Chaque valeur de X correspond à une unique valeur de $x = e^X$ (la fonction exponentielle étant une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0 ; +\infty[$), donc $x_1 = e^{-7}$ et $x_2 = e^{-3}$ sont les deux solutions distinctes de l'équation initiale.

Donc, la réponse est **c**.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 1)

1. On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8 \ln(x)$. Déterminer la limite de f en 0.

Quand $x \rightarrow 0$ avec $x > 0$, $x^2 \rightarrow 0$ et $\ln(x) \rightarrow -\infty$, donc $-8 \ln(x) \rightarrow +\infty$: par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

2. En utilisant l'écriture $f(x) = x^2 \left(1 - 8 \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$ pour $x > 0$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (a fortiori, puisque $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$ et que $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$), donc $1 - 8 \frac{\ln(x)}{x^2} \rightarrow 1$.

Comme $x^2 \rightarrow +\infty$, par produit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Montrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et $f'(x) = 2x - 8 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2}{x} - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x} = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$.

4. Étudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations complet (en précisant la valeur exacte du minimum).

On factorise : $f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$. Sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$ et $x+2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $(x-2)$.

$f'(x) < 0$ sur $]0 ; 2[$ et $f'(x) > 0$ sur $]2 ; +\infty[$: f est donc strictement décroissante sur $]0 ; 2]$ puis strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.

f admet donc un minimum en $x = 2$, qui vaut $f(2) = 2^2 - 8 \ln(2) = 4 - 8 \ln(2)$.

Le tableau de variations part de $+\infty$ en 0, décroît jusqu'au minimum $4 - 8 \ln(2)$ en $x = 2$, puis croît vers $+\infty$.

5. Démontrer que, sur $]0 ; 2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α (sans chercher sa valeur).

Numériquement, $4 - 8 \ln(2) \approx -1,545 < 0$: le minimum de f est strictement négatif, donc f s'annule bien quelque part sur $]0 ; 2]$.

f est dérivable donc continue sur $]0 ; 2]$, et strictement décroissante sur cet intervalle. Elle prend une valeur qui tend vers $+\infty$ en 0 et vaut $4 - 8 \ln(2) < 0$ en 2, donc elle change de signe une seule fois.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à une fonction continue et strictement monotone, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; 2]$.

6. On admet que, sur $[2 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β . En déduire le signe de f sur $]0 ; +\infty[$.

Puisque f est strictement décroissante sur $]0 ; 2]$ et s'annule en α , elle est positive avant α et négative entre α et 2. Puisque f est strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$ et s'annule en β , elle reste négative entre 2 et β puis positive après β . Donc, la réponse est : $f(x) > 0$ sur $]0 ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, $f(x) < 0$ sur $] \alpha ; \beta[$, $f(\beta) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $] \beta ; +\infty[$.

7. Pour tout réel k , on définit g_k sur $]0 ; +\infty[$ par $g_k(x) = x^2 - 8 \ln(x) + k$. Déterminer, à l'aide du tableau de variations de f , la plus petite valeur de k pour laquelle g_k reste positive sur $]0 ; +\infty[$.

On remarque que $g_k(x) = f(x) + k$ pour tout x : g_k a donc les mêmes variations que f , translatées de k .

Le minimum de g_k sur $]0 ; +\infty[$ vaut donc $4 - 8 \ln(2) + k$, atteint en $x = 2$ comme pour f .

g_k est positive ou nulle sur tout l'intervalle si et seulement si ce minimum est positif ou nul : $4 - 8 \ln(2) + k \geq 0 \iff k \geq 8 \ln(2) - 4$.

Donc, la réponse est : la plus petite valeur qui convient est $k = 8 \ln(2) - 4$.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 2)

1.a On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

Quand $x \rightarrow -\infty$, $-x \rightarrow +\infty$ donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$ (limite usuelle de l'exponentielle), donc $1 + e^{-x} \rightarrow +\infty$.

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$. Donc, la réponse est $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

1.b Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$ donc $1 + e^{-x} \rightarrow 1$, et $\lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$.

Donc, la réponse est $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Graphiquement, cela signifie que la courbe $\mathcal{C}$ de f admet l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) pour asymptote horizontale en $+\infty$.

1.c On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{-1}{1+e^x}$.

f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = 1 + e^{-x}$ et $u'(x) = -e^{-x}$; sa dérivée est donc $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

En multipliant numérateur et dénominateur par e^x : $f'(x) = \frac{-e^{-x} \times e^x}{(1+e^{-x}) \times e^x} = \frac{-1}{e^x + 1}$.

Donc, la réponse est $f'(x) = \frac{-1}{1+e^x}$.

1.d Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $1 + e^x > 0$ et $f'(x) = \frac{-1}{1+e^x} < 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Avec les limites établies aux questions précédentes ($+\infty$ en $-\infty$ et 0 en $+\infty$), on obtient le tableau : $f'(x)$ est négatif sur $\mathbb{R}$, et f décroît strictement de $+\infty$ (en $-\infty$) vers 0 (en $+\infty$), sans jamais atteindre 0 .

2.a On note T_0 la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 . Déterminer une équation de T_0 .

La tangente en un point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$; ici $a = 0$.

$f(0) = \ln(1 + e^0) = \ln(2)$ et $f'(0) = \frac{-1}{1+e^0} = -\frac{1}{2}$.

Donc, la réponse est : T_0 a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

2.b Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{-1}{1+e^x}$; en dérivant à nouveau, avec $u(x) = -1$ (constante) et $v(x) = 1 + e^x$: $f''(x) = \frac{-v'(x) \times (-1)}{v(x)^2} \times (-1)$, plus simplement $f''(x) = \frac{0 - (-1) \times e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

Pour tout réel x , $e^x > 0$ et $(1 + e^x)^2 > 0$, donc $f''(x) > 0$. Donc, la réponse est : f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2.c En déduire que, pour tout réel x , $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

Comme f est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier au-dessus de T_0 . Donc, la réponse est : pour tout réel x , $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

3.a Pour un réel $a \neq 0$, on note $M_a(-a ; f(-a))$ et $N_a(a ; f(a))$ deux points de $\mathcal{C}$. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) - f(-x) = -x$.

$$f(x) - f(-x) = \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^x) = \ln\left(\frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x}\right) \text{ (propriété } \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)\text{)}.$$

$$\text{En factorisant le numérateur par } e^{-x} : 1 + e^{-x} = e^{-x}(e^x + 1), \text{ donc } \frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}(1 + e^x)}{1 + e^x} = e^{-x}.$$

$$\text{Donc } f(x) - f(-x) = \ln(e^{-x}) = -x.$$

3.b En déduire que les droites T_0 et $(M_a N_a)$ sont parallèles.

$$\text{Le coefficient directeur de la droite } (M_a N_a) \text{ est } \frac{y_{N_a} - y_{M_a}}{x_{N_a} - x_{M_a}} = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)}.$$

D'après la question précédente appliquée en $x = a$, $f(a) - f(-a) = -a$, donc ce coefficient vaut $\frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$.

Or T_0 a pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ (question 2.a). Les deux droites ayant le même coefficient directeur, donc, la réponse est : T_0 et $(M_a N_a)$ sont parallèles.

Bac Terminale 2023 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

1. Soit f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x e^{-x}$, de courbe $\mathcal{C}_f$. En remarquant que $f(x) = \frac{x}{e^x}$, démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ et donner son équation.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Donc, la réponse est : $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses).

2. Démontrer que, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$.

$$f \text{ est un produit de fonctions dérivables : } f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$, avec les valeurs aux bornes et la valeur exacte de l'extremum.

Pour tout x , $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $(1 - x)$: $f'(x) > 0$ sur $[0 ; 1[$, $f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$ sur $]1 ; +\infty[$.

f est donc strictement croissante sur $[0 ; 1]$ puis strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$, avec $f(0) = 0$, $f(1) = e^{-1}$ (maximum) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (question 1).

Tableau : x varie de 0 à 1 à $+\infty$; f croît de 0 à e^{-1} puis décroît de e^{-1} à 0.

4. Déterminer, sur $[0 ; +\infty[$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{367}{1000}$.

On a $e^{-1} \approx 0,368 > 0,367$.

Sur $[0 ; 1]$, f est continue et strictement croissante, allant de 0 à $e^{-1} > 0,367$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,367$ y admet une unique solution.

Sur $[1 ; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, allant de $e^{-1} > 0,367$ à 0 : elle y admet aussi une unique solution.

Donc, la réponse est : l'équation $f(x) = \frac{367}{1000}$ admet exactement **deux solutions** sur $[0 ; +\infty[$.

5. On admet que, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $f''(x) = e^{-x}(x - 2)$. Étudier la convexité de f sur $[0 ; +\infty[$.

Pour tout x , $e^{-x} > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $(x - 2)$: négatif sur $[0 ; 2[$, nul en 2, positif sur $]2 ; +\infty[$.

Donc, la réponse est : f est concave sur $[0 ; 2]$ et convexe sur $[2 ; +\infty[$; la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

6.a Pour $a \in [0 ; +\infty[$, soit A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a et T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A. Démontrer que T_a a pour équation réduite $y = [(1 - a)e^{-a}]x + a^2e^{-a}$.

La tangente en A a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, soit $y = (1 - a)e^{-a}(x - a) + ae^{-a}$.

En développant : $y = (1 - a)e^{-a}x - a(1 - a)e^{-a} + ae^{-a} = (1 - a)e^{-a}x - ae^{-a} + a^2e^{-a} + ae^{-a}$.

Donc, la réponse est : T_a a pour équation $y = [(1 - a)e^{-a}]x + a^2e^{-a}$.

6.b T_a coupe l'axe des ordonnées en H_a , d'ordonnée notée $g(a)$. En déduire l'expression de $g(a)$.

L'ordonnée de H_a s'obtient en prenant $x = 0$ dans l'équation de T_a : $g(a) = [(1 - a)e^{-a}] \times 0 + a^2e^{-a} = a^2e^{-a}$.

6.c Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

On étudie la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2e^{-x}$: $g'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \times (-e^{-x}) = -x(x - 2)e^{-x}$.

Pour $x > 0$, $e^{-x} > 0$ et $-x < 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $-(x - 2)$: positif sur $[0 ; 2[$, nul en 2, négatif sur $]2 ; +\infty[$.

g est donc croissante puis décroissante sur $[0 ; +\infty[$: elle admet un maximum unique en $x = 2$.

Or $x = 2$ est exactement l'abscisse du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ (question 5). Donc, la réponse est : $g(a)$ est maximum lorsque A est le point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Bac Terminale 2023 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

1. Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}$. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .

$$u_1 = \frac{-u_0 - 4}{u_0 + 3} = \frac{0 - 4}{0 + 3} = -\frac{4}{3}.$$

$$u_2 = \frac{-u_1 - 4}{u_1 + 3} = \frac{\frac{4}{3} - 4}{-\frac{4}{3} + 3} = \frac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{8}{5}.$$

2. Compléter la fonction Python ‘terme(n)’, écrite de façon incomplète, pour qu’elle renvoie u_n pour tout entier naturel n .

- ‘def terme(n) :’
- ‘ u = 0’
- ‘ for i in range(n) :’
- ‘ u = (-u - 4) / (u + 3)’
- ‘ return u’

3. Soit f définie sur $] -3 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-x - 4}{x + 3}$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n . Démontrer que f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$.

f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son ensemble de définition $] -3 ; +\infty[$, avec (formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$) :

$$f'(x) = \frac{-1 \times (x + 3) - (-x - 4) \times 1}{(x + 3)^2} = \frac{-x - 3 + x + 4}{(x + 3)^2} = \frac{1}{(x + 3)^2}.$$

Sur $] -3 ; +\infty[$, $(x + 3)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$: donc, la réponse est que f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-2 < u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation. Pour $n = 0$: $u_0 = 0$ et $u_1 = -\frac{4}{3}$, donc $-2 < -\frac{4}{3} \leq 0$, soit $-2 < u_1 \leq u_0$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons que, pour un entier $n \geq 0$, $-2 < u_{n+1} \leq u_n$ (hypothèse de récurrence).

Comme -2 et u_{n+1} , u_n appartiennent à $] -3 ; +\infty[$ et que f y est strictement croissante (question 3), on peut appliquer f aux trois membres de l’inégalité : $f(-2) < f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$.

Or $f(-2) = \frac{-(-2) - 4}{-2 + 3} = \frac{-2}{1} = -2$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$: on obtient donc $-2 < u_{n+2} \leq u_{n+1}$, ce qui est la propriété au rang $n + 1$.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire à partir de ce rang : d’après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $-2 < u_{n+1} \leq u_n$.

5. En déduire que la suite (u_n) converge.

D'après la question 4, (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leq u_n$) et minorée par -2 : d'après le théorème de la convergence monotone, (u_n) converge.

6.a Soit (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$ pour tout entier naturel n . Donner v_0 .

$$v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{0 + 2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

6.b Démontrer que (v_n) est arithmétique de raison 1.

Comme $u_n > -2$ pour tout n (question 4), $u_n + 2 > 0$ donc v_n est bien défini et strictement positif pour tout n .

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 2} = \frac{1}{\frac{-u_n - 4}{u_n + 3} + 2} = \frac{1}{\frac{-u_n - 4 + 2(u_n + 3)}{u_n + 3}} = \frac{u_n + 3}{u_n + 2}.$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3}{u_n + 2} - \frac{1}{u_n + 2} = \frac{u_n + 2}{u_n + 2} = 1.$$

Donc, la réponse est : (v_n) est arithmétique de raison 1 (et de premier terme $v_0 = 0,5$).

6.c En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2$.

(v_n) étant arithmétique de raison 1 et de premier terme 0,5 : $v_n = 0,5 + n$ pour tout n .

De $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$, on tire $u_n + 2 = \frac{1}{v_n}$, donc $u_n = \frac{1}{v_n} - 2 = \frac{1}{n + 0,5} - 2$.

Donc, la réponse est : pour tout $n \geq 1$ (et en fait dès $n = 0$), $u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2$.

6.d Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 0,5) = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + 0,5} = 0, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2.$$

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 1)**1. Affirmation : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$ est convexe. Vrai ou faux ?**

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = e^x - 1$ puis $f''(x) = e^x$. Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , f'' est positive sur $\mathbb{R}$. Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie** : f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Affirmation : l'équation $(2e^x - 6)(e^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution réelle. Vrai ou faux ?

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul : $2e^x - 6 = 0$ ou $e^x + 2 = 0$.

Comme $e^x > 0$ pour tout x , on a $e^x + 2 > 2 > 0$: cette équation n'a donc aucune solution.

L'autre équation donne $2e^x = 6 \iff e^x = 3 \iff x = \ln(3)$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle, cette solution est unique).

Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie**.

3. Affirmation : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = 0$. Vrai ou faux ?

On factorise par le terme dominant de chaque membre : $\frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = \frac{e^{2x}(1 - e^{-2x})}{e^x(1 - xe^{-x})} = e^x \times \frac{1 - e^{-2x}}{1 - xe^{-x}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$ donc le numérateur de la fraction tend vers 1 ; et $xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc le dénominateur tend aussi vers 1.

Le quotient tend donc vers 1, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = +\infty$.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** (la limite vaut $+\infty$, pas 0).

4. Affirmation : avec $f(x) = (6x + 5)e^{3x}$ et $F(x) = (2x + 1)e^{3x} + 4$ sur $\mathbb{R}$, F est la primitive de f qui vaut 5 en $x = 0$. Vrai ou faux ?

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables : $F'(x) = 2e^{3x} + 3(2x + 1)e^{3x} = e^{3x}(2 + 6x + 3) = (6x + 5)e^{3x} = f(x)$.

De plus $F(0) = (2 \times 0 + 1)e^0 + 4 = 1 + 4 = 5$.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie** : F est bien la primitive de f sur $\mathbb{R}$ valant 5 en 0.

5. On considère une fonction Python 'mystere(L)' qui parcourt une liste L, cumule la somme S de ses éléments, puis renvoie S divisée par la longueur de L (la moyenne des éléments). Affirmation : 'mystere([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5])' renvoie 50. Vrai ou faux ?

La somme des dix éléments de la liste vaut $1 + 9 + 9 + 5 + 0 + 3 + 6 + 12 + 0 + 5 = 50$, et la fonction renvoie cette somme divisée par la longueur de la liste (ici 10), soit $\frac{50}{10} = 5$. Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** (le résultat renvoyé vaut 5, pas 50).

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 1)

1.a. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

Initialisation : pour $n = 0$, $2 \times 0,9^0 - 3 = 2 - 3 = -1 = u_0$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que pour un entier n fixé, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$. Alors $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3 = 0,9(2 \times 0,9^n - 3) - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 2,7 - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 3$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Donc, la réponse est que, par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

1.b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leq -1$.

Comme $0 < 0,9 < 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < 0,9^n \leq 1$.

En multipliant par 2 (positif) : $0 < 2 \times 0,9^n \leq 2$, puis en retranchant 3 à chaque membre : $-3 < 2 \times 0,9^n - 3 \leq -1$.

Donc, la réponse est que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leq -1$.

1.c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = (0,9u_n - 0,3) - u_n = -0,1u_n - 0,3$.

D'après la question précédente, $-3 < u_n \leq -1$, donc en multipliant par $-0,1$ (négatif, ce qui inverse les inégalités) : $0,1 \leq -0,1u_n < 0,3$.

En retranchant $0,3$ à chaque membre : $-0,2 \leq -0,1u_n - 0,3 < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n .

Donc, la réponse est que la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

1.d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par -3 (question 1.b) : elle converge donc vers une limite réelle. Comme $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ (car $0 < 0,9 < 1$), on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3$.
Donc, la réponse est que la suite (u_n) converge vers -3 .

2.a. On étudie la fonction g définie sur $] -3 ; -1]$ par $g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x$. Justifier les informations données par le tableau de variations de g (limites, sens de variation, valeur en -1).

Pour $x \in] -3 ; -1]$: $-1,5 < 0,5x \leq -0,5$, donc $0 < 0,5x + 1,5 \leq 1$: g est bien définie (et dérivable) sur cet intervalle.

$g'(x) = \frac{0,5}{0,5x + 1,5} - 1 = \frac{0,5 - (0,5x + 1,5)}{0,5x + 1,5} = \frac{-0,5x - 1}{0,5x + 1,5}$. Le dénominateur étant strictement positif, $g'(x)$ a le signe de $-0,5x - 1$, qui s'annule pour $x = -2$, est positif pour $x < -2$ et négatif pour

$x > -2$.

