

Équations et inéquations — Tous les corrigés

LOGIMATHS

Brevet 2026 — Antilles et Guyane

1. Vérifier qu'en choisissant 1 comme nombre de départ, on obtient -2 avec le programme A.

- Nombre de départ : 1
- On soustrait 2 : $1 - 2 = -1$
- On multiplie par 5 : $5 \times (-1) = -5$
- On ajoute le triple du nombre de départ : $-5 + 3 \times 1 = -2$ (vérifié)

2.a Montrer que le résultat du programme est $8x - 10$.

- Nombre de départ : x
- On soustrait 2 : $x - 2$
- On multiplie par 5 : $5(x - 2) = 5x - 10$
- On ajoute le triple de x : $5x - 10 + 3x = 8x - 10$

2.b Quel nombre de départ faut-il choisir pour que le résultat du programme soit égal à 0 ?

On résout $8x - 10 = 0$: $8x = 10$.

$$x = \frac{10}{8} = 1,25.$$

3.a En appliquant le programme B (Scratch) au nombre 1, quel résultat final obtient-on ?

- réponse = 1
- résultat = $4 \times 1 = 4$
- résultat = $4 - 5 = -1$
- résultat = $2 \times (-1) = -2$

3.b Montrer que le résultat du programme A est toujours le même que celui du programme B.

Pour un nombre de départ x , le programme B calcule $4x$, puis $4x - 5$, puis $2(4x - 5) = 8x - 10$.

C'est la même expression que le résultat du programme A (question 2.a).

Donc les deux programmes donnent toujours le même résultat, quel que soit le nombre choisi au départ.

Brevet 2026 — Amérique du Nord**1. Calculer $f(-4)$.**

$$f(-4) = (-4 - 1)(-4 + 3) = (-5) \times (-1) = 5.$$

2. Déterminer l'antécédent de 2 par la fonction g .

On résout $g(x) = 2 : 2x + 1 = 2$, donc $2x = 1$.

L'antécédent de 2 par g est $x = \frac{1}{2} = 0,5$.

3.a Quelle formule doit-on saisir en cellule B3 puis étirer vers la droite pour compléter la ligne 3 ?

On saisit $= 2*B1 + 1$ dans la cellule B3.

3.b Par lecture du tableau, donner une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

Pour $x = 2$, le tableau donne $f(2) = 5$ et $g(2) = 5$.

Donc $x = 2$ est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

4.a Associer à chacune des fonctions f et g sa représentation graphique.

f est une fonction du second degré : sa courbe est la parabole, c'est la courbe C1.

g est une fonction affine : sa représentation est la droite, c'est la courbe C2.

4.b Par lecture graphique, déterminer les deux solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Les deux courbes se coupent aux points d'abscisses -2 et 2 .

Les solutions sont donc -2 et 2 .

5. Lola affirme que les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les mêmes que celles de $x^2 - 4 = 0$. A-t-elle raison ?

On développe $f : (x - 1)(x + 3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$.

L'équation $f(x) = g(x)$ s'écrit alors $x^2 + 2x - 3 = 2x + 1$.

En soustrayant $2x + 1$ des deux côtés : $x^2 + 2x - 3 - 2x - 1 = 0$, soit $x^2 - 4 = 0$.

Les deux équations sont équivalentes : **Lola a raison.**

Brevet 2026 — Asie**1. Au bout de 24 mois, laquelle des deux offres est la plus intéressante ?**

Offre A : $175 + 16 \times 24 = 175 + 384 = 559$ €.

Offre B : $23 \times 24 = 552$ €.

Comme $552 < 559$, l'offre B est la plus intéressante au bout de 24 mois.

2.a Associer chaque fonction à l'offre correspondante.

$f(x) = 175 + 16x$ correspond à l'offre A (175 € à l'achat puis 16 €/mois).

$g(x) = 23x$ correspond à l'offre B (rien à l'achat, 23 €/mois).

2.b Au bout de combien de mois paie-t-on le même prix avec ces deux offres ?

On résout $f(x) = g(x)$: $175 + 16x = 23x$.

$$175 = 23x - 16x = 7x$$

$$x = \frac{175}{7} = 25 \text{ mois.}$$

2.c Est-on encore dans la période d'engagement ?