Donc g est strictement croissante sur $] -3 ; -2]$ puis strictement décroissante sur $[-2 ; -1]$.

En $x \rightarrow -3$ (par valeurs supérieures), $0,5x + 1,5 \rightarrow 0^+$ donc $\ln(0,5x + 1,5) \rightarrow -\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = -\infty$.

Enfin $g(-1) = \ln(-0,5 + 1,5) - (-1) = \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1$, et $g(-2) = \ln(-1 + 1,5) + 2 = \ln(0,5) + 2 = 2 - \ln(2) \approx 1,307$.

2.b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -3 ; -1]$, et donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} .

Sur $] -3 ; -2]$, g est continue et strictement croissante, de limite $-\infty$ en -3 jusqu'à $g(-2) = 2 - \ln(2) \approx 1,307 > 0$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

Sur $[-2 ; -1]$, g est décroissante avec $g(-2) \approx 1,307 > 0$ et $g(-1) = 1 > 0$: g ne s'annule pas sur cet intervalle.

Donc, la réponse est que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -3 ; -1]$, et à la calculatrice on obtient l'encadrement $-2,889 < \alpha < -2,888$.

3.a. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \ln(0,5u_n + 1,5)$. En utilisant la formule de la question 1.a, démontrer que (v_n) est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.

En remplaçant u_n par son expression $2 \times 0,9^n - 3$: $0,5u_n + 1,5 = 0,5(2 \times 0,9^n - 3) + 1,5 = 0,9^n - 1,5 + 1,5 = 0,9^n$.

Donc $v_n = \ln(0,9^n) = n \ln(0,9)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = (n+1) \ln(0,9) - n \ln(0,9) = \ln(0,9)$, une constante.

Donc, la réponse est que (v_n) est **arithmétique de raison $\ln(0,9)$** (et de premier terme $v_0 = 0$).

3.b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = v_n$ équivaut à $g(u_n) = 0$.

Par définition, $u_n = v_n \iff u_n = \ln(0,5u_n + 1,5) \iff \ln(0,5u_n + 1,5) - u_n = 0 \iff g(u_n) = 0$ (puisque g est précisément définie par $g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x$). Donc, la réponse est que $u_n = v_n \iff g(u_n) = 0$.

3.c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.

Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = \alpha$, c'est-à-dire $2 \times 0,9^k - 3 = \alpha$. Comme $-2,889 < \alpha < -2,888$, cela donnerait $0,111 < 2 \times 0,9^k < 0,112$, soit $0,0555 < 0,9^k < 0,056$.

En appliquant le logarithme népérien (strictement croissant) : $\ln(0,0555) < k \ln(0,9) < \ln(0,056)$.
Comme $\ln(0,9) < 0$, diviser inverse les inégalités : $\frac{\ln(0,056)}{\ln(0,9)} < k < \frac{\ln(0,0555)}{\ln(0,9)}$.

Le calcul donne $\frac{\ln(0,056)}{\ln(0,9)} \approx 27,36$ et $\frac{\ln(0,0555)}{\ln(0,9)} \approx 27,44$: il faudrait donc un entier k strictement compris entre 27,36 et 27,44, ce qui est impossible.

Donc, la réponse est qu'il n'existe **aucun rang** $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = \alpha$.

3.d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.

D'après la question 3.b, $u_k = v_k \iff g(u_k) = 0$, ce qui équivaut (par définition de α comme unique solution de $g(x) = 0$ sur $] -3 ; -1]$, intervalle auquel appartient u_k) à $u_k = \alpha$. Or la question 3.c montre qu'aucun rang k ne vérifie $u_k = \alpha$. Donc, la réponse est qu'il n'existe **aucun rang** $k \in \mathbb{N}$ tel que $v_k = u_k$.

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 2)

Partie A — 1. Le plan est muni d'un repère orthogonal. On donne les représentations graphiques d'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f'' , notées $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$. Identifier, en justifiant, quelle courbe correspond à quelle fonction.

La courbe $\mathcal{C}_2$ reste strictement positive sur $\mathbb{R}$: si elle représentait une dérivée, la fonction associée serait strictement croissante partout, ce qu'aucune des deux autres courbes ne vérifie. $\mathcal{C}_2$ représente donc f elle-même, qui est strictement croissante.

La dérivée d'une fonction strictement croissante est positive : c'est donc $\mathcal{C}_3$, seule courbe restant positive et cohérente avec cette croissance, qui représente f' .

Par élimination, $\mathcal{C}_1$ représente f'' : on vérifie que f' (courbe $\mathcal{C}_3$) croît puis décroît à partir de l'abscisse 4, ce qui correspond bien au changement de signe de $\mathcal{C}_1$ autour de cette valeur.

Partie A — 2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse 4.

Ce coefficient directeur vaut $f'(4)$, c'est-à-dire l'ordonnée du point d'abscisse 4 sur la courbe $\mathcal{C}_3$ (courbe de f'), soit environ **3** par lecture graphique.

Partie A — 3. Donner, avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_1$.

Les points d'inflexion de $\mathcal{C}_1$ (courbe de f'') correspondent aux changements de sens de variation visibles sur le graphique, soit environ aux abscisses **3, 4 et 5**.

Partie B — Soit k un réel strictement positif et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{4}{1+e^{-kx}}$. 1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Comme $k > 0$, quand $x \rightarrow -\infty$, $-kx \rightarrow +\infty$ donc $e^{-kx} \rightarrow +\infty$ par composition ; par somme $1 + e^{-kx} \rightarrow +\infty$, donc, par quotient, $g(x) \rightarrow 0$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $-kx \rightarrow -\infty$ donc $e^{-kx} \rightarrow 0$ par composition ; par somme $1 + e^{-kx} \rightarrow 1$, donc, par quotient, $g(x) \rightarrow 4$.

Donc, la réponse est $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$.

Partie B — 2. Montrer que $g'(0) = k$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et quotient de fonctions dérivables ne s'annulant pas. En écrivant $g = \frac{4}{u}$ avec $u(x) = 1 + e^{-kx}$, on a $u'(x) = -ke^{-kx}$, donc $g' = -\frac{4u'}{u^2}$, soit $g'(x) = \frac{4ke^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}$.

En $x = 0$: $g'(0) = \frac{4ke^0}{(1+e^0)^2} = \frac{4k}{2^2} = \frac{4k}{4} = k$. Donc, la réponse est $g'(0) = k$.

Partie B — 3. Sachant qu'un logiciel de calcul formel donne $g''(x) = -4e^{kx}(e^{kx} - 1) \frac{k^2}{(e^{kx} + 1)^3}$, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion à l'abscisse 0.

La courbe admet un point d'inflexion en un réel où g'' s'annule en changeant de signe : il faut donc étudier le signe de $g''(x)$.

Le facteur $\frac{4k^2 e^{kx}}{(e^{kx} + 1)^3}$ est strictement positif pour tout réel x (exponentielle positive, $k^2 > 0$). Le signe de $g''(x)$ est donc celui de $-(e^{kx} - 1) = 1 - e^{kx}$.

Or $1 - e^{kx} > 0 \iff e^{kx} < 1 \iff kx < 0 \iff x < 0$ (car $k > 0$). Donc $g''(x)$ est strictement positive sur $] -\infty ; 0[$, nulle en 0, et strictement négative sur $]0 ; +\infty[$: g'' change bien de signe en 0.

Donc, la réponse est que la courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 2)

1. Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant. Affirmation :
la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.

Vraie. Pour tout entier naturel n , $n+1 \geq 1 > 0$, donc $\frac{1}{n+1} \leq 1$, d'où $-1 \leq -\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n+1} \leq 1$.

De plus, pour tout entier naturel n , $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc, en divisant par $n+1 > 0$: $-\frac{1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$.

En combinant les deux encadrements : $-1 \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq 1$. Donc, la réponse est que la suite u est bornée par -1 et 1 .

2. Affirmation : toute suite bornée est convergente.

Fausse. La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ est bornée par -1 et 1 , mais elle prend alternativement les valeurs -1 et 1 : elle n'admet pas de limite, donc elle ne converge pas. Ce contre-exemple suffit à invalider l'affirmation.

3. Affirmation : toute suite croissante tend vers $+\infty$.

Fausse. La suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = -\frac{1}{n}$ est croissante (car $\frac{1}{n}$ décroît) mais elle converge vers 0 et non vers $+\infty$. Ce contre-exemple suffit à invalider l'affirmation.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Affirmation : f est convexe sur l'intervalle $[-3 ; 1]$.

Fausse. Étudier la convexité de f revient à étudier le signe de f'' . On pose $u(x) = x^2 + 2x + 2$ (strictement positif sur $\mathbb{R}$ car de discriminant négatif), avec $u'(x) = 2x + 2$; $f = \ln(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$.

En dérivant à nouveau $f' = \frac{v}{w}$ avec $v(x) = 2x + 2$, $w(x) = x^2 + 2x + 2$, $v'(x) = 2$, $w'(x) = 2x + 2$:

$$f''(x) = \frac{v'w - w'v}{w^2} = \frac{2(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)^2}{w^2}.$$

Au numérateur : $2x^2 + 4x + 4 - (4x^2 + 8x + 4) = -2x^2 - 4x = -2x(x + 2)$. Comme $w^2 > 0$, $f''(x)$ est du signe de $-2x(x + 2)$, trinôme de coefficient dominant négatif, de racines -2 et 0 : il est positif entre les racines et négatif à l'extérieur.

$f''(x) > 0$ sur $] -2 ; 0[$ et $f''(x) < 0$ sur $] -\infty ; -2[\cup] 0 ; +\infty[$: f est donc convexe sur $[-2 ; 0]$ et concave ailleurs. Sur $[-3 ; 1]$, f n'est pas concave ni convexe partout (elle est concave près de -3 et de 1) : elle n'est donc pas convexe sur tout l'intervalle $[-3 ; 1]$.

5. On considère la fonction Python ‘mystere’ ci-dessous, qui prend en paramètre une liste L de nombres (‘len(L)’ renvoie le nombre d’éléments de L).

- def mystere(L) :
 - $M = L[0]$
 - for i in range(len(L)) :
 - if $L[i] > M$:
 - $M = L[i]$
 - return M
- # on initialise M avec le premier élément
 -
 - # on parcourt tous les indices de L
 - # si un élément dépasse M
 - # on met M à jour
 -

5. (suite) Affirmation : l’exécution de ‘mystere([2, 3, 7, 0, 6, 3, 2, 0, 5])’ renvoie 7.

Vraie. La variable M est initialisée avec le premier élément de la liste, puis à chaque étape, si un élément de la liste dépasse la valeur courante de M , M est remplacé par cet élément. L’algorithme calcule donc le maximum des éléments de la liste, qui vaut ici 7 (le plus grand des termes 2,3,7,0,6,3,2,0,5).

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 1)

1.a L’espace est muni d’un repère orthonormé. On donne $J(2 ; 0 ; 1)$, $K(1 ; 2 ; 1)$ et $L(-2 ; -2 ; -2)$. Montrer que le triangle JKL est rectangle en J.

$$\overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JL} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{JL} = (-1) \times (-4) + 2 \times (-2) + 0 \times (-3) = 4 - 4 + 0 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont orthogonaux, donc le triangle JKL est rectangle en J.

1.b Calculer la valeur exacte de l’aire du triangle JKL (en cm^2).

$$JK = \|\overrightarrow{JK}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5} \text{ et } JL = \|\overrightarrow{JL}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}.$$

$$\text{Le triangle étant rectangle en J, son aire vaut } \mathcal{A} = \frac{JK \times JL}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{145}}{2} \text{ cm}^2.$$

1.c Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l’angle géométrique $\widehat{JKL}$.

Le triangle JKL étant rectangle en J, on utilise SOH-CAH-TOA dans le triangle rectangle JKL :

$$\tan(\widehat{JKL}) = \frac{JL}{JK} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Donc, } \widehat{JKL} = \arctan\left(\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}\right) \approx 67,5^\circ.$$

2.a Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ est normal au plan (JKL).

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{JK} = 6 \times (-1) + 3 \times 2 + (-10) \times 0 = -6 + 6 + 0 = 0.$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{JL} = 6 \times (-4) + 3 \times (-2) + (-10) \times (-3) = -24 - 6 + 30 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (JKL), donc $\vec{n}$ est normal au plan (JKL).

2.b En déduire une équation cartésienne du plan (JKL).

Le plan (JKL), de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$, a une équation de la forme $6x + 3y - 10z + d = 0$.

$$\text{Comme } J(2; 0; 1) \text{ appartient au plan : } 6 \times 2 + 3 \times 0 - 10 \times 1 + d = 0 \iff 12 - 10 + d = 0 \iff d = -2.$$

Donc, une équation cartésienne du plan (JKL) est $6x + 3y - 10z - 2 = 0$.

3.a On note T le point de coordonnées (10; 9; -6). Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (JKL) et passant par T.

La droite Δ , orthogonale au plan (JKL), admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur; elle passe par

$$T(10; 9; -6). \text{ Une représentation paramétrique est donc : } \begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = 9 + 3t \\ z = -6 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3.b Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de T sur le plan (JKL).

H est l'unique point d'intersection de Δ et du plan (JKL). On remplace les coordonnées paramétriques dans l'équation du plan : $6(10 + 6t) + 3(9 + 3t) - 10(-6 - 10t) - 2 = 0$.

$$\text{En développant : } 60 + 36t + 27 + 9t + 60 + 100t - 2 = 0 \iff 145t + 145 = 0 \iff t = -1.$$

$$\text{En remplaçant } t = -1 : x = 10 + 6 \times (-1) = 4, y = 9 + 3 \times (-1) = 6, z = -6 - 10 \times (-1) = 4.$$

Donc, H a pour coordonnées (4; 6; 4).

3.c Sachant que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante, calculer la valeur exacte du volume du tétraèdre JKLT (en cm^3).

On prend pour base le triangle JKL, d'aire $\mathcal{B} = \frac{\sqrt{145}}{2} \text{ cm}^2$ (question 1.b), et pour hauteur la longueur TH, puisque H est le projeté orthogonal de T sur le plan (JKL).

$$\overrightarrow{TH} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}, \text{ donc } TH = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 10^2} = \sqrt{145}.$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{145}}{2} \times \sqrt{145} = \frac{145}{6}.$$

Donc, le volume du tétraèdre JKLT vaut $\frac{145}{6} \text{ cm}^3$.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 2)

Partie A — 1. Soit p la fonction définie sur $[-3 ; 4]$ par $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$. Étudier les variations de p sur $[-3 ; 4]$.

p est dérivable sur $[-3 ; 4]$, avec $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$, un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$.

Comme $\Delta < 0$ et que le coefficient dominant (3) est positif, $p'(x) > 0$ pour tout x de $[-3 ; 4]$: p est strictement croissante sur $[-3 ; 4]$.

Partie A — 2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet, sur $[-3 ; 4]$, une unique solution notée α .

$p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$. p est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[-3 ; 4]$, à valeurs entre -68 et 37 ; comme 0 appartient à cet intervalle, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une **unique solution** α dans $[-3 ; 4]$.

Partie A — 3. Donner une valeur approchée de α au dixième près.

À la calculatrice, $p(-0,2) \approx -0,13 < 0$ et $p(-0,1) \approx 0,47 > 0$: donc, $\alpha \approx -0,2$ au dixième près.

Partie A — 4. Donner le tableau de signes de p sur $[-3 ; 4]$.

p étant strictement croissante et s'annulant uniquement en $\alpha \approx -0,2$: $p(x) < 0$ sur $[-3 ; \alpha[$, $p(\alpha) = 0$, et $p(x) > 0$ sur $] \alpha ; 4]$.

Partie B — 1.a Soit f la fonction définie sur $[-3 ; 4]$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$, de courbe $\mathcal{C}_f$. Déterminer $f'(x)$.

f est dérivable sur $[-3 ; 4]$ (car $1+x^2 \neq 0$), et par la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - e^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1+x^2)^2} = \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2}.$$

Partie B — 1.b Justifier que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

$$f'(x) = 0 \iff (x-1)^2 e^x = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \text{ (car } e^x \neq 0) \iff x = 1.$$

Donc, $f'(1) = 0$: la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est horizontale, d'équation $y = f(1) = \frac{e}{2}$.

Partie B — 2.a Des concepteurs utilisent $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan, en estimant que le profil assure de bonnes sensations s'il possède au moins deux points d'inflexion. D'après le graphique fourni, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ?

Graphiquement, la courbe $\mathcal{C}_f$ semble convexe sur $[-3 ; 0]$, concave sur $[0 ; 1]$, puis de nouveau convexe sur $[1 ; 4]$: elle change donc deux fois de convexité, aux abscisses 0 et 1. Le toboggan semble assurer de bonnes sensations.

Partie B — 2.b On admet que, pour tout x de $[-3 ; 4]$, $f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$, où p est la fonction de la partie A. Confirmer, en justifiant, si le toboggan assure de bonnes sensations.

Sur $[-3 ; 4]$, $(1+x^2)^3 > 0$ et $e^x > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $p(x)(x-1)$.

D'après le tableau de signes de p (partie A, question 4) : $p(x) < 0$ sur $[-3 ; \alpha[$ et $p(x) > 0$ sur $]\alpha ; 4]$; par ailleurs $x-1 < 0$ sur $[-3 ; 1[$ et $x-1 > 0$ sur $]1 ; 4]$.

En croisant les signes : $p(x)(x-1)$ est positif sur $[-3 ; \alpha[$, négatif sur $]\alpha ; 1[$, puis positif sur $]1 ; 4]$: f'' change donc bien de signe en $x = \alpha$ et en $x = 1$.

$\mathcal{C}_f$ admet donc bien **deux points d'inflexion** (aux abscisses α et 1) : le toboggan assure de bonnes sensations, ce qui confirme la lecture graphique.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 2)

1. Le réel $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ est égal à : **a.** $1 - \frac{1}{2}\ln(3)$; **b.** $\frac{1}{2}\ln(3)$; **c.** $3\ln(3) + \frac{1}{2}$; **d.** $-\frac{1}{2}\ln(3)$.

$$a = \ln(3^2) + \ln(\sqrt{3}) - \ln(3) - \ln(3^2) = 2\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(3) - 2\ln(3) = -\frac{1}{2}\ln(3).$$

Réponse d.

2. On considère l'équation (E) : $\ln(x) + \ln(x-10) = \ln(3) + \ln(7)$, d'inconnue réelle x . a. 3 est solution ; b. $5 - \sqrt{46}$ est solution ; c. (E) admet une unique solution réelle ; d. (E) admet deux solutions réelles.

Le domaine de définition impose $x > 0$ et $x > 10$, donc $x \in]10 ; +\infty[$.

Sur ce domaine, $(E) \iff \ln(x(x-10)) = \ln(21) \iff x(x-10) = 21 \iff x^2 - 10x - 21 = 0$, un trinôme de discriminant $\Delta = 100 + 84 = 184 = 4 \times 46$, donc $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{46}$.

Les racines sont $x_1 = 5 - \sqrt{46}$ et $x_2 = 5 + \sqrt{46}$. Comme $\sqrt{46} > 5$ (car $46 > 25$), $x_1 < 0$ n'appartient pas au domaine, tandis que $x_2 > 10$ appartient au domaine.

L'équation (E) admet donc une unique solution réelle, $5 + \sqrt{46}$. **Réponse c.**

3. Soit f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2(-1 + \ln(x))$. a. $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$; b. f est croissante sur $]0 ; +\infty[$; c. $f'(\sqrt{e})$ est différent de 0 ; d. la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}e$ est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, avec $f'(x) = 2x(-1 + \ln(x)) + x^2 \times \frac{1}{x} = -2x + 2x \ln(x) + x = x(2 \ln(x) - 1)$.

$f'(x) = 0 \iff 2 \ln(x) - 1 = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$: la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$ est donc horizontale, d'équation $y = f(\sqrt{e})$.

$$f(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^2(-1 + \ln(\sqrt{e})) = e \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e.$$

Donc, la tangente au point d'abscisse $\sqrt{e}$ a bien pour équation $y = -\frac{1}{2}e$. **Réponse d.**

4. Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons. La probabilité de tirer exactement 2 jetons jaunes, arrondie au millièm, est : a. 0,683 ; b. 0,346 ; c. 0,230 ; d. 0,165.

Les tirages étant successifs, indépendants et avec remise, la variable X comptant le nombre de jetons jaunes obtenus suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$.

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \approx 0,346. \text{ Réponse b.}$$

5. Dans les mêmes conditions (sac de 20 jetons jaunes, 30 bleus, 5 tirages avec remise), la probabilité de tirer au moins un jeton jaune, arrondie au millièm, est : a. 0,078 ; b. 0,259 ; c. 0,337 ; d. 0,922.

$$X \sim \mathcal{B}\left(5 ; \frac{2}{5}\right). P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^5 \approx 0,922.$$

Réponse d.

6. Toujours dans les mêmes conditions, si on répète l'expérience un très grand nombre de fois, le nombre moyen de jetons jaunes obtenus est égal à : a. 0,4 ; b. 1,2 ; c. 2 ; d. 2,5.

L'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$ vaut $E(X) = np$. Ici, $E(X) = 5 \times \frac{2}{5} = 2$.

Réponse c.

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points $A(1 ; 3)$ et $B(3 ; 5)$, et on donne ci-dessus la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f ainsi que la tangente (AB) à $\mathcal{C}_f$ au point A. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

L'ordonnée du point A donne $f(1) = 3$. Le nombre dérivé $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente (AB) en A : $f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$.

Partie A — 2.a On admet que f est définie par $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où a et b sont des réels positifs. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

Comme $a \geq 0$ et $x^2 \geq 0$ pour tout réel x , on a $ax^2 + 1 \geq 1 > 0$: f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \frac{2ax}{ax^2 + 1}$ (dérivée de $\ln(u)$ égale à $\frac{u'}{u}$, avec $u(x) = ax^2 + 1$ et $u'(x) = 2ax$).

Partie A — 2.b Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Les résultats de la question 1 donnent le système
$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(a + 1) + b = 3 \\ \frac{2a}{a + 1} = 1 \end{cases}.$$

La deuxième équation donne $2a = a + 1 \iff a = 1$. En reportant dans la première : $\ln(1 + 1) + b = 3 \iff b = 3 - \ln 2$.

Donc, la réponse est $a = 1$ et $b = 3 - \ln 2$, ce qui donne, sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$.

Partie B — 1. On admet désormais que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$. Montrer que f est une fonction paire.

Pour tout réel x , $f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) + 3 - \ln 2 = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2 = f(x)$. Donc, f est une fonction paire (sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

Partie B — 2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$, et par composition avec la fonction $\ln$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

f étant paire, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B — 3. Déterminer l'expression de $f'(x)$, étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations complet (limites en $\pm\infty$ et valeur exacte du minimum).

Comme $x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x , f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Le dénominateur $x^2 + 1$ étant strictement positif, $f'(x)$ est du signe de $2x$: $f'(x) < 0$ sur $] -\infty ; 0[$ et $f'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$, avec $f'(0) = 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, avec un minimum en $x = 0$ valant $f(0) = \ln(1) + 3 - \ln 2 = 3 - \ln 2$.

Tableau de variations : f décroît de $+\infty$ (limite en $-\infty$) jusqu'au minimum $3 - \ln 2$ atteint en $x = 0$, puis croît de $3 - \ln 2$ jusqu'à $+\infty$ (limite en $+\infty$).

Partie B — 4. À l'aide du tableau de variations de f , donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet exactement deux solutions.

D'après le tableau de variations, f décroît strictement puis croît strictement de part et d'autre du minimum $3 - \ln 2$, avec pour limites $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Donc, la réponse est que l'équation $f(x) = k$ admet exactement deux solutions si et seulement si $k > 3 - \ln 2$.

Partie B — 5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

$$f(x) = 3 + \ln 2 \iff \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2 = 3 + \ln 2 \iff \ln(x^2 + 1) = 2 \ln 2 \iff \ln(x^2 + 1) = \ln 4.$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante, cette égalité équivaut à $x^2 + 1 = 4$, soit $x^2 = 3$, soit $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

Donc, la réponse est que l'ensemble des solutions est $S = \{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$.

Partie C — 1. On rappelle que $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$ sur $\mathbb{R}$. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Par lecture graphique de la courbe, la convexité de $\mathcal{C}_f$ semble changer aux points d'abscisses -1 et 1 : on peut conjecturer l'existence de **deux points d'inflexion, d'abscisses -1 et 1** .

Partie C — 2. Montrer que, pour tout réel x , $f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$.

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (numérateur $2x$, dénominateur $x^2 + 1$ ne s'annulant jamais), donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Avec } \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}, u(x) = 2x, u'(x) = 2, v(x) = x^2 + 1, v'(x) = 2x : f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Partie C — 3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Le dénominateur $(x^2 + 1)^2$ est toujours strictement positif, donc $f''(x)$ est du signe de $1 - x^2$, qui s'annule en $x = -1$ et $x = 1$, et est positif entre les deux racines, soit sur $] -1 ; 1[$.

f est convexe lorsque $f''(x) \geq 0$. Donc, la réponse est que f est convexe sur l'intervalle $[-1 ; 1]$, ce qui confirme la conjecture graphique de la question 1 (changements de convexité en $x = -1$ et $x = 1$).

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 2)

Partie A — 1. Sur un graphique (non reproduit ici) sont tracées les courbes représentatives $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'une fonction f et de sa dérivée f' , toutes deux définies sur $]3 ; +\infty[$: $\mathcal{C}_1$ part de $-\infty$ au voisinage de 3 et croît ensuite jusqu'à $+\infty$; $\mathcal{C}_2$ part de valeurs élevées au voisinage de 3 et décroît en restant positive. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente, en justifiant.

Si $\mathcal{C}_1$ représentait la dérivée f' , celle-ci serait toujours négative puis positive selon la lecture du graphique ; or la fonction représentée par $\mathcal{C}_2$ n'est pas décroissante puis croissante : elle est toujours décroissante. Il y a donc une contradiction.

$\mathcal{C}_2$ reste positive sur tout l'intervalle $]3 ; +\infty[$, ce qui est cohérent avec une fonction f strictement croissante sur cet intervalle (comme le montre $\mathcal{C}_1$) : une fonction croissante a une dérivée positive.

Donc, la réponse est que $\mathcal{C}_2$ représente la fonction dérivée f' , et $\mathcal{C}_1$ représente la fonction f .

Partie A — 2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.

Par lecture graphique de la courbe $\mathcal{C}_1$, on lit approximativement $f(5,6) \approx 3$. Donc, la réponse est que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution proche de $x = 5,6$.

Partie A — 3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f .

La courbe $\mathcal{C}_1$ « tourne le dos » à l'axe des abscisses de façon décroissante sur tout l'intervalle observé : elle est située sous chacune de ses tangentes. Donc, la réponse est que la fonction f semble concave sur $]3 ; +\infty[$.

Partie B — 1. Justifier que la quantité $\ln(x^2 - x - 6)$ est bien définie pour les valeurs de x de l'intervalle $I =]3 ; +\infty[$.

Le trinôme $x^2 - x - 6$ a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2$.

Ses racines sont donc $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$.

Un trinôme du second degré est du signe de son coefficient dominant (ici positif, $a = 1$) à l'extérieur de ses racines, et du signe opposé entre ses racines : $x^2 - x - 6 > 0$ pour $x \in]-\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[$.

Donc, la réponse est que $x^2 - x - 6 > 0$ sur $I =]3 ; +\infty[$, et donc $\ln(x^2 - x - 6)$ y est bien défini.

Partie B — 2. On admet que $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ sur I . Calculer les limites de f aux deux bornes de I , puis en déduire une équation d'une asymptote à la courbe de f .

Limite en $+\infty$: pour $x > 3$, on factorise $x^2 - x - 6 = x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right) = 1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x - 6 = +\infty$, puis par composition avec la fonction logarithme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en 3 : en écrivant $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, on a $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x+2)(x-3) = 5 \times 0^+ = 0^+$, donc par composition avec la fonction logarithme, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$.

Donc, la réponse est que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .

Partie B — 3.a Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$.

La fonction $x \mapsto x^2 - x - 6$ est dérivable et strictement positive sur I (question B.1), donc $f = \ln(x^2 - x - 6)$ est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables, et $f'(x) = \frac{(x^2 - x - 6)'}{x^2 - x - 6} = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$.

Donc, la réponse est $f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$.

Partie B — 3.b Étudier le sens de variation de f sur I , puis dresser son tableau de variations en y faisant figurer les limites aux bornes de I .

Sur I , le dénominateur $x^2 - x - 6$ est strictement positif (question B.1), donc $f'(x)$ est du signe du numérateur $2x - 1$.

Pour tout $x > 3$, on a $2x - 1 > 2 \times 3 - 1 = 5 > 0$, donc $f'(x) > 0$ sur tout l'intervalle I .

Donc, la réponse est que f est strictement croissante sur I , de $-\infty$ (limite en 3) à $+\infty$ (limite en $+\infty$).

Partie B — 4.a Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5 ; 6[$.

La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur I , donc en particulier sur $]5 ; 6[$.

$$f(5) = \ln(5^2 - 5 - 6) = \ln(14) \approx 2,64 < 3 \text{ et } f(6) = \ln(6^2 - 6 - 6) = \ln(24) \approx 3,18 > 3.$$

Comme 3 est une valeur intermédiaire entre $f(5)$ et $f(6)$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur $]5 ; 6[$.

Donc, la réponse est que l'équation $f(x) = 3$ admet bien une unique solution $\alpha \in]5 ; 6[$.

Partie B — 4.b Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.

La calculatrice donne $f(5,63) \approx 2,999 < 3$ et $f(5,64) \approx 3,004 > 3$.

Donc, la réponse est $5,63 < \alpha < 5,64$.

Partie B — 5.a Justifier que $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.

La fonction $f' = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$ est un quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas : elle est donc dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, $f''(x) = \frac{2 \times (x^2 - x - 6) - (2x - 1) \times (2x - 1)}{(x^2 - x - 6)^2}$.

On développe le numérateur : $2(x^2 - x - 6) - (2x - 1)^2 = 2x^2 - 2x - 12 - (4x^2 - 4x + 1) = 2x^2 - 2x - 12 - 4x^2 + 4x - 1 = -2x^2 + 2x - 13$.

Donc, la réponse est $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.

Partie B — 5.b Étudier la convexité de f sur I .

Le dénominateur $(x^2 - x - 6)^2$ est strictement positif sur I , donc $f''(x)$ est du signe du numérateur $-2x^2 + 2x - 13$.

Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times (-13) = 4 - 104 = -100 < 0$: il n'a donc pas de racine réelle et garde un signe constant, celui de son coefficient dominant $a = -2 < 0$: il est donc strictement négatif pour tout réel x .

Donc, la réponse est que $f''(x) < 0$ pour tout $x \in I$: la fonction f est concave sur I .

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x^2)$. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2022$: a. n'a aucune solution ; b. a exactement une solution ; c. a exactement deux solutions ; d. a une infinité de solutions.

$$f(x) = 2022 \iff \ln(1+x^2) = 2022 \iff 1+x^2 = e^{2022} \iff x^2 = e^{2022} - 1.$$

Le réel $e^{2022} - 1$ est strictement positif, donc cette dernière équation a exactement deux solutions opposées : $x = \sqrt{e^{2022} - 1}$ et $x = -\sqrt{e^{2022} - 1}$.

Donc, la réponse est **c**.

2. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x \ln(x) - x^2$, de courbe représentative $\mathcal{C}_g$. a. g est convexe sur $]0 ; +\infty[$; b. g est concave sur $]0 ; +\infty[$; c. $\mathcal{C}_g$ a exactement un point d'inflexion sur $]0 ; +\infty[$; d. $\mathcal{C}_g$ a exactement deux points d'inflexion sur $]0 ; +\infty[$.

g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables, avec $g'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 2x = \ln(x) - 2x + 1$.

g' est à son tour dérivable sur $]0 ; +\infty[$, avec $g''(x) = \frac{1}{x} - 2$.

$g''(x) = 0 \iff \frac{1}{x} = 2 \iff x = \frac{1}{2}$. De plus, $g''(x) = \frac{1-2x}{x}$ change de signe en $x = \frac{1}{2}$ (positif avant, négatif après, car $x > 0$).

g'' s'annule en changeant de signe une seule fois sur $]0 ; +\infty[$, donc $\mathcal{C}_g$ admet exactement un point d'inflexion, d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Donc, la réponse est **c**.

3. On considère la fonction f définie sur $] -1 ; 1[$ par $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Une primitive de f sur $] -1 ; 1[$ est la fonction : a. $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$; b. $g(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$; c. $g(x) = \frac{x^2}{2 \left(x - \frac{x^3}{3}\right)}$;

d. $g(x) = \frac{x^2}{2} \ln(1-x^2)$.

Testons la fonction g de la réponse a, définie par $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$ sur $] -1 ; 1[$.

En posant $u(x) = 1-x^2$, dérivable et strictement positive sur $] -1 ; 1[$, on a $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(u(x))$, donc $g'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} = f(x)$.

La fonction g de la réponse a est donc bien une primitive de f sur $] -1 ; 1[$.

Donc, la réponse est **a**.

4. La fonction $x \mapsto \ln(-x^2 - x + 6)$ est définie sur : **a.** $] - 3 ; 2[$; **b.** $] - \infty ; 6]$; **c.** $]0 ; +\infty[$; **d.** $]2 ; +\infty[$.

Cette fonction est définie exactement là où $-x^2 - x + 6 > 0$, c'est-à-dire là où $x^2 + x - 6 < 0$.

Le trinôme $x^2 + x - 6$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$, donc deux racines réelles $x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$.

Un trinôme du second degré de coefficient dominant positif est strictement négatif strictement entre ses deux racines : $x^2 + x - 6 < 0 \iff x \in] - 3 ; 2[$.

La fonction est donc définie sur $] - 3 ; 2[$, ce qui correspond à la réponse a.

5. On considère la fonction f définie sur $]0,5 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3 \ln(2x - 1)$. Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est : **a.** $y = 4x - 7$; **b.** $y = 2x - 4$; **c.** $y = -3(x - 1) + 4$; **d.** $y = 2x - 1$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$.

$$f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 3 \ln(2 \times 1 - 1) = 1 - 4 + 3 \ln(1) = -3 + 0 = -3.$$

$$f \text{ est dérivable sur }]0,5 ; +\infty[, \text{ avec } f'(x) = 2x - 4 + 3 \times \frac{2}{2x - 1} = 2x - 4 + \frac{6}{2x - 1}, \text{ donc } f'(1) = 2 - 4 + \frac{6}{1} = -2 + 6 = 4.$$

$$\text{Une équation de la tangente est donc } y = -3 + 4(x - 1) \iff y = 4x - 4 - 3 \iff y = 4x - 7.$$

Donc, la réponse est a.

6. L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x + 3) < 2 \ln(x + 1)$ est : **a.** $S =] - \infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$; **b.** $S =]1 ; +\infty[$; **c.** $S = \emptyset$; **d.** $S =] - 1 ; 1[$.

Pour que les deux logarithmes soient définis, il faut $x + 3 > 0$ et $x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -3$ et $x > -1$: l'inéquation n'a donc de sens que sur $] - 1 ; +\infty[$.

Sur cet intervalle, $2 \ln(x + 1) = \ln((x + 1)^2)$, et $\ln$ étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$: $\ln(x + 3) < \ln((x + 1)^2) \iff x + 3 < (x + 1)^2$.

$$x + 3 < x^2 + 2x + 1 \iff 0 < x^2 + x - 2.$$

Le trinôme $x^2 + x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc deux racines $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$; il est strictement positif à l'extérieur de ses racines, donc sur $] - \infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$.

En tenant compte de la condition $x > -1$ posée au début, l'ensemble des solutions est finalement $S =]1 ; +\infty[$, soit la réponse b.

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

Partie A — 1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x$. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$, donc par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$.

En $+\infty$: pour $x \neq 0$, on écrit $h(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$.

Par produit de limites (avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$), $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

Partie A — 2. Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, avec $h'(x) = e^x - 1$.

$h'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$, et de même $h'(x) < 0 \iff x < 0$, puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

h est donc strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ puis strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, avec un minimum en $x = 0$ valant $h(0) = e^0 - 0 = 1$.

Tableau de variation : h décroît de $+\infty$ à $h(0) = 1$ sur $] -\infty ; 0]$, puis croît de 1 à $+\infty$ sur $[0 ; +\infty[$.

Partie A — 3. En déduire que, si a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$, alors $h(a) - h(b) < 0$.

D'après la question précédente, h est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Si $0 < a < b$, alors par stricte croissance de h sur cet intervalle, $h(a) < h(b)$, ce qui équivaut à $h(a) - h(b) < 0$.