La période d'engagement minimum est de 24 mois pour les deux offres.

Au bout de 25 mois, on a dépassé ces 24 mois : on n'est plus dans la période d'engagement.

Brevet 2026 — Asie**1. Appliquer le programme A au nombre 5.**

- Nombre de départ : 5
- Carré : $5^2 = 25$, puis multiplié par 3 : $3 \times 25 = 75$
- Multiplié par 7 : $7 \times 5 = 35$
- On additionne les deux nombres : $75 + 35 = 110$
- On soustrait 6 : $110 - 6 = 104$

2. Parmi les quatre formules, recopier celle saisie dans la cellule B2 puis étirée vers le bas.

La formule saisie est $= 3 * A2 * A2 + 7 * A2 - 6$ (elle doit fonctionner pour toute valeur de A2, donc utiliser A2 au carré et non une valeur fixe comme 1).

3. À l'aide du tableur, donner une valeur pour laquelle le programme A donne 0.

D'après le tableau, pour un nombre de départ égal à -3 , le programme A donne 0.

4. Donner une expression littérale du programme A en fonction de x.

Carré de x, multiplié par 3 : $3x^2$.

x multiplié par 7 : $7x$.

On additionne puis on soustrait 6 : $3x^2 + 7x - 6$.

L'expression littérale du programme A est $3x^2 + 7x - 6$.

5. Appliquer le programme B au nombre 5.

- Nombre de départ : 5
- Multiplié par 3 puis diminué de 2 : $3 \times 5 - 2 = 13$
- Augmenté de 3 : $5 + 3 = 8$
- On multiplie les deux nombres : $13 \times 8 = 104$

6. Donner une expression littérale du programme B en fonction de x.

L'expression littérale du programme B est $(3x - 2)(x + 3)$.

7. Mathis affirme que, quel que soit le nombre choisi, il trouvera le même résultat avec le programme A et le programme B. A-t-il raison ?

On développe l'expression du programme B :

$$(3x - 2)(x + 3) = 3x^2 + 9x - 2x - 6 = 3x^2 + 7x - 6$$

C'est exactement l'expression du programme A trouvée à la question 4.

Donc **Mathis a raison** : les deux programmes donnent toujours le même résultat.

8. Résoudre l'équation $(3x - 2)(x + 3) = 0$. En déduire les valeurs pour lesquelles les programmes A et B donnent 0.

Un produit de facteurs est nul si (et seulement si) l'un au moins des facteurs est nul.

$$3x - 2 = 0, \text{ donc } x = \frac{2}{3}; \text{ ou } x + 3 = 0, \text{ donc } x = -3.$$

Les deux programmes étant équivalents à ce produit de facteurs, ils donnent 0 pour $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -3$ (on retrouve bien la valeur -3 lue au tableur à la question 3).

Brevet 2026 — Centres étrangers G1

1. On choisit 1 comme nombre de départ. Vérifier que le résultat obtenu avec le programme A est -21 .

- Nombre de départ : 1
- On ajoute 6 : $1 + 6 = 7$
- On soustrait 4 : $1 - 4 = -3$
- On multiplie les deux nombres obtenus : $7 \times (-3) = -21$ (vérifié)

2. On choisit 10 comme nombre de départ. Calculer le résultat obtenu avec le programme B.

Carré de 10 : $10^2 = 100$.

On soustrait 9 : $100 - 9 = 91$.

3. Donner tous les nombres de départ possibles qui permettent d'obtenir 16 avec le programme B.

On résout $x^2 - 9 = 16$, soit $x^2 = 25$.

Donc $x = 5$ ou $x = -5$: les deux nombres de départ possibles sont **5** et **-5**.

4. Recopier et compléter les lignes 3, 4 et 5 pour que le programme Scratch affiche le résultat du programme A.

- Ligne 3 : mettre Valeur 1 à (réponse) + **6**
- Ligne 4 : mettre Valeur 2 à (réponse) - **4**
- Ligne 5 : mettre Résultat à (**Valeur 1**) * (**Valeur 2**)

5. On choisit x comme nombre de départ. Montrer que le résultat obtenu avec le programme A est $x^2 + 2x - 24$.

Le programme A calcule $(x + 6)$ d'une part et $(x - 4)$ d'autre part, puis multiplie les deux :

$$(x + 6)(x - 4) = x^2 - 4x + 6x - 24 = x^2 + 2x - 24.$$

6. Écrire une équation permettant de trouver le nombre de départ pour que les programmes A et B donnent le même résultat, puis la résoudre.