Partie B — 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$.

Comme $f' = f$ pour la fonction exponentielle, $f(0) = f'(0) = e^0 = 1$.

Donc, une équation de T est $y = 1 + 1 \times x$, soit $y = x + 1$.

Partie B — 2. On s'intéresse à l'écart, au voisinage de 0, entre T et $\mathcal{C}_f$, aux points d'abscisse $\frac{1}{n}$ (avec n entier naturel non nul). Cet écart est la différence des ordonnées des points de T et $\mathcal{C}_f$ de même abscisse. On pose, pour tout entier naturel non nul n , $u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ donc par composition, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^0 = 1.$$

Donc, par somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 - 0 - 1 = 0$.

Partie B — 3.a Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , $u_{n+1} - u_n = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$, où h est la fonction de la partie A.

$$u_{n+1} - u_n = \left[\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} - 1 \right] - \left[\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1 \right].$$

En développant, les termes constants -1 et $+1$ s'éliminent : $u_{n+1} - u_n = \exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} - \exp\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}$.

En regroupant : $u_{n+1} - u_n = \left[\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} \right] - \left[\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right] = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$,
puisque $h(x) = e^x - x$.

Partie B — 3.b En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Pour tout entier naturel non nul n , on a $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.

D'après la question 3 de la partie A (avec $a = \frac{1}{n+1}$ et $b = \frac{1}{n}$), on a donc $h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right) < 0$.

D'après la question précédente, cela signifie que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel non nul n : la suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Partie B — 4. Un tableau de valeurs approchées à 10^{-9} près donne : $u_1 \approx 0,718281828$; $u_2 \approx 0,148721271$; $u_3 \approx 0,062279092$; $u_4 \approx 0,034025417$; $u_5 \approx 0,021402758$; $u_6 \approx 0,014693746$; $u_7 \approx 0,010707852$; $u_8 \approx 0,008148453$; $u_9 \approx 0,006407958$; $u_{10} \approx 0,005170918$. Donner la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$ semble être inférieur à 10^{-2} .

La suite (u_n) étant strictement décroissante (question 3.b), on cherche dans le tableau le premier terme strictement inférieur à $10^{-2} = 0,01$.

On lit $u_7 \approx 0,010707852 > 0,01$, tandis que $u_8 \approx 0,008148453 < 0,01$.

Donc, la plus petite valeur de n pour laquelle l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$ semble inférieur à 10^{-2} est $n = 8$.

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{e^x}$. Quelle est l'expression de $f'(x)$:

a. e^{-x} ; b. xe^{-x} ; c. $(1-x)e^{-x}$; d. $(1+x)e^{-x}$?

En écrivant $f(x) = xe^{-x}$ (produit de x par e^{-x}), la formule de dérivation d'un produit donne, pour tout réel x : $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$.

Réponse c.

2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[-3 ; 1]$, dont on donne la courbe représentative de la fonction dérivée seconde f'' : celle-ci est positive sur $[-3 ; -1]$, s'annule en $x = -1$, puis est négative sur $[-1 ; 1]$. Que peut-on affirmer : a. f convexe sur $[-1 ; 1]$; b. f concave sur $[-2 ; 0]$; c. f' décroissante sur $[-2 ; 0]$; d. f' admet un maximum en $x = -1$?

Comme f'' est positive sur $[-3 ; -1]$, la fonction f' est croissante sur cet intervalle ; comme f'' est négative sur $[-1 ; 1]$, la fonction f' est décroissante sur cet intervalle.

La fonction f' est donc croissante puis décroissante, avec un changement de sens de variation en $x = -1$: f' admet donc un maximum local en $x = -1$.

Réponse d.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 e^{-x^2}$. Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, laquelle des expressions suivantes convient : a. $F(x) = -\frac{1}{6}(x^3 + 1)e^{-x^2}$; b. $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 e^{-x^2}$; c. $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2}$; d. $F(x) = x^2(3 - 2x^2)e^{-x^2}$?

Pour identifier la bonne primitive, on dérive chaque candidate et on compare le résultat à $f(x) = x^3 e^{-x^2}$. Testons la proposition c : $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2}$.

En utilisant la formule de dérivation d'un produit, avec $u(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)$ et $v(x) = e^{-x^2}$, on a $u'(x) = -x$ et $v'(x) = -2xe^{-x^2}$: $F'(x) = -xe^{-x^2} + \left(-\frac{1}{2}(x^2 + 1)\right) \times (-2xe^{-x^2}) = -xe^{-x^2} + x(x^2 + 1)e^{-x^2}$.

En factorisant : $F'(x) = e^{-x^2}(-x + x^3 + x) = x^3 e^{-x^2} = f(x)$. La proposition c convient bien.

Réponse c.

4. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$: a. -1 ; b. 1 ; c. $+\infty$; d. n'existe pas ?

Pour lever l'indétermination, on factorise le numérateur et le dénominateur par le terme dominant e^x (non nul) : $\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{e^x(1 + e^{-x})}{e^x(1 - e^{-x})} = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc par limite de quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$.

Réponse b.

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+1}$. La seule primitive F sur $\mathbb{R}$ de f telle que $F(0) = 1$ est : a. $x \mapsto 2e^{2x+1} - 2e + 1$; b. $x \mapsto 2e^{2x+1} - e$; c. $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x+1} - \frac{1}{2}e + 1$; d. $x \mapsto e^{x^2+x}$?

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. En remarquant que $f(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x+1}$ est de la forme $u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = 2x + 1$, une primitive générale de f s'écrit $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + k$, avec k une constante réelle.

La condition $F(0) = 1$ donne $\frac{1}{2}e^1 + k = 1$, soit $k = 1 - \frac{1}{2}e$.

On obtient donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + 1 - \frac{1}{2}e$.

Réponse c.

6. Une fonction f est définie et deux fois dérivable sur $[-2 ; 4]$; on donne sa courbe représentative, qui laisse apparaître un profil concave sur $[-2 ; 1]$ puis convexe sur $[1 ; 4]$, avec un point d'inflexion en $x = 1$. Parmi quatre courbes proposées, laquelle représente la fonction dérivée seconde f'' de f ?

Comme f est concave sur $[-2 ; 1]$, on a $f''(x) \leq 0$ sur cet intervalle ; comme f est convexe sur $[1 ; 4]$, on a $f''(x) \geq 0$ sur cet intervalle. La fonction f'' change donc de signe (de négatif à positif) en s'annulant en $x = 1$.

Parmi les quatre courbes proposées, une seule est négative sur $[-2 ; 1]$, s'annule en changeant de signe en $x = 1$, puis devient positive sur $[1 ; 4]$.

Réponse a.

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) + 1$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$. Déterminer la limite de f en 0, puis sa limite en $+\infty$.

On sait, par croissances comparées, que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$. Donc, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 + 1 = 1$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$; par limite de produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty$, puis par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2.a On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, de dérivée f' . Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 1 + \ln(x)$.

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme d'un produit de fonctions dérivables ($x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$) et d'une constante. En utilisant la formule de dérivation d'un produit, pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

2.b En déduire le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$, en y faisant figurer la valeur exacte de l'extremum et les limites.

$f'(x) \geq 0 \iff \ln(x) + 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq e^{-1}$ (la fonction exponentielle étant strictement croissante).

Donc, $f'(x) < 0$ sur $]0 ; e^{-1}[$ et $f'(x) > 0$ sur $]e^{-1} ; +\infty[$: la fonction f est donc strictement décroissante sur $]0 ; e^{-1}[$, puis strictement croissante sur $]e^{-1} ; +\infty[$.

La fonction f admet donc un minimum en $x = e^{-1}$, valant $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) + 1 = e^{-1} \times (-1) + 1 = 1 - e^{-1}$.

Le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$ est donc : f décroît de 1 (limite en 0, non atteinte) jusqu'au minimum $1 - e^{-1}$ atteint en $x = e^{-1}$, puis croît de $1 - e^{-1}$ jusqu'à $+\infty$ (limite en $+\infty$).

2.c Justifier que, pour tout $x \in]0 ; 1[$, on a $f(x) \in]0 ; 1[$.

D'après le tableau de variation précédent, sur l'intervalle $]0 ; 1[$, la fonction f prend ses valeurs entre son minimum $1 - e^{-1}$ et sa valeur en 1 (non atteinte sur l'intervalle ouvert) : $f(1) = 1 \times \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1$.

Ainsi, pour tout x de $]0 ; 1[$, on a $1 - e^{-1} \leq f(x) < 1$.

Or $e^{-1} < 1$ donc $1 - e^{-1} > 0$: on a donc bien $f(x) \in]0 ; 1[$ pour tout $x \in]0 ; 1[$.

3.a Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

On calcule $f'(1) = \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1$ et $f(1) = 1$ (calculé à la question précédente).

Donc, une équation de (T) est $y = 1 \times (x - 1) + 1 = x - 1 + 1 = x$, c'est-à-dire $y = x$.

3.b Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction f' , définie par $f'(x) = \ln(x) + 1$, est elle-même dérivable sur $]0 ; +\infty[$, de dérivée $f''(x) = \frac{1}{x}$.

Or $\frac{1}{x} > 0$ pour tout x de $]0 ; +\infty[$, donc $f''(x) > 0$ sur cet intervalle : la fonction f est donc strictement convexe sur $]0 ; +\infty[$.

3.c En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \geq x$.

La fonction f est convexe sur $]0 ; +\infty[$, donc sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier au-dessus de (T) , d'équation $y = x$.

Donc, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \geq x$.

4.a On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 \in]0 ; 1[$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 1$.

Initialisation : par hypothèse, $u_0 \in]0 ; 1[$, soit $0 < u_0 < 1$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit n un entier naturel fixé, et supposons que $0 < u_n < 1$. D'après la question 2.c, comme $u_n \in]0 ; 1[$, on a $f(u_n) \in]0 ; 1[$, c'est-à-dire $0 < u_{n+1} < 1$: la propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire ; donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 1$.

4.b En utilisant le résultat de la question 3.c, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

D'après la question 3.c, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \geq x$. Comme, d'après la question précédente, $u_n > 0$ pour tout entier naturel n , on peut appliquer cette inégalité à $x = u_n$: $f(u_n) \geq u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$.

La suite (u_n) est donc croissante.

4.c En déduire que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante (question précédente) et majorée par 1 (d'après la question 4.a). Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie.

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1.a Une urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs, tous indiscernables au toucher. On tire au hasard, successivement et avec remise, deux jetons de cette urne. Un joueur perd 9 € si les deux jetons tirés sont blancs, perd 1 € si les deux jetons tirés sont noirs, et gagne 5 € si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

Notons B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et N l'évènement « le jeton tiré est noir ». Comme l'urne contient 3 jetons blancs et 2 jetons noirs sur 5 au total, $p(B) = \frac{3}{5}$ et $p(N) = \frac{2}{5}$.

Les tirages étant effectués avec remise, les probabilités sont les mêmes au premier et au second tirage : l'arbre pondéré comporte, à la première branche, B (probabilité $\frac{3}{5}$) ou N (probabilité $\frac{2}{5}$);

puis, sous chacune de ces deux branches, à nouveau B (probabilité $\frac{3}{5}$) ou N (probabilité $\frac{2}{5}$) au second tirage, ces deux tirages étant indépendants du fait de la remise.

1.b Calculer la probabilité de perdre 9 € sur une partie.

Perdre 9 € correspond à tirer deux jetons blancs. Notons X la variable aléatoire donnant le gain du joueur sur une partie ; comme les deux tirages sont indépendants (tirages avec remise) : $p(X = -9) = p(B) \times p(B) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Donc, la probabilité de perdre 9 € sur une partie est égale à $\frac{9}{25}$ (soit **0,36**).

2.a On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et N jetons noirs, avec $N \geq 2$ (le nombre exact de jetons noirs n'étant pas connu). Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie. Déterminer la loi de probabilité de X .

L'urne contient à présent $N+3$ jetons au total, dont 3 blancs et N noirs. Sur un tirage, $p(B) = \frac{3}{N+3}$ et $p(N) = \frac{N}{N+3}$. La variable X prend les valeurs -9 , -1 et 5 .

Pour perdre 9 € (deux jetons blancs, tirages indépendants) : $p(X = -9) = \left(\frac{3}{N+3}\right)^2 = \frac{9}{(N+3)^2}$.

Pour perdre 1 € (deux jetons noirs) : $p(X = -1) = \left(\frac{N}{N+3}\right)^2 = \frac{N^2}{(N+3)^2}$.

Pour gagner 5 € (un jeton de chaque couleur, dans l'un ou l'autre ordre) : $p(X = 5) = 2 \times \frac{3}{N+3} \times \frac{N}{N+3} = \frac{6N}{(N+3)^2}$.

La loi de probabilité de X est donc donnée par : $p(X = -9) = \frac{9}{(N+3)^2}$, $p(X = -1) = \frac{N^2}{(N+3)^2}$ et $p(X = 5) = \frac{6N}{(N+3)^2}$.

2.b Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle $x : -x^2 + 30x - 81 > 0$.

Le trinôme $-x^2 + 30x - 81$ a pour discriminant $\Delta = 30^2 - 4 \times (-1) \times (-81) = 900 - 324 = 576 = 24^2$.

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-30 - 24}{2 \times (-1)} = \frac{-54}{-2} = 27$ et $x_2 = \frac{-30 + 24}{2 \times (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$.

Le coefficient dominant du trinôme étant $-1 < 0$, celui-ci est positif entre ses racines et négatif à l'extérieur : donc, $-x^2 + 30x - 81 > 0 \iff x \in]3 ; 27[$.

2.c En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.

Le jeu est favorable au joueur si, et seulement si, l'espérance de gain $E(X)$ est strictement positive. D'après la loi de probabilité établie à la question 2.a : $E(X) = (-9) \times \frac{9}{(N+3)^2} + (-1) \times \frac{N^2}{(N+3)^2} + 5 \times \frac{6N}{(N+3)^2} = \frac{-81 - N^2 + 30N}{(N+3)^2} = \frac{-N^2 + 30N - 81}{(N+3)^2}$.

Comme $(N+3)^2 > 0$, $E(X)$ est du signe de son numérateur $-N^2 + 30N - 81$. D'après la question précédente, ce numérateur est strictement positif si, et seulement si, $N \in]3 ; 27[$.

Or N est un entier naturel (un nombre de jetons), donc $E(X) > 0$ si, et seulement si, N est un entier vérifiant $4 \leq N \leq 26$.

Donc, le jeu est favorable au joueur lorsque l'urne contient entre 4 et 26 jetons noirs (bornes incluses).

2.d Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?

Le gain moyen est maximal lorsque la fonction g , définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(N) = \frac{-N^2 + 30N - 81}{(N+3)^2}$ (qui correspond à $E(X)$ vue comme fonction de N), atteint son maximum, c'est-à-dire lorsque $g'(N) = 0$ en changeant de signe.

La fonction g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. En utilisant la formule de dérivation d'un quotient : $g'(N) = \frac{(-2N+30)(N+3)^2 - (N+3)^{2'} \times (-N^2 + 30N - 81)}{(N+3)^4}$ avec $(N+3)^{2'} = 2(N+3)$.

En simplifiant par $(N+3)$ au numérateur et au dénominateur : $g'(N) = \frac{(-2N+30)(N+3) - 2(-N^2 + 30N - 81)}{(N+3)^3}$

Développons le numérateur : $(-2N+30)(N+3) = -2N^2 - 6N + 30N + 90 = -2N^2 + 24N + 90$, puis $-2(-N^2 + 30N - 81) = 2N^2 - 60N + 162$. La somme donne : $-2N^2 + 24N + 90 + 2N^2 - 60N + 162 = -36N + 252$.

Donc, $g'(N) = \frac{-36N + 252}{(N+3)^3} = \frac{-36(N-7)}{(N+3)^3}$. Comme $(N+3)^3 > 0$, $g'(N)$ est du signe de $-(N-7)$: positif avant $N = 7$, négatif après.

La fonction g est donc croissante sur $[0 ; 7]$ puis décroissante sur $[7 ; +\infty[$: elle admet un maximum en $N = 7$.

Donc, le joueur doit demander que l'urne contienne **7 jetons noirs** pour que son gain moyen soit maximal.

3. On suppose que l'urne contient désormais 7 jetons noirs et 3 jetons blancs. On observe 10 joueurs qui effectuent chacun une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un joueur gagnant 5 euros ?

Avec $N = 7$ jetons noirs et 3 jetons blancs (10 jetons au total), la probabilité de gagner 5 € sur une partie est, d'après la question 2.a : $p = \frac{6 \times 7}{(7+3)^2} = \frac{42}{100} = \frac{21}{50} = 0,42$.

Notons Y la variable aléatoire donnant le nombre de joueurs (parmi les 10) gagnant 5 €. Les 10 parties sont indépendantes et identiques, chacune ayant deux issues possibles (gagner 5 € ou non) : Y suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,42$, notée $\mathcal{B}(10 ; 0,42)$.

La probabilité d'avoir au moins un joueur gagnant 5 € est $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0)$, avec $p(Y = 0) = (1 - 0,42)^{10} = 0,58^{10}$.

À la calculatrice, $0,58^{10} \approx 0,0043$, donc $p(Y \geq 1) \approx 1 - 0,0043 \approx 0,996$.

Donc, la probabilité qu'au moins un joueur parmi les 10 gagne 5 € est d'environ **0,996** : cet événement est quasiment certain.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

Partie A — 1.a Un patient absorbe un comprimé de médicament. On modélise la quantité de médicament présente dans son sang, en mg, par la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(t) = 3te^{-0,5t+1}$, où t est le temps écoulé en heures depuis la prise du comprimé. On admet que f est dérivable sur $[0 ; 10]$. Montrer que, pour tout t de $[0 ; 10]$, $f'(t) = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$.

En écrivant $f = uv$ avec $u(t) = 3t$ et $v(t) = e^{-0,5t+1}$, on a $u'(t) = 3$ et $v'(t) = -0,5e^{-0,5t+1}$. Donc $f'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) = 3e^{-0,5t+1} + 3t \times (-0,5)e^{-0,5t+1} = (3 - 1,5t)e^{-0,5t+1} = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$.

Partie A — 1.b En déduire le tableau de variations de f sur $[0 ; 10]$.

Pour tout t de $[0 ; 10]$, $e^{-0,5t+1} > 0$, donc $f'(t)$ est du signe de $-0,5t + 1$.

Or $-0,5t + 1 \geq 0 \iff t \leq 2$. Donc $f'(t) \geq 0$ sur $[0 ; 2]$ et $f'(t) \leq 0$ sur $[2 ; 10]$.

On calcule $f(0) = 0$, $f(2) = 6e^0 = 6$ et $f(10) = 30e^{-4} \approx 0,55$.

Donc f est strictement croissante sur $[0 ; 2]$, puis strictement décroissante sur $[2 ; 10]$, avec un maximum de 6 atteint en $t = 2$.

Partie A — 1.c Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament est-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité maximale ?

D'après le tableau de variations, le maximum de f est atteint en $t = 2$, et $f(2) = 6$. Donc, la quantité de médicament est maximale au bout de 2 heures, et elle vaut alors 6 mg.

Partie A — 2.a Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur $[0 ; 2]$, notée α , dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près. On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur $[2 ; 10]$, notée β , avec $\beta \approx 3,46$.

Sur $[0 ; 2]$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante, à valeurs entre $f(0) = 0$ et $f(2) = 6$.

Comme $5 \in [0 ; 6]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution α dans $[0 ; 2]$.

À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 1,02$.

Partie A — 2.b Le traitement est efficace lorsque la quantité de médicament est supérieure ou égale à 5 mg. Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament avec ce protocole.

D'après le tableau de variations de f (croissante puis décroissante, avec $f(\alpha) = f(\beta) = 5$), on a $f(t) \geq 5$ pour $t \in [\alpha ; \beta]$. La durée d'efficacité est donc $\beta - \alpha \approx 3,46 - 1,02 = 2,44$ heures, soit $2,44 \times 60 \approx 146,3$ minutes. Donc, la durée d'efficacité du médicament est d'environ 146 minutes (à la minute près).

Partie B — 1. On injecte au patient une dose initiale de 2 mg puis, chaque heure, une dose de 1,8 mg. Chaque heure écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 % par rapport à la quantité présente juste après l'injection. On modélise par la suite (u_n) , où u_n est la quantité de médicament (en mg) juste après l'injection de la n -ième heure, avec $u_0 = 2$. Calculer u_1 .

Au bout d'une heure, il reste 70 % de la quantité u_0 , puis on réinjecte 1,8 mg. Donc $u_1 = 0,7 \times u_0 + 1,8 = 0,7 \times 2 + 1,8 = 3,2$. Donc, $u_1 = 3,2$ mg.

Partie B — 2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

Entre l'instant n et l'instant $n + 1$, la quantité de médicament diminue de 30 %, donc il n'en reste que 70 % de u_n , c'est-à-dire $0,7u_n$. On ajoute ensuite la nouvelle injection de 1,8 mg. Donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

Partie B — 3.a Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$, donc $u_0 \leq u_1 < 6$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq u_{n+1} < 6$. Comme la fonction $x \mapsto 0,7x + 1,8$ est croissante (coefficient 0,7 positif), on peut appliquer cette fonction aux trois membres de l'inégalité : $0,7u_n + 1,8 \leq 0,7u_{n+1} + 1,8 < 0,7 \times 6 + 1,8$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$ (car $0,7 \times 6 + 1,8 = 6$). La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

Partie B — 3.b En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante (car $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n) et majorée par 6. Donc, d'après le théorème de convergence monotone, **la suite (u_n) converge vers une limite finie ℓ .**

Partie B — 3.c Déterminer la valeur de ℓ . Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

La suite (u_n) converge vers ℓ , et $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$ pour tout n . Par unicité de la limite, ℓ vérifie $\ell = 0,7\ell + 1,8$.

$$\ell = 0,7\ell + 1,8 \iff 0,3\ell = 1,8 \iff \ell = 6.$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$: à long terme, la quantité de médicament présente dans le sang du patient juste après chaque injection se stabilise **autour de 6 mg**.

Partie B — 4.a On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 6 - u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique de raison 0,7, et préciser son premier terme.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - (0,7u_n + 1,8) = 4,2 - 0,7u_n = 0,7(6 - u_n) = 0,7v_n$ (car $0,7 \times 6 = 4,2$). Donc, (v_n) est géométrique de raison $q = 0,7$, de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = 4$.

Partie B — 4.b Déterminer l'expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .

Comme (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 4$ et de raison 0,7, on a $v_n = 4 \times 0,7^n$ pour tout entier naturel n . Or $v_n = 6 - u_n$, donc $u_n = 6 - v_n = 6 - 4 \times 0,7^n$.

Partie B — 4.c Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente est supérieure ou égale à 5,5 mg. Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées.

On résout $u_n \geq 5,5 : 6 - 4 \times 0,7^n \geq 5,5 \iff -4 \times 0,7^n \geq -0,5 \iff 0,7^n \leq 0,125 = \frac{1}{8}$ (en divisant par -4 , ce qui change le sens de l'inégalité).

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[: 0,7^n \leq \frac{1}{8} \iff \ln(0,7^n) \leq \ln\left(\frac{1}{8}\right) \iff n \times \ln(0,7) \leq -\ln(8)$.

Comme $\ln(0,7) < 0$, on divise par $\ln(0,7)$ en changeant le sens de l'inégalité : $n \geq \frac{-\ln(8)}{\ln(0,7)}$.

À la calculatrice, $\frac{-\ln(8)}{\ln(0,7)} \approx 5,83$, donc la plus petite valeur entière de n qui convient est $n = 6$.

Cela signifie que c'est à partir de l'injection u_6 que la quantité de médicament atteint 5,5 mg. Les injections réalisées sont donc celles correspondant à $u_0, u_1, \dots, u_6$, soit **7 injections au total**.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte ; aucune justification n'est demandée sur la copie, mais nous la donnons ici. 1. La courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :
a. $x = -2$; b. $y = -1$; c. $y = -2$; d. $y = 0$.

Pour $x \neq 0$, en factorisant par x^2 au numérateur et au dénominateur : $f(x) = \frac{x^2(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \frac{-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{3}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow \frac{-2}{1} = -2$. La droite d'équation $y = -2$ est donc asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$. **Réponse c.**

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{x^2}$. La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par : a. $F(x) = \frac{x^2}{2} e^{x^2}$; b. $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$; c. $F(x) = (1 + 2x^2) e^{x^2}$; d. $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}$.

On remarque que $f(x) = x e^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2}$, qui est de la forme $\frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$. Les primitives de $u' e^u$ sont les fonctions $e^u + k$ ($k \in \mathbb{R}$), donc les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2} e^{x^2} + k$. La condition $F(0) = 1$ donne $\frac{1}{2} \times e^0 + k = 1 \iff \frac{1}{2} + k = 1 \iff k = \frac{1}{2}$.
Donc $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}$. **Réponse d.**

3. On donne la représentation graphique de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$: la courbe de f' part de valeurs négatives en 0, croise l'axe des abscisses en $x = 2$, atteint un maximum aux alentours de $x = 3$, puis redescend en restant positive. On peut affirmer que la fonction f est : a. concave sur $]0 ; +\infty[$; b. convexe sur $]0 ; +\infty[$; c. convexe sur $[0 ; 2]$; d. convexe sur $[2 ; +\infty[$.

f est convexe sur un intervalle exactement lorsque sa dérivée f' y est croissante. D'après la représentation graphique, la courbe de f' est croissante de $x = 0$ jusqu'à son maximum (situé vers $x = 3$), donc en particulier sur tout l'intervalle $[0 ; 2]$, inclus dans $[0 ; 3]$. Donc f est convexe sur $[0 ; 2]$.

Réponse c.

4. Parmi les primitives de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$: a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$; b. toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$; c. certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$; d. toutes sont croissantes sur $] -\infty ; 0]$ et décroissantes sur $[0 ; +\infty[$.

Pour tout réel x , $e^{-x^2} > 0$, donc $f(x) = 3e^{-x^2} + 2 > 2 > 0$: la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Or, si F est une primitive de f , alors $F' = f$. Comme f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ tout entier, toute primitive F de f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. **Réponse a.**

5. La limite en $+\infty$ de f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2 \ln x}{3x^2 + 1}$ est égale à : a. $\frac{2}{3}$; b. $+\infty$; c. $-\infty$; d. 0.

On écrit $f(x) = \frac{2 \ln x}{3x^2 + 1} = \frac{2}{3} \times \frac{\frac{\ln x}{x^2}}{1 + \frac{1}{3x^2}}$ (en factorisant x^2 au dénominateur). Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right) = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{3} \times \frac{0}{1} = 0$. **Réponse d.**

6. L'équation $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$: a. trois solutions ; b. deux solutions ; c. une seule solution ; d. aucune solution.

On pose $X = e^x$ (avec $X > 0$ nécessairement). Comme $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$, l'équation devient $X^2 + X - 12 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 1 + 48 = 49 = 7^2$, donc les solutions sont $X = \frac{-1 - 7}{2} = -4$ et $X = \frac{-1 + 7}{2} = 3$. Comme $X = e^x > 0$, seule la solution $X = 3$ est acceptable, ce qui donne $e^x = 3 \iff x = \ln(3)$. L'équation admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}$. **Réponse c.**

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 2)

Pour les questions 1 à 3, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative de la dérivée f' est donnée : f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ et sa courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ (courbe positive avant, négative après). **Question 1** : que peut-on affirmer sur f ? a. f admet un maximum en $-\frac{3}{2}$; b. f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$; c. f admet un minimum en $-\frac{1}{2}$; d. la courbe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse -1 .

Par lecture graphique, f' est positive sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$ et négative sur $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$: f est donc croissante puis décroissante, avec un changement de sens de variation en $-\frac{1}{2}$.

f admet donc un maximum en $-\frac{1}{2}$. Donc, la réponse est **b**.

Question 2 : a. f est convexe sur $]-\infty ; -\frac{3}{2}[$; b. f est convexe sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$; c. la courbe de f n'admet pas de point d'inflexion ; d. f est concave sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$.

Une fonction est convexe sur un intervalle lorsque sa dérivée y est croissante. Or, par lecture graphique, la courbe de f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$: f' est donc croissante sur $]-\infty ; -\frac{3}{2}[$.

f est donc convexe sur cet intervalle. Donc, la réponse est **a**.

Question 3 : la dérivée seconde f'' de f vérifie : a. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in]-\infty ; -\frac{1}{2}[$; b. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in [-2 ; -1]$; c. $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$; d. $f''(-3) = 0$.

D'après la question précédente, f' est croissante sur $]-\infty ; -\frac{3}{2}[$ et, par lecture graphique, décroissante sur $]-\frac{3}{2} ; +\infty[$: f' change donc de sens de variation en $-\frac{3}{2}$, où elle admet un maximum.

Comme f'' est la dérivée de f' , on a donc $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$. Donc, la réponse est **c**.

Question 4 : on considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n \leq w_n$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3$. a. la suite (v_n) converge ; b. si (u_n) est croissante alors (v_n) est minorée par u_0 ; c. $1 \leq v_0 \leq 3$; d. la suite (v_n) diverge.

Si (u_n) est croissante, alors pour tout entier naturel n , $u_0 \leq u_n$. Or, par hypothèse, $u_n \leq v_n$ pour tout n , donc $u_0 \leq v_n$ pour tout entier naturel n .

La suite (v_n) est donc minorée par u_0 . Donc, la réponse est **b**.

(Les autres propositions sont fausses en général : le théorème des gendarmes ne s'applique ici que si u_n et w_n avaient la même limite, ce qui n'est pas le cas puisque $1 \neq 3$; on ne peut donc rien

conclure sur la convergence de (v_n) , ni sur l'encadrement de v_0 en particulier.)

Question 5 : on considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$. **a.** la suite (u_n) diverge ; **b.** la suite (u_n) converge ; **c.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$; **d.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

L'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$, vraie pour tout entier naturel n non nul, signifie que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

De plus, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq 1$: la suite (u_n) est donc majorée par 1 à partir du rang 2, et donc bornée.

Une suite croissante et majorée converge, d'après le théorème de convergence monotone : (u_n) **converge**. On ne peut cependant pas déterminer sa limite exacte avec les seules informations données (l'encadrement ne donne qu'une majoration, pas la valeur précise de la limite). Donc, la réponse est **b**.

Question 6 : on considère une suite réelle (u_n) telle que, pour tout entier naturel n , $n < u_n < n + 1$. **a.** il existe un entier naturel N tel que u_N est un entier ; **b.** la suite (u_n) est croissante ; **c.** la suite (u_n) est convergente ; **d.** la suite (u_n) n'a pas de limite.

Au rang n : $n < u_n < n + 1$. Au rang $n + 1$: $n + 1 < u_{n+1} < n + 2$.

En particulier, $u_n < n + 1 < u_{n+1}$, donc $u_n < u_{n+1}$ pour tout entier naturel n .

La suite (u_n) est donc croissante. Donc, la réponse est **b**.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 2)

Pour les questions 1 à 3, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative de la dérivée f' est donnée : f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ et sa courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ (courbe positive avant, négative après). **Question 1 :** que peut-on affirmer sur f ? **a.** f admet un maximum en $-\frac{3}{2}$; **b.** f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$; **c.** f admet un minimum en $-\frac{1}{2}$; **d.** la courbe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse -1 .

Par lecture graphique, f' est positive sur $\left] -\infty ; -\frac{1}{2} \right[$ et négative sur $\left] -\frac{1}{2} ; +\infty \right[$: f est donc croissante puis décroissante, avec un changement de sens de variation en $-\frac{1}{2}$.

f admet donc un maximum en $-\frac{1}{2}$. Donc, la réponse est **b**.

Question 2 : a. f est convexe sur $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[$; b. f est convexe sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$; c. la courbe de f n'admet pas de point d'inflexion; d. f est concave sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$.

Une fonction est convexe sur un intervalle lorsque sa dérivée y est croissante. Or, par lecture graphique, la courbe de f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$: f' est donc croissante sur $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[$.

f est donc convexe sur cet intervalle. Donc, la réponse est a.

Question 3 : la dérivée seconde f'' de f vérifie : a. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$; b. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in [-2 ; -1]$; c. $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$; d. $f''(-3) = 0$.

D'après la question précédente, f' est croissante sur $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[$ et, par lecture graphique, décroissante sur $\left]-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$: f' change donc de sens de variation en $-\frac{3}{2}$, où elle admet un maximum.

Comme f'' est la dérivée de f' , on a donc $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$. Donc, la réponse est c.

Question 4 : on considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n \leq w_n$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3$. a. la suite (v_n) converge; b. si (u_n) est croissante alors (v_n) est minorée par u_0 ; c. $1 \leq v_0 \leq 3$; d. la suite (v_n) diverge.

Si (u_n) est croissante, alors pour tout entier naturel n , $u_0 \leq u_n$. Or, par hypothèse, $u_n \leq v_n$ pour tout n , donc $u_0 \leq v_n$ pour tout entier naturel n .

La suite (v_n) est donc minorée par u_0 . Donc, la réponse est b.

(Les autres propositions sont fausses en général : le théorème des gendarmes ne s'applique ici que si u_n et w_n avaient la même limite, ce qui n'est pas le cas puisque $1 \neq 3$; on ne peut donc rien conclure sur la convergence de (v_n) , ni sur l'encadrement de v_0 en particulier.)

Question 5 : on considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$. a. la suite (u_n) diverge; b. la suite (u_n) converge; c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$; d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

L'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$, vraie pour tout entier naturel n non nul, signifie que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

De plus, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq 1$: la suite (u_n) est donc majorée par 1 à partir du rang 2, et donc bornée.

Une suite croissante et majorée converge, d'après le théorème de convergence monotone : (u_n) converge. On ne peut cependant pas déterminer sa limite exacte avec les seules informations

données (l'encadrement ne donne qu'une majoration, pas la valeur précise de la limite). Donc, la réponse est **b**.

Question 6 : on considère une suite réelle (u_n) telle que, pour tout entier naturel n , $n < u_n < n + 1$. **a.** il existe un entier naturel N tel que u_N est un entier ; **b.** la suite (u_n) est croissante ; **c.** la suite (u_n) est convergente ; **d.** la suite (u_n) n'a pas de limite.

Au rang n : $n < u_n < n + 1$. Au rang $n + 1$: $n + 1 < u_{n+1} < n + 2$.

En particulier, $u_n < n + 1 < u_{n+1}$, donc $u_n < u_{n+1}$ pour tout entier naturel n .

La suite (u_n) est donc croissante. Donc, la réponse est **b**.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - x - 2$, deux fois dérivable sur cet intervalle, de dérivée f' , de dérivée seconde f'' , et de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère. **1.a** Démontrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \ln(x)$.

La fonction f est une somme de produits de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$, donc f est dérivable sur cet intervalle, et : $f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

1.b Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = e$.

On calcule $f(e) = e \ln(e) - e - 2 = e \times 1 - e - 2 = -2$ (car $\ln(e) = 1$), et $f'(e) = \ln(e) = 1$.

L'équation de la tangente en un point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, donc ici : $y = 1 \times (x - e) + (-2) = x - e - 2$.

Donc, la réponse est $T: y = x - e - 2$.

1.c Justifier que la fonction f est convexe sur $]0 ; +\infty[$.

D'après la question 1.a, $f'(x) = \ln(x)$, donc $f''(x) = \frac{1}{x}$.

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a $x > 0$, donc $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$: la fonction f est donc **convexe** sur cet intervalle.

1.d En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T .

Comme la fonction f est convexe sur $]0 ; +\infty[$, sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier au-dessus de la tangente T .

2.a Calculer la limite de f en 0.

On sait, par croissances comparées, que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$, et par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Par somme de limites : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 - 0 - 2 = -2$.

2.b Démontrer que la limite de f en $+\infty$ vaut $+\infty$.

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on peut factoriser : $f(x) = x [\ln(x) - 1] - 2$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x) - 1] = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc, par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x) - 1] = +\infty$.

Par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - 2 = +\infty$.

3. Dresser le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

D'après la question 1.a, $f'(x) = \ln(x)$. Or $\ln(x)$ est strictement négatif sur $]0 ; 1[$, nul en $x = 1$, et strictement positif sur $]1 ; +\infty[$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0 ; 1]$, puis strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$: elle admet un minimum en $x = 1$.

Ce minimum vaut $f(1) = 1 \times \ln(1) - 1 - 2 = 0 - 1 - 2 = -3$.

Le tableau de variations de f part donc de la limite -2 en 0, décroît jusqu'au minimum -3 atteint en $x = 1$, puis croît vers $+\infty$.

4.a Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0 ; +\infty[$.

Sur $]0 ; 1]$, f est strictement décroissante et son maximum sur cet intervalle est $f(0^+) = -2$ (limite en 0) : donc $f(x) < 0$ pour tout x de $]0 ; 1]$, si bien que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $[1 ; +\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante, avec $f(1) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Comme 0 est compris entre -3 et $+\infty$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

Donc, la réponse est : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$, avec $\alpha \in [1 ; +\infty[$.

4.b Justifier que α appartient à l'intervalle $]4,3 ; 4,4[$.

On calcule $f(4,3) = 4,3 \ln(4,3) - 4,3 - 2 \approx -0,028 < 0$ et $f(4,4) = 4,4 \ln(4,4) - 4,4 - 2 \approx 0,119 > 0$.

Comme f est strictement croissante et continue sur $[1 ; +\infty[$, et que $f(4,3)$ et $f(4,4)$ sont de signes contraires, la valeur α qui annule f est encadrée par 4,3 et 4,4.

Donc, la réponse est $\alpha \in]4,3 ; 4,4[$.

4.c En déduire le signe de f sur $]0 ; +\infty[$.

D'après le tableau de variations de la question 3 et l'existence du seul zéro α de f (question 4.a), on peut conclure sur le signe de f .

Sur $]0 ; \alpha[$, $f(x) < 0$; en $x = \alpha$, $f(\alpha) = 0$; sur $]\alpha ; +\infty[$, $f(x) > 0$.

5. On considère la fonction Python suivante, où l'on suppose le module `math` importé :
`def seuil(pas) : x=4.3 ; while x*log(x)-x-2 < 0 : x=x+pas ; return x.` Quelle valeur renvoie l'appel `seuil(0.01)`, et comment interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice ?

- La fonction part de $x = 4,3$ et lui ajoute $0,01$ tant que $f(x)$ reste strictement négatif.
- Elle s'arrête dès que $f(x)$ devient positif ou nul, et renvoie alors cette valeur de x .
- En simulant ce programme pas à pas, on constate que $f(x)$ reste négatif jusqu'à $x = 4,31$ ($f(4,31) < 0$), puis devient positif dès $x = 4,32$ ($f(4,32) > 0$).
- L'appel `seuil(0.01)` renvoie donc la valeur $4,32$.
- Comme f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$ et que $f(4,31) < 0 < f(4,32)$, ceci fournit l'encadrement $4,31 < \alpha < 4,32$, c'est-à-dire un encadrement de α à $0,01$ près.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Peut-on affirmer qu'elle diverge vers $+\infty$, qu'elle diverge vers $-\infty$, qu'elle n'a pas de limite, ou qu'elle converge ?

Pour tout entier naturel n , on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. Comme $n+1 \geq 1 > 0$, en divisant par $n+1$:

$$-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n+1}\right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La suite (u_n) admet donc une limite finie : **elle converge**.

2. On considère deux suites (v_n) et (w_n) liées par $w_n = e^{-2v_n} + 2$. Soit a un réel strictement positif, avec $v_0 = \ln(a)$. Que vaut w_0 : $\frac{1}{a^2} + 2$, $\frac{1}{a^2 + 2}$, $-2a + 2$, ou $\frac{1}{-2a} + 2$?

On remplace v_0 par $\ln(a)$ dans l'expression de w_0 : $w_0 = e^{-2v_0} + 2 = e^{-2\ln(a)} + 2$.

Or $e^{-2\ln(a)} = e^{\ln(a^{-2})} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ (car $a > 0$), donc $w_0 = \frac{1}{a^2} + 2$.

Donc, la réponse est $w_0 = \frac{1}{a^2} + 2$.

3. On sait que la suite (v_n) de la question précédente est croissante. Peut-on affirmer que (w_n) est décroissante et majorée par 3, décroissante et minorée par 2, croissante et majorée par 3, ou croissante et minorée par 2 ?

Comme (v_n) est croissante, pour tout entier naturel n : $v_n \leq v_{n+1}$, donc $-2v_n \geq -2v_{n+1}$ (multiplication par -2 , qui renverse le sens de l'inégalité).

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cette inégalité entraîne $e^{-2v_n} \geq e^{-2v_{n+1}}$, puis, en ajoutant 2 des deux côtés : $e^{-2v_n} + 2 \geq e^{-2v_{n+1}} + 2$, soit $w_n \geq w_{n+1}$.

La suite (w_n) est donc décroissante.

Par ailleurs, pour tout réel β , $e^\beta > 0$, donc $w_n = e^{-2v_n} + 2 > 2$ pour tout entier naturel n : la suite (w_n) est minorée par 2.

Donc, la réponse est : la suite (w_n) est décroissante et minorée par 2.

4. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}$.

Pour tout entier naturel n , laquelle de ces expressions donne a_n : $4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2$, $-\frac{2}{3^n} + 4$,

$4 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$, ou $2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8n}{3}$?

Cherchons le réel ℓ tel que la suite constante égale à ℓ soit solution de la relation de récurrence :

$$\ell = \frac{1}{3}\ell + \frac{8}{3} \iff \frac{2}{3}\ell = \frac{8}{3} \iff \ell = 4.$$

Posons alors, pour tout entier naturel n , $b_n = a_n - 4$. On a $b_{n+1} = a_{n+1} - 4 = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3} - 4 = \frac{1}{3}(b_n + 4) + \frac{8}{3} - 4 = \frac{1}{3}b_n + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} - 4 = \frac{1}{3}b_n + 4 - 4 = \frac{1}{3}b_n$.

La suite (b_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = a_0 - 4 = 2 - 4 = -2$.

Pour tout entier naturel n : $b_n = b_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{2}{3^n}$.

Donc $a_n = b_n + 4 = -\frac{2}{3^n} + 4$.

5. On considère une suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right)$. Peut-on affirmer que cette suite est croissante, décroissante, non monotone, ou que son sens de variation dépend de b_0 ?

Pour tout entier naturel n : $b_{n+1} - b_n = \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right)$.

Or, quel que soit le réel b_n , on a $(b_n)^2 \geq 0$, donc $(b_n)^2 + 3 \geq 3$.

Comme $3 > 2$, on en déduit $(b_n)^2 + 3 > 2$, donc $0 < \frac{2}{(b_n)^2 + 3} < 1$.

La fonction logarithme népérien étant strictement négative sur $]0 ; 1[$, on a $\ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right) < 0$, donc $b_{n+1} - b_n < 0$.

Cette inégalité est vraie pour tout entier naturel n , quel que soit le premier terme b_0 : donc, la réponse est que la suite (b_n) est décroissante.

6. On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthogonal. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet-elle une asymptote verticale et une asymptote horizontale, une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale, aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale, ou aucune des deux ?

Au voisinage de 0 (avec $x > 0$) : $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0^+$, donc, par quotient de limites, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$: la courbe $\mathcal{C}_g$ admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

Au voisinage de $+\infty$: par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (l'exponentielle l'emporte sur x). La courbe $\mathcal{C}_g$ ne présente donc aucune asymptote horizontale en $+\infty$.

Donc, la réponse est : la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{x^2+1}$, et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Laquelle de ces expressions donne $F(x)$ pour tout réel x : $\frac{1}{2}x^2 e^{x^2+1}$, $(1 + 2x^2) e^{x^2+1}$, e^{x^2+1} , ou $\frac{1}{2}e^{x^2+1}$?

Posons $u(x) = x^2 + 1$, de dérivée $u'(x) = 2x$. On peut alors écrire $f(x) = x e^{x^2+1} = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{u(x)} = \frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$.

Or une primitive de $u' e^u$ est e^u , donc une primitive de $\frac{1}{2} u' e^u$ est $\frac{1}{2} e^u$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} e^{x^2+1}$.

Vérification directe : si $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2+1}$, alors $F'(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2+1} = x e^{x^2+1} = f(x)$, ce qui confirme le résultat.

Donc, la réponse est $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2+1}$.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 1)

1.a. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x)$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

Quand x tend vers 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -6x = 0$, tandis que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} 4\ln(x) = -\infty$.

Par somme de limites, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

1.b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Pour $x > 0$, on factorise : $x^2 - 6x = x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{6}{x}\right) = 1$, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right) = +\infty$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4\ln(x) = +\infty$, donc, par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2.a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et $f'(x) = 2x - 6 + \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$.

2.b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f .

Comme $x > 0$ sur l'intervalle d'étude, le signe de $f'(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ est celui du numérateur $2x^2 - 6x + 4$, c'est-à-dire celui de $x^2 - 3x + 2$ (même signe, car on divise par $2 > 0$).

Ce trinôme a pour racines évidentes 1 et 2 (leur somme vaut 3 et leur produit 2, ce qui correspond bien aux coefficients), donc $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Un trinôme du second degré de coefficient dominant positif est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur : $f'(x) < 0$ sur $]1 ; 2[$ et $f'(x) > 0$ sur $]0 ; 1[\cup]2 ; +\infty[$, avec $f'(1) = f'(2) = 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; 1]$, strictement décroissante sur $[1 ; 2]$, puis strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.

On calcule les valeurs aux bornes : $f(1) = 1 - 6 + 4\ln(1) = 1 - 6 + 0 = -5$, et $f(2) = 4 - 12 + 4\ln(2) = 4\ln(2) - 8 \approx -5,23$.

Le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$ part donc de $-\infty$ (limite en 0), croît jusqu'à -5 en $x = 1$, décroît jusqu'à $4\ln(2) - 8$ en $x = 2$, puis croît vers $+\infty$ (limite en $+\infty$).

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4 ; 5]$.

On calcule les images des bornes : $f(4) = 16 - 24 + 4 \ln(4) = -8 + 8 \ln(2) \approx -2,45$ et $f(5) = 25 - 30 + 4 \ln(5) = 4 \ln(5) - 5 \approx 1,44$.

Ainsi $f(4) < 0 < f(5)$. Or, d'après la question précédente, l'intervalle $[4 ; 5]$ est inclus dans $[2 ; +\infty[$, sur lequel f est continue (car dérivable) et strictement croissante.

Donc, d'après le théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[4 ; 5]$.

4.a. On admet que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}$. Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$ et préciser les coordonnées exactes des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Comme $x > 0$, le dénominateur x^2 est strictement positif, donc le signe de $f''(x)$ est celui du numérateur $2x^2 - 4$.

On résout $2x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$; seule la solution $x = \sqrt{2}$ appartient à $]0 ; +\infty[$.

Le trinôme $2x^2 - 4$ est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur, donc, restreint à $]0 ; +\infty[$: $f''(x) < 0$ sur $]0 ; \sqrt{2}[$ et $f''(x) > 0$ sur $]\sqrt{2} ; +\infty[$.

Donc f est concave sur $]0 ; \sqrt{2}]$ et convexe sur $[\sqrt{2} ; +\infty[$.

Comme f'' s'annule en $x = \sqrt{2}$ en changeant de signe, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion, d'abscisse $\sqrt{2}$.

Son ordonnée vaut $f(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \ln(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \times \frac{1}{2} \ln(2) = 2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln(2)$.

Donc, le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées exactes $(\sqrt{2} ; 2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln(2))$.

4.b. On note A le point de coordonnées $(\sqrt{2} ; f(\sqrt{2}))$. Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$ et M le point de coordonnées $(t ; f(t))$. En utilisant la question 4.a., indiquer, selon la valeur de t , les positions relatives du segment $[AM]$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Le segment $[AM]$ est une corde de la courbe $\mathcal{C}_f$ joignant le point d'inflexion A au point M.

Si $t \in]0 ; \sqrt{2}[$, les points A et M sont tous deux situés sur la partie de $\mathcal{C}_f$ où f est concave : une corde d'une courbe concave est toujours située en dessous de la courbe, donc le segment $[AM]$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$.

Si $t \in]\sqrt{2} ; +\infty[$, les points A et M sont tous deux situés sur la partie de $\mathcal{C}_f$ où f est convexe : une corde d'une courbe convexe est toujours située au-dessus de la courbe, donc le segment $[AM]$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 1)

1.a. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 e^x$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. Calculer u_1 puis u_2 (valeurs exactes puis approchées à 10^{-3} près).

$$u_1 = f(u_0) = f(-1) = (-1)^3 e^{-1} = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,368.$$

$$u_2 = f(u_1) = (-e^{-1})^3 \times e^{-e^{-1}} = -e^{-3} \times e^{-e^{-1}} = -e^{-3-e^{-1}} \approx -0,034.$$

1.b. Le code Python ci-dessous définit une fonction `fonc(n)` qui, partant de `u=-1`, applique `n` fois de suite l'instruction `u = u**3*exp(u)` avant de renvoyer `u`. Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc(2)`, arrondie à 10^{-3} près.

La boucle applique deux fois la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ à partir de $u_0 = -1$, donc `fonc(2)` renvoie la valeur de u_2 , soit environ **-0,034**.

2.a. Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) = x^2 e^x (x + 3)$.

La fonction $f(x) = x^3 e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. En dérivant ce produit, on obtient $f'(x) = 3x^2 \times e^x + x^3 \times e^x = x^2 e^x (3 + x)$, ce qui est bien le résultat annoncé.

2.b. Justifier le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (minimum en $x = -3$, limites 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$).

Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ et $e^x > 0$, donc le signe de $f'(x) = x^2 e^x (x + 3)$ est celui de $(x + 3)$, sauf en $x = 0$ où $f'(x) = 0$ car $x^2 = 0$.

On a $x + 3 < 0 \iff x < -3$: donc $f'(x) < 0$ sur $] -\infty ; -3[$, et f y est strictement décroissante.

On a $x + 3 > 0 \iff x > -3$: donc $f'(x) > 0$ sur $] -3 ; +\infty[$ (sauf au point isolé $x = 0$ où f' s'annule sans changer de signe), et f y est strictement croissante.

La fonction f admet donc un minimum en $x = -3$, qui vaut $f(-3) = (-3)^3 \times e^{-3} = -27e^{-3} = -\frac{27}{e^3} \approx -1,344$.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc, par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Ceci justifie bien le tableau de variations donné dans l'énoncé.

2.c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

Initialisation : on a $u_0 = -1$ et $u_1 = -e^{-1} \approx -0,368$. On vérifie bien $-1 \leq -1 \leq -0,368 \leq 0$, donc l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : supposons que, pour un entier naturel n fixé, on ait $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

D'après la question 2.b., la fonction f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$, donc en particulier sur $[-1 ; 0]$, qui contient tous les termes encadrés par hypothèse de récurrence.

En appliquant f , qui est croissante sur cet intervalle, à chaque membre de l'inégalité $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$, on obtient $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(0)$, c'est-à-dire $u_1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(0)$.

Or $f(0) = 0^3 \times e^0 = 0$ et $u_1 = -e^{-1} \approx -0,368 \geq -1$, donc on obtient bien $-1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0$: la relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et il est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

2.d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est donc croissante.

Toujours d'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq 0$, donc $u_n \leq 0$ (en particulier pour $u_0 = -1 \leq 0$) : la suite (u_n) est majorée par 0.

Donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) , croissante et majorée, est convergente vers une limite ℓ vérifiant $\ell \leq 0$.

2.e. On note ℓ la limite de (u_n) , solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer ℓ , sachant que l'équation $x^2e^x - 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $] -1 ; 0[$.

D'après la question 2.c., tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[-1 ; 0]$, donc $\ell \in [-1 ; 0]$.

On résout l'équation $f(x) = x$ sur cet intervalle : $x^3e^x = x \iff x^3e^x - x = 0 \iff x(x^2e^x - 1) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul, donc $x = 0$ ou $x^2e^x - 1 = 0$.

Or, par hypothèse, l'équation $x^2e^x - 1 = 0$ n'a pas de solution dans $] -1 ; 0[$, donc, sur l'intervalle $[-1 ; 0]$, la seule solution possible de $f(x) = x$ est $x = 0$ (qui appartient bien à $[-1 ; 0]$).

Donc, $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 1)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. **1.a**
Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 , sous forme de fractions irréductibles.

$$u_1 = \frac{u_0}{1+u_0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}.$$

1.b Recopier et compléter les lignes 3 et 6 du script Python ci-dessous pour que ‘liste(k)’ prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des valeurs de u_0 à u_k .

- def liste(k) :
- L = []
- u = 1
- for i in range(0, k+1) :
- L.append(u)
- u = u / (1 + u)
- return L

2. On admet que, pour tout entier naturel n , u_n est strictement positif. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

$$\text{On étudie le signe de } u_{n+1} - u_n \text{ pour tout entier naturel } n : u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{u_n - u_n - u_n^2}{1+u_n} = \frac{-u_n^2}{1+u_n}.$$

Comme u_n est strictement positif pour tout n , on a $u_n^2 > 0$ et $1 + u_n > 0$, donc $\frac{-u_n^2}{1+u_n} < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel n .

Donc, la réponse est que la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

La suite (u_n) est strictement décroissante (question précédente) et minorée par 0 (car u_n est strictement positif pour tout n , donc en particulier $u_n \geq 0$). Donc, la réponse est que, d'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) **converge** vers une limite réelle ℓ , avec $\ell \geq 0$.

4. Déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n) .

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+x}$. On a alors $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

La fonction f est continue sur $]0 ; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. La limite ℓ de la suite (u_n) vérifie donc l'égalité $f(\ell) = \ell$.

On résout cette équation : $\frac{\ell}{1+\ell} = \ell \iff \ell = \ell(1+\ell) \iff \ell = \ell + \ell^2 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0$.

Donc, la réponse est que la suite (u_n) converge vers **0**.

5.a Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .

D'après les premiers termes calculés à la question 1.a ($u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{3}$, $u_3 = \frac{1}{4}$), on peut conjecturer que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{n+1}$.

5.b Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

Notons P_n la proposition : $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Initialisation : pour $n = 0$, $\frac{1}{0+1} = 1 = u_0$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que P_n soit vraie pour un entier naturel n fixé, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{n+1}$. Montrons que P_{n+1} est alors vraie.

On a $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)+1}$: la relation est donc vraie au rang $n+1$, ce qui montre que P_{n+1} est vraie.

Comme P_0 est vraie, et que pour tout entier naturel n , P_n vraie entraîne P_{n+1} vraie, on peut conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 2)**1. QCM. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - x + 1$. Parmi quatre expressions proposées, indiquer celle de la fonction dérivée f' .**

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x > 0$: $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

Donc, la réponse est $f'(x) = \ln(x)$.

2. On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 [1 - \ln(x)]$. Parmi quatre affirmations sur la limite de g en 0, indiquer la correcte.

En développant, $g(x) = x^2 - x^2 \ln(x)$. D'une part, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$.

D'autre part, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0$.

Par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 - 0 = 0$. Donc, la réponse est $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 0,9x^2 - 0,1x$. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , on factorise : $f(x) = x(x^2 - 0,9x - 0,1)$. Donc $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 - 0,9x - 0,1 = 0$.

Pour l'équation du second degré $x^2 - 0,9x - 0,1 = 0$, on remarque que $x = 1$ est une racine évidente, car $1^2 - 0,9 \times 1 - 0,1 = 1 - 0,9 - 0,1 = 0$.

Le produit des deux racines d'un trinôme $x^2 + bx + c$ vaut c : ici le produit des racines vaut $-0,1$, donc la seconde racine est $\frac{-0,1}{1} = -0,1$.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc exactement trois solutions réelles : $-0,1$, 0 et 1 . Donc, la réponse est **3 solutions**.

4. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, indiquer, parmi quatre expressions, celle d'une primitive K de k .

On teste la fonction K définie sur $\mathbb{R}$ par $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$. Comme H est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une primitive de h), K est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une constante par une composée de fonctions dérivables.

Pour tout réel x : $K'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times H'(2x) = H'(2x) = h(2x)$, car $H' = h$ (H étant une primitive de h).

Donc $K'(x) = h(2x) = k(x)$ pour tout réel x : K est bien une primitive de k sur $\mathbb{R}$. Donc, la réponse est $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$.

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. Indiquer, parmi quatre équations proposées, celle de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Pour tout réel x : $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x)e^x$.

On calcule $f(1) = 1 \times e^1 = e$ et $f'(1) = (1+1)e^1 = 2e$.

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2e(x - 1) + e = 2ex - 2e + e = 2ex - e$.

Donc, la réponse est $y = 2ex - e$.

6. Indiquer, parmi quatre propositions, celle qui caractérise les entiers naturels n solutions de l'inéquation $(0,2)^n < 0,001$.

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, donc, pour tout entier naturel n : $(0,2)^n < 0,001 \iff \ln((0,2)^n) < \ln(0,001) \iff n \ln(0,2) < \ln(0,001)$.

Comme $0,2 < 1$, on a $\ln(0,2) < 0$, donc diviser par $\ln(0,2)$ inverse le sens de l'inégalité : $n \ln(0,2) < \ln(0,001) \iff n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)}$.

À la calculatrice, $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)} \approx 4,29$. Les entiers naturels strictement supérieurs à 4,29 sont donc les entiers supérieurs ou égaux à 5.

Donc, la réponse est : les entiers naturels n tels que $n \geq 5$.

Bac Terminale 2021 — Métropole, Mayotte, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

1. QCM. On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$, dont la dérivée seconde est $f''(x) = \frac{2e^{2x}(2x^2 - 2x + 1)}{x^3}$. Parmi quatre expressions proposées, laquelle est celle de $f'(x)$?

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. En dérivant un quotient : $f'(x) = \frac{2e^{2x} \times x - e^{2x} \times 1}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x - 1)}{x^2}$.
Donc, la réponse est **c**.

2. Toujours à propos de f , laquelle de ces quatre affirmations sur les variations de f est exacte ?

Sur $]0 ; +\infty[$, $x^2 > 0$ et $e^{2x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $2x - 1$.

$2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$; $2x - 1 < 0$ pour $x < \frac{1}{2}$ et $2x - 1 > 0$ pour $x > \frac{1}{2}$.

Donc f est décroissante sur $]0 ; \frac{1}{2}[$ et croissante sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$: f admet donc un minimum en $\frac{1}{2}$. Donc, la réponse est **c**.

3. Quelle est la limite de f en $+\infty$, parmi les quatre propositions ?

On écrit $f(x) = 2 \times \frac{e^{2x}}{2x}$. En posant $X = 2x$, quand $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow +\infty$ également.

Par croissances comparées, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Donc, la réponse est **a**.

4. Laquelle de ces quatre affirmations sur la convexité de f est exacte ?

Sur $]0 ; +\infty[$, $x^3 > 0$ et $2e^{2x} > 0$, donc $f''(x)$ est du signe du trinôme $2x^2 - 2x + 1$.

Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 4 - 8 = -4 < 0$: il est donc toujours strictement positif (du signe de son coefficient dominant, positif).

Ainsi $f''(x) > 0$ pour tout x de $]0 ; +\infty[$: f est **convexe** sur $]0 ; +\infty[$. Donc, la réponse est **b**.

Bac Terminale 2021 — Métropole, Mayotte, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

Partie I — Cécile sort des gâteaux du congélateur, où ils étaient à -19°C , pour les poser sur une terrasse à 25°C . Au bout de 10 minutes, ils sont à $1,3^\circ\text{C}$. En supposant que la température augmente à vitesse constante (même hausse chaque minute), quelle serait la température des gâteaux au bout de 25 minutes ? Ce modèle est-il pertinent ?

En 10 minutes, la température a augmenté de $1,3 - (-19) = 20,3^\circ\text{C}$, soit une hausse constante supposée de $\frac{20,3}{10} = 2,03^\circ\text{C}$ par minute.

Au bout de 25 minutes, la hausse totale serait de $25 \times 2,03 = 50,75^\circ\text{C}$, donc une température de $-19 + 50,75 = 31,75^\circ\text{C}$.

Or la température de la terrasse est de 25°C : les gâteaux ne peuvent pas dépasser cette température ambiante. Donc, **ce modèle n'est pas pertinent**.

Partie II — On note T_n la température des gâteaux, en degré Celsius, n minutes après leur sortie du congélateur, avec $T_0 = -19$. On admet la relation $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$ pour tout entier naturel n . 1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$.

En développant : $T_{n+1} - T_n = -0,06 T_n + 0,06 \times 25 = -0,06 T_n + 1,5$.

D'où $T_{n+1} = T_n - 0,06 T_n + 1,5 = 0,94 T_n + 1,5$.

2. Calculer T_1 et T_2 (arrondir au dixième).

Avec $n = 0$: $T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = -17,86 + 1,5 = -16,36$, soit $T_1 \approx -16,4$.

Avec $n = 1$: $T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5 = -15,3784 + 1,5 = -13,8784$, soit $T_2 \approx -13,9$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $T_n \leq 25$. Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'énoncé ?

Initialisation. $T_0 = -19 \leq 25$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons que, pour un entier n , $T_n \leq 25$. En multipliant par $0,94 > 0$: $0,94 T_n \leq 0,94 \times 25 = 23,5$.

En ajoutant 1,5 aux deux membres : $0,94 T_n + 1,5 \leq 25$, soit $T_{n+1} \leq 25$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $T_n \leq 25$.

Ce résultat était prévisible : la température des gâteaux ne peut pas dépasser la température ambiante de la terrasse, qui est justement de 25°C .

4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n) .

D'après la relation de récurrence, $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$.

D'après la question précédente, $T_n \leq 25$ pour tout n , donc $T_n - 25 \leq 0$, donc $-0,06 \times (T_n - 25) \geq 0$.

Ainsi $T_{n+1} - T_n \geq 0$ pour tout n : la suite (T_n) est **croissante**.

5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.

La suite (T_n) est croissante (question précédente) et majorée par 25 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite ℓ vérifiant $\ell \leq 25$.

6.a On pose, pour tout entier naturel n , $U_n = T_n - 25$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94 T_n + 1,5 - 25 = 0,94 T_n - 23,5$.

Or $0,94 \times (T_n - 25) = 0,94 T_n - 23,5$, donc $U_{n+1} = 0,94 \times (T_n - 25) = 0,94 U_n$.

La suite (U_n) est donc **géométrique de raison** 0,94, de premier terme $U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44$.

6.b En déduire que, pour tout entier naturel n , $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$.

Comme (U_n) est géométrique de raison 0,94 et de premier terme -44 : $U_n = -44 \times 0,94^n$ pour tout n .

Or $U_n = T_n - 25$, donc $T_n = U_n + 25 = -44 \times 0,94^n + 25$.

6.c En déduire la limite de la suite (T_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Comme $0 < 0,94 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$, donc par somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 25$.

Cela signifie que la température des gâteaux se rapproche indéfiniment de la température ambiante de la terrasse, 25°C , sans jamais la dépasser, ce qui est cohérent avec la situation physique.

7.a Le fabricant conseille de consommer les gâteaux une demi-heure après leur sortie du congélateur. Quelle température ont-ils alors atteinte (arrondir à l'entier le plus proche) ?

Avec $n = 30$ minutes : $T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25 \approx 18,1$. Donc, les gâteaux ont atteint une température d'environ **18 °C**.

7.b Cécile aime déguster ces gâteaux encore frais, à 10°C . Donner un encadrement, entre deux entiers consécutifs, du nombre de minutes après lesquelles elle doit les déguster.

À la calculatrice, $T_{17} \approx 9,6$ et $T_{18} \approx 10,6$: la température franchit donc 10°C entre les minutes 17 et 18.

Donc, Cécile doit déguster son gâteau **entre la 17^e et la 18^e minute** après sa sortie du congélateur.

7.c Le programme Python suivant doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geq 10$. Recopier et compléter les lignes manquantes.

- def seuil() :
- n = 0
- T = -19
- while T < 10 :
- T = 0.94 * T + 1.5
- n = n + 1
- return n

Bac Terminale 2021 — Amérique du Nord

On étudie une population animale d'une île, modélisée par la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,6$ et $u_{n+1} = 0,75 u_n(1 - 0,15 u_n)$, où u_n désigne (en milliers) le nombre d'individus au début de l'année $2020 + n$. L'espèce est menacée d'extinction si la population devient inférieure ou égale à 20 individus. **1. Estimer le nombre d'individus au début de 2021 puis de 2022.**

2021 correspond à $n = 1$: $u_1 = 0,75 \times 0,6 \times (1 - 0,15 \times 0,6) = 0,45 \times 0,91 = 0,4095$, soit environ **410 individus**.

2022 correspond à $n = 2$: $u_2 = 0,75 \times 0,4095 \times (1 - 0,15 \times 0,4095) \approx 0,307125 \times 0,938575 \approx 0,2883$, soit environ **288 individus**.

2. On pose $f(x) = 0,75x(1 - 0,15x)$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$. Montrer que f est croissante sur $[0 ; 1]$ et dresser son tableau de variations.

f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0 ; 1]$, et sur cet intervalle : $f'(x) = 0,75(1 - 0,15x) - 0,75x \times 0,15 = 0,75 - 0,225x$.

Or $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 0,225x \leq 0,225 \Rightarrow 0,525 \leq f'(x) \leq 0,75$.

Donc $f'(x) > 0$ sur $[0 ; 1]$: f est strictement croissante sur cet intervalle, de $f(0) = 0$ à $f(1) = 0,75 \times 0,85 = 0,6375$.

3. Résoudre dans $[0 ; 1]$ l'équation $f(x) = x$.

Sur $[0 ; 1]$: $f(x) = x \iff 0,75x(1 - 0,15x) - x = 0 \iff x[0,75(1 - 0,15x) - 1] = 0 \iff x(-0,25 - 0,1125x) = 0$.

Donc $x = 0$ ou $-0,25 - 0,1125x = 0$, soit $x = -\frac{0,25}{0,1125}$, valeur négative donc exclue de $[0 ; 1]$.

Donc, la réponse est que l'unique solution dans $[0 ; 1]$ est $x = 0$.

4.a On admet que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n . Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

Initialisation : on a vu que $0 \leq 0,4095 \leq 0,6 \leq 1$, c'est-à-dire $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que, pour un entier naturel n , on ait $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$. La fonction f étant strictement croissante sur $[0 ; 1]$, on en déduit $f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1)$.

Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,6375 \leq 1$, donc $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

4.b En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle est donc **convergente**.

4.c Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .

La suite (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$, et par continuité de f , ℓ vérifie l'équation $f(x) = x$, dont l'unique solution dans $[0 ; 1]$ est 0 (question 3).

Donc, la réponse est $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = 0$.

5.a Justifier que, selon ce modèle, l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

La suite (u_n) étant décroissante et de limite 0, le nombre d'individus finit par descendre en dessous de tout seuil, en particulier en dessous de 20 individus ($u_n = 0,02$ en milliers) : **l'espèce sera donc menacée d'extinction.**

**5.b Le biologiste programme en Python la fonction ci-dessous. `def menace(): u = 0.6
n = 0 while u > 0.02: u = 0.75*u*(1-0.15*u) n = n+1 return n` Donner la valeur renvoyée par l'appel de menace() et interpréter ce résultat.**

La boucle calcule successivement les termes de la suite (u_n) tant que le terme courant reste strictement supérieur à 0,02, en comptant le nombre d'itérations dans n .

En calculant les termes successifs, on obtient $u_{10} \approx 0,0249 > 0,02$ (la boucle continue) puis $u_{11} \approx 0,0186 \leq 0,02$ (la boucle s'arrête) : l'appel renvoie donc $n = 11$.

Donc, la réponse est que l'espèce sera menacée d'extinction au début de l'année $2020 + 11 = \mathbf{2031}$.

Bac Terminale 2021 — Amérique du Nord

On considère un cube $ABCDEFGH$. I est le milieu de $[EF]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[AE]$. On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, dans lequel $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 1 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$, $E(0 ; 0 ; 1)$, $F(1 ; 0 ; 1)$, $G(1 ; 1 ; 1)$, $H(0 ; 1 ; 1)$, $I(0,5 ; 0 ; 1)$, $J(1 ; 0,5 ; 0)$ et $K(0 ; 0 ; 0,5)$. 1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ?

$$\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont proportionnelles selon aucun facteur commun), donc, la réponse est que **les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.**

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

$$\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que $2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AE}$: ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ et les droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques $d_1 : x = 3 + t, y = 8 - 2t, z = -2 + 3t$ et $d_2 : x = 4 + t, y = 1 + t, z = 8 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$). Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

$$d_1 \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } d_2 \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc, la réponse est que **les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles**.

4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

$$\text{Le plan } \mathcal{P} \text{ admet pour vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ et } d_2 \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 1 \times 1 + 3 \times 1 + (-2) \times 2 = 1 + 3 - 4 = 0.$$

Le vecteur directeur de d_2 est donc orthogonal au vecteur normal de $\mathcal{P}$: la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

5. Montrer que le point $L(4; 0; 3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5; 3; 1)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

$$\overrightarrow{ML} \begin{pmatrix} 4-5 \\ 0-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ qui est l'opposé du vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{P} : \overrightarrow{ML} \text{ est donc lui aussi normal au plan } \mathcal{P}, \text{ ce qui montre que la droite (ML) est perpendiculaire à } \mathcal{P}.$$

D'autre part, les coordonnées de L vérifient l'équation de $\mathcal{P}$: $4 + 3 \times 0 - 2 \times 3 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, donc L appartient à $\mathcal{P}$.

Le point L appartient au plan $\mathcal{P}$ et la droite (ML) lui est perpendiculaire : donc, la réponse est que **L est bien le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$** .

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 1)

1. Une influenceuse compte $u_0 = 1\,000$ abonnés en 2020. Chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés puis en gagne 250 nouveaux. On note u_n le nombre d'abonnés en l'année $(2020 + n)$. Calculer u_1 .

Perdre 10 % revient à multiplier par 0,9. Donc $u_1 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = \mathbf{1\,150}$ abonnés.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

Multiplier par 0,9 traduit la perte de 10 % des abonnés d'une année sur l'autre.

On ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

3. Une fonction Python 'suite(n)' initialise 'u = 1000', puis répète 'n' fois 'u = 0.9*u + 250', avant de renvoyer 'u'. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la valeur renvoyée par l'appel 'suite(10)'.

La fonction calcule u_{10} , c'est-à-dire le nombre d'abonnés estimé en l'année 2030 ; la calculatrice donne $u_{10} \approx 1\,977$ abonnés.

4.a Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

Initialisation : $u_0 = 1\,000 \leq 2\,500$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq 2\,500$. Comme $0,9 > 0$, la multiplication conserve l'ordre : $0,9u_n \leq 0,9 \times 2\,500 = 2\,250$, puis en ajoutant 250 aux deux membres, $0,9u_n + 250 \leq 2\,500$, soit $u_{n+1} \leq 2\,500$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

4.b Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.

Or, d'après la question précédente, $u_n \leq 2\,500$, donc $0,1u_n \leq 250$, soit $-0,1u_n + 250 \geq 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est **croissante**.

4.c Dédire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 500 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

5.a On pose $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n . Montrer que (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1\,500$.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500 = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9(u_n - 2\,500) = 0,9v_n$.

La relation $v_{n+1} = 0,9v_n$, vraie pour tout entier naturel n , montre que (v_n) est géométrique de raison 0,9.

Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

5.b Exprimer v_n en fonction de n , puis montrer que $u_n = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

Comme (v_n) est géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $v_0 = -1\,500$, pour tout entier naturel n : $v_n = -1\,500 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 2\,500$, donc $u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

5.c Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Comme $0 < 0,9 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc par produit puis somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\,500$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que le nombre d'abonnés de l'influenceuse **se stabilise autour de 2 500** au fil des années.

6. Écrire un programme qui détermine en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200, puis donner cette année.

- $n = 0$
- $u = 1000$
- tant que $u \leq 2200$:
- $u = 0,9 * u + 250$
- $n = n + 1$
- renvoyer n
- En simulant l'évolution terme à terme, on obtient $u_{15} \approx 2\,191,2 \leq 2\,200$ et $u_{16} \approx 2\,222,0 > 2\,200$: le programme renvoie $n = 16$.
- Donc, la réponse est que le nombre d'abonnés dépasse 2 200 la seizième année suivant 2020, c'est-à-dire en **2036**.

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 2)**1. QCM. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x$. Quelle est la limite de f en $-\infty$?**

En développant, $f(x) = x^2 e^x - 2x e^x - e^x$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$; de plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

2. QCM. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{5 + e^x}$. Que peut-on dire des asymptotes à sa courbe représentative ?

Quand $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0$ donc $f(x) \rightarrow \frac{3}{5}$: la droite d'équation $y = \frac{3}{5}$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$ donc $f(x) \rightarrow 0$: l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) est asymptote horizontale en $+\infty$.

La courbe admet deux asymptotes horizontales (une pour chaque limite infinie).

3. QCM. La courbe ci-dessous (non reproduite ici) représente la dérivée seconde f'' d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-3, 5 ; 6]$, et s'annule en changeant de signe en -3 , 2 et 5 . Que peut-on en conclure sur f ?

Un point d'inflexion de la courbe de f correspond à une valeur où f'' s'annule en changeant de signe.

Comme f'' s'annule en changeant de signe exactement trois fois (en -3 , 2 et 5), **la courbe de f admet exactement trois points d'inflexion.**

4. QCM. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$. Que peut-on affirmer sur cette suite ?

On met l'expression sous forme canonique : $u_n = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{289}{4} + 20 = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{209}{4}$.

Un carré étant toujours positif ou nul, on a pour tout entier naturel n : $u_n \geq -\frac{209}{4}$.

La suite (u_n) est donc minorée (par $-\frac{209}{4}$).

5. QCM. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 5$. On exécute en Python une fonction qui initialise $u = 2$ et $n = 0$, puis répète tant que $u < 45$: $u \leftarrow 0,75u + 5$ et $n \leftarrow n + 1$, avant de renvoyer n . Que renvoie cette fonction ?

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 20$.

Initialisation : $u_0 = 2 \leq 20$: la propriété est vraie au rang 0 .

Hérédité : supposons que pour un entier n , $u_n \leq 20$. Alors $0,75u_n \leq 0,75 \times 20 = 15$, donc $0,75u_n + 5 \leq 20$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 20$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $u_n \leq 20$, donc la condition $u < 45$ est toujours vérifiée : la boucle ne s'arrête jamais.

Aucune des trois réponses proposées n'est correcte : le programme ne s'arrête pas (boucle infinie).

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 2)

1. Une application génère un ticket sur une grille 3×3 où trois cases contiennent chacune un cœur, disposées au hasard. Justifier qu'il existe exactement 84 façons différentes de placer ces trois cœurs sur la grille.

Placer trois cœurs sur la grille revient à choisir 3 cases parmi les 9 de la grille, sans tenir compte de l'ordre : le nombre de façons est donc $\binom{9}{3}$.

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \frac{504}{6} = 84.$$

Il y a bien 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur la grille.

2. Un ticket est gagnant si les trois cœurs sont alignés côte à côte sur une même ligne, une même colonne ou une même diagonale. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant vaut $\frac{2}{21}$.

La grille compte 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales, soit 8 alignements possibles de trois cases : il y a donc 8 grilles gagnantes parmi les 84 grilles possibles (équiprobables).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est $\frac{8}{84} = \frac{2}{21}$ (en simplifiant par 4).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est donc bien égale à $\frac{2}{21}$.

3. À chaque ticket généré, le joueur verse 1 € ; si le ticket est gagnant, la société lui reverse 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Soit X le gain algébrique du joueur pour un ticket. Un ticket gagnant rapporte $5 - 1 = 4$ € (le joueur récupère les 5 € mais a déjà versé 1 €), un ticket perdant coûte 1 €.

$$P(X = 4) = \frac{2}{21} \text{ et } P(X = -1) = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}.$$

$$E(X) = 4 \times \frac{2}{21} + (-1) \times \frac{19}{21} = \frac{8 - 19}{21} = -\frac{11}{21} \approx -0,524.$$

L'espérance de gain est négative : en moyenne, le joueur perd environ 0,52 € par ticket généré. Le jeu est donc défavorable au joueur.

4.a Un joueur génère 20 tickets de façon indépendante. Soit X le nombre de tickets gagnants parmi ces 20 tickets. Donner la loi de probabilité de X .

Chaque génération de ticket est une épreuve à deux issues (gagnant / perdant) de probabilité de succès $p = \frac{2}{21}$, répétée $n = 20$ fois de façon indépendante.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{21}$.

4.b Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 5)$, arrondie à 10^{-3} .

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{2}{21}\right)^5 \times \left(\frac{19}{21}\right)^{15} \approx \mathbf{0,027} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

4.c Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$, arrondie à 10^{-3} , puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$(X \geq 1)$ est l'évènement contraire de $(X = 0)$, donc $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^{20} \approx 1 - 0,135 \approx \mathbf{0,865}$ (à 10^{-3} près).

Sur 20 tickets générés, le joueur a donc environ 86,5 % de chances d'obtenir au moins un ticket gagnant.

Bac Terminale 2021 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. QCM. On étudie g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2x - \frac{3}{x}$. Parmi les quatre équations proposées, laquelle est celle de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1 ?

g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout x de cet intervalle : $g'(x) = 2x + 2 + \frac{3}{x^2}$.

On calcule $g'(1) = 2 + 2 + 3 = 7$ et $g(1) = 1 + 2 - 3 = 0$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = g'(1)(x - 1) + g(1) = 7(x - 1)$, soit $y = 7x - 7$.

Donc, la réponse est **a.** $y = 7(x - 1)$.

2. QCM. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{3n}{n+2}$. Quelle est la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$?

Pour $n \geq 1$, on peut écrire $v_n = \frac{3n}{n(1 + \frac{2}{n})} = \frac{3}{1 + \frac{2}{n}}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$, le dénominateur tend vers 1, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$.

Donc, la réponse est **b.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$.

3. QCM. Une urne contient 6 boules noires et 4 boules rouges. On effectue 10 tirages successifs avec remise. Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près, d'obtenir exactement 4 boules noires et 6 boules rouges ?

Si X désigne le nombre de boules noires obtenues sur les 10 tirages, chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,6$ (tirage avec remise), donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,6$.

On veut $P(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,6^4 \times 0,4^6 \approx 0,11148$, soit environ **0,1115** à 10^{-4} près.

Donc, la réponse est **c. 0,1115**.

4. QCM. On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^x - x$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?

Pour $x \neq 0$, on factorise : $f(x) = x \left(3\frac{e^x}{x} - 1 \right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (croissance comparée), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$.

Par produit de limites (avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$), on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc, la réponse est **b.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

5. QCM. Un code secret comporte 8 caractères, chacun étant une lettre ou un chiffre parmi 36 signes possibles. Un logiciel teste environ 100 millions de codes par seconde. En combien de temps, au maximum, peut-il trouver le code ?

Le nombre total de codes possibles est $36^8 = 2\,821\,109\,907\,456$.

Au rythme de 10^8 codes par seconde, il faut au maximum $\frac{2\,821\,109\,907\,456}{10^8} \approx 28\,211$ secondes, soit environ 470 minutes, soit environ 7,8 heures.

Donc, la réponse est **b. environ 8 heures**.

Bac Terminale 2021 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A — 1.a Une centrale solaire compte 10 560 panneaux au 1er janvier 2020. Chaque année, 2 % des panneaux se détériorent et sont retirés, tandis que 250 panneaux neufs sont installés. On modélise le nombre de panneaux par $u_0 = 10\,560$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux au 1er janvier de l'année $2020 + n$. Justifier ce choix de modélisation.

Retirer 2 % des panneaux revient à multiplier leur nombre par $1 - \frac{2}{100} = 0,98$.

En ajoutant ensuite les 250 panneaux neufs installés chaque année, on obtient bien la relation $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, ce qui justifie la modélisation.

Partie A — 1.b À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux dépassera strictement 12 000.

En saisissant $u_0 = 10\,560$ puis en appliquant successivement $u \mapsto 0,98u + 250$, on obtient $u_1 \approx 10\,599$, puis u_2, u_3 , etc.

On trouve $u_{67} \approx 11\,999$ et $u_{68} \approx 12\,009$.

Donc, le nombre de panneaux dépassera 12 000 au bout de **68 ans**, soit en 2088.

Partie A — 1.c Compléter le programme Python suivant pour qu'il stocke dans la variable n le nombre d'années trouvé à la question précédente : 'u = 10560' / 'n = 0' / 'while ... :' / ' u = ...' / ' n = ...'

- 'while u <= 12000 :'
- ' u = 0.98*u + 250'
- ' n = n + 1'

Partie A — 2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 12\,500$.

Initialisation : $u_0 = 10\,560 \leq 12\,500$, la propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq 12\,500$. En multipliant par 0,98 (positif) : $0,98u_n \leq 0,98 \times 12\,500 = 12\,250$. En ajoutant 250 aux deux membres : $0,98u_n + 250 \leq 12\,500$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 12\,500$: la propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc par récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 12\,500$.

Partie A — 3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 0,98u_n + 250 - u_n = 250 - 0,02u_n$.

D'après la question précédente, $u_n \leq 12\,500$, donc $0,02u_n \leq 0,02 \times 12\,500 = 250$, c'est-à-dire $250 - 0,02u_n \geq 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$: **la suite (u_n) est croissante.**

Partie A — 4. En déduire que la suite (u_n) converge (sans calculer sa limite).

La suite (u_n) est croissante et majorée par 12 500 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite ℓ vérifiant $\ell \leq 12\,500$.

Partie A — 5.a On pose $v_n = u_n - 12\,500$ pour tout entier naturel n . Démontrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

$$\text{Pour tout entier naturel } n : v_{n+1} = u_{n+1} - 12\,500 = 0,98u_n + 250 - 12\,500 = 0,98u_n - 12\,250.$$

$$\text{Or } 0,98 \times 12\,500 = 12\,250, \text{ donc } v_{n+1} = 0,98u_n - 0,98 \times 12\,500 = 0,98(u_n - 12\,500) = 0,98v_n.$$

Cette relation étant vraie pour tout n , (v_n) est **géométrique de raison** $0,98$, de premier terme $v_0 = u_0 - 12\,500 = 10\,560 - 12\,500 = -1\,940$.

Partie A — 5.b Exprimer v_n en fonction de n .

(v_n) étant géométrique de premier terme $-1\,940$ et de raison $0,98$, on a pour tout entier naturel n :
 $v_n = -1\,940 \times 0,98^n$.

Partie A — 5.c En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Comme $v_n = u_n - 12\,500$, on a $u_n = v_n + 12\,500$, soit $u_n = 12\,500 - 1\,940 \times 0,98^n$.

Partie A — 5.d Déterminer la limite de (u_n) et interpréter le résultat.

Comme $0 < 0,98 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,98^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12\,500$.

Dans le contexte du modèle, le nombre de panneaux solaires de la centrale se stabilise autour de **12 500** à long terme.

Partie B — 1. Une modélisation plus fine utilise la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 12\,500 - 500e^{-0,02x+1,4}$, où x est le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020. Étudier le sens de variation de f .

f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout x de cet intervalle :
 $f'(x) = -500 \times (-0,02)e^{-0,02x+1,4} = 10e^{-0,02x+1,4}$.

La fonction exponentielle étant strictement positive, $f'(x) > 0$ pour tout x : **la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.**

Partie B — 2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,02x + 1,4) = -\infty$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,02x+1,4} = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 12\,500$.

Partie B — 3. À l'aide de ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux dépassera 12 000.

$$\text{On résout } f(x) > 12\,000 \iff 12\,500 - 500e^{-0,02x+1,4} > 12\,000 \iff 500 > 500e^{-0,02x+1,4} \iff 1 > e^{-0,02x+1,4}.$$

Comme $1 = e^0$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante, cela équivaut à $0 > -0,02x + 1,4 \iff 0,02x > 1,4 \iff x > 70$.

Donc, il faut attendre strictement plus de 70 ans, soit **71 ans**, pour que le nombre de panneaux dépasse 12 000 selon ce modèle, ce qui correspond à l'année 2091.

Bac Terminale 2021 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A (avec $a = \frac{2}{3}$) — 1. ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE, J est le point du segment [CG] tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$. Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de F, I et J.

Le cube a pour arête 1 dans ce repère, donc F, sommet opposé à D sur la face supérieure du carré ABFE, a pour coordonnées F(1 ; 0 ; 1).

I est le centre de la face ADHE, donc le milieu de [AH] (et aussi de [DE]) : $I\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Comme $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ avec C(1 ; 1 ; 0) et G(1 ; 1 ; 1), on a $J\left(1 ; 1 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 2. On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ). Déterminer une représentation paramétrique de (d).

$$\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ (obtenu par } J - F\text{)}.$$

(d) passe par $I\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et admet $\overrightarrow{FJ}$ pour vecteur directeur, donc une représentation paramétrique de (d) est : $x = 0, y = \frac{1}{2} + t, z = \frac{1}{2} - \frac{t}{3}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Partie A — 3.a K est le point d'intersection de (d) et de (AE). Montrer que K a pour coordonnées $\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.

La droite (AE) est l'axe des cotes (points d'ordonnée nulle). On cherche donc le point de (d) tel que $y = 0 : \frac{1}{2} + t = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$.

La cote correspondante vaut $z = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

On obtient bien $K\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 3.b Déterminer les coordonnées du point L, intersection de (d) et de (DH).

Tous les points de (DH) ont pour ordonnée 1. On cherche donc le point de (d) tel que $y = 1 : \frac{1}{2} + t = 1 \iff t = \frac{1}{2}$.

La cote correspondante vaut $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Donc, la réponse est $L\left(0 ; 1 ; \frac{1}{3}\right)$.

Partie A — 4.a Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.

Le milieu de [FL] a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2} ; \frac{0+1}{2} ; \frac{1+\frac{1}{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{2}{3}\right)$.

Le milieu de [JK] a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2} ; \frac{1+0}{2} ; \frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{2}{3}\right)$.

Les diagonales [FL] et [JK] ont le même milieu : **FJLK est donc un parallélogramme.**

Partie A — 4.b Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.

$$\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) + \left(-\frac{2}{3}\right) \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0.$$

Les diagonales du parallélogramme FJLK sont donc perpendiculaires : **FJLK est un losange.**

Partie A — 4.c Le quadrilatère FJLK est-il un carré ?

$$\overrightarrow{KF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{KF} \cdot \overrightarrow{FJ} = 0 + 0 - \frac{1}{9} = -\frac{1}{9} \neq 0.$$

Les côtés consécutifs [KF] et [FJ] ne sont donc pas perpendiculaires : le losange FJLK n'est pas un rectangle, donc, la réponse est **non, FJLK n'est pas un carré.**

Partie B (cas général) — 1. On admet désormais que $K\left(0 ; 0 ; 1 - \frac{a}{2}\right)$ et $L\left(0 ; 1 ; \frac{a}{2}\right)$, avec $a \in [0 ; 1]$. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a.

$$G \text{ a pour coordonnées } (1 ; 1 ; 1), \text{ donc } \overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Comme $C(1 ; 1 ; 0)$, on en déduit $J(1 ; 1 ; a)$.

Partie B — 2. Montrer que FJLK est un parallélogramme, quelle que soit la valeur de a .

$$\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ (en calculant } \frac{a}{2} - \left(1 - \frac{a}{2}\right) = a-1 \text{).}$$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{KL}$: **FJLK est donc un parallélogramme pour toute valeur de a .**

Partie B — 3. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles FJLK est un losange ?

$$\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{a}{2} - 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 - \frac{3a}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = 1 - 1 + \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right).$$

Ce produit s'annule si et seulement si $\frac{a}{2} = 1$ (soit $a = 2$) ou $1 - \frac{3a}{2} = 0$ (soit $a = \frac{2}{3}$).

Seule la valeur $a = \frac{2}{3}$ appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$: dans ce cas, les diagonales du parallélogramme FJLK sont perpendiculaires, donc, la réponse est **oui, uniquement pour $a = \frac{2}{3}$, FJLK est un losange.**

Partie B — 4. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles FJLK est un carré ?

D'après la question précédente, la seule valeur de a rendant FJLK losange est $a = \frac{2}{3}$, cas déjà étudié en partie A où l'on a montré que ce losange n'était pas un carré : donc, la réponse est **non, il n'existe aucune valeur de a pour laquelle FJLK est un carré.**

Bac Terminale 2021 — Polynésie française

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1, muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, et le point M défini par $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$. 1. Donner, par lecture graphique, les coordonnées des points B, D, E, G et H.

Dans ce repère : B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1).

2.a Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

Les segments [EG], [GD] et [ED] sont chacun la diagonale d'une face carrée de côté 1 du cube, donc $EG = GD = ED = \sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1) : **le triangle EGD est équilatéral**, de côté $\sqrt{2}$.

2.b On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Avec $c = \sqrt{2}$, l'aire du triangle EGD vaut $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

$$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de H moins celles de B), donc } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Comme } \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}, \text{ on obtient } x_M = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, y_M = \frac{1}{3} \text{ et } z_M = \frac{1}{3}.$$

Donc, la réponse est que M a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

4.a Justifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EGD).

$$\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de G moins celles de E), donc } \vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = -1 + 1 + 0 = 0.$$

$$\overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de D moins celles de E), donc } \vec{n} \cdot \overrightarrow{ED} = 0 + 1 - 1 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD) : **c'est donc un vecteur normal à ce plan.**

4.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est $-x + y + z - 1 = 0$.

Un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $-x + y + z + d = 0$, avec d réel à déterminer.

Le point E(0; 0; 1) appartient au plan (EGD), donc ses coordonnées vérifient cette équation : $-0 + 0 + 1 + d = 0 \iff d = -1$.

Donc, la réponse est que le plan (EGD) a pour équation $-x + y + z - 1 = 0$.

4.c Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) passant par M. Montrer qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan (EGD), elle est donc dirigée par le vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de ce plan ; elle passe de plus par $M(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$.

Un point $P(x ; y ; z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MP} = t\vec{n}$ pour un certain réel t , c'est-à-dire $x - \frac{2}{3} = -t$, $y - \frac{1}{3} = t$ et $z - \frac{1}{3} = t$.

Donc, la réponse est que $\mathcal{D}$ admet pour représentation paramétrique $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

5.a Soit K le pied de la hauteur issue de M dans la pyramide GEDM. Démontrer que les coordonnées de K sont $(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3})$.

La droite $\mathcal{D}$ passe par M et est perpendiculaire au plan (EGD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue de M, et son pied K est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan (EGD).

Les coordonnées de K vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ et l'équation du plan (EGD) : en substituant $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$ dans $-x + y + z - 1 = 0$, on obtient $-(\frac{2}{3} - t) + \frac{1}{3} + t + \frac{1}{3} + t - 1 = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \frac{1}{3}$.

En remplaçant t par $\frac{1}{3}$: $x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Donc, la réponse est que K a pour coordonnées $(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3})$.

5.b En déduire le volume de la pyramide GEDM. On rappelle que le volume d'une pyramide est $V = \frac{b \times h}{3}$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée.

$\overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (coordonnées de M moins celles de K), donc $KM^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$, d'où $KM = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

K est le pied de la hauteur issue de M pour la base EGD, donc $h = KM = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $b = \mathcal{A}(\text{EGD}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (question 2.b).

Le volume de la pyramide GEDM vaut donc $V = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{\frac{3}{6}}{3} = \frac{1}{6}$.

Donc, la réponse est que la pyramide GEDM a un volume égal à $\frac{1}{6}$.