Le programme B donne $x^2 - 9$; l'équation à résoudre est donc $x^2 + 2x - 24 = x^2 - 9$.

$$2x - 24 = -9$$

$$2x = -9 + 24 = 15$$

$$x = \frac{15}{2} = 7,5.$$

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 1)**A.1.a Donner $P(C)$.**

L'énoncé indique directement que 75 % des familles réservent une cabine : $P(C) = 0,75$.

A.1.b Reproduire l'arbre et compléter les quatre pointillés.

- Sur la première branche : $P(V) = 0,3$
- Sur la deuxième branche : $P(\bar{V}) = 0,7$
- Sur les branches issues de V : $P_V(C) = 0,8$ et $P_V(\bar{C}) = 0,2$

A.2 Calculer la probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine.

$$P(V \cap C) = P(V) \times P_V(C) = 0,3 \times 0,8 = 0,24.$$

A.3 Une famille a réservé une cabine. Déterminer la probabilité qu'elle réserve un emplacement pour un véhicule.

$$\text{On cherche } P_C(V) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)}.$$

$$P_C(V) = \frac{0,24}{0,75} = 0,32.$$

A.4 Déterminer la probabilité qu'une famille n'ayant pas réservé de véhicule réserve tout de même une cabine, arrondie à 10^{-2} . Interpréter le résultat.

$$\text{D'après la formule des probabilités totales, } P(C) = P(V) \times P_V(C) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(C).$$

$$0,75 = 0,24 + 0,7 \times P_{\bar{V}}(C)$$

$$P_{\bar{V}}(C) = \frac{0,75 - 0,24}{0,7} = \frac{0,51}{0,7} \approx 0,73.$$

Interprétation : parmi les familles qui ne réservent pas d'emplacement pour un véhicule, environ 73 % réservent tout de même une cabine.

B.1 Justifier que $E(X) = 96$ et que $V(X) = 3114$.

$$E(X) = 0 \times 0,19 + 70 \times 0,06 + 100 \times 0,51 + 170 \times 0,24 = 4,2 + 51 + 40,8 = 96.$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,19 + 70^2 \times 0,06 + 100^2 \times 0,51 + 170^2 \times 0,24 = 294 + 5\,100 + 6\,936 = 12\,330.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 12\,330 - 96^2 = 12\,330 - 9\,216 = 3\,114.$$

B.2.a Justifier que $Z = 0,6(X + Y)$.

Une remise de 40 % revient à ne payer que 60 % du montant total des suppléments et des extras, soit $X + Y$: donc $Z = 0,6(X + Y)$.

B.2.b En déduire que $E(Z) = 120$ et que $V(Z) = 1728$.

$$E(Z) = 0,6 \times (E(X) + E(Y)) = 0,6 \times (96 + 104) = 0,6 \times 200 = \mathbf{120}.$$

$$X \text{ et } Y \text{ étant indépendantes, } V(Z) = 0,6^2 \times (V(X) + V(Y)) = 0,36 \times (3\,114 + 1\,686) = 0,36 \times 4\,800 = \mathbf{1\,728}.$$

B.3.a Montrer que $E(M_n) = 120$ et que $V(M_n) = 1728/n$.

Les variables $Z_1, \dots, Z_n$ suivent toutes la même loi que Z , donc $E(M_n) = \frac{n \times E(Z)}{n} = E(Z) = \mathbf{120}$.

$$\text{Les variables étant indépendantes, } V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times n \times V(Z) = \frac{V(Z)}{n} = \frac{1\,728}{n}.$$

B.3.b Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(114 < M_n < 126) \geq 0,85$. Interpréter.

L'évènement $114 < M_n < 126$ équivaut à $|M_n - 120| < 6$, dont le contraire est $|M_n - 120| \geq 6$.

$$\text{D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, } P(|M_n - 120| \geq 6) \leq \frac{V(M_n)}{6^2} = \frac{1\,728}{36n} = \frac{48}{n}.$$

On veut $P(114 < M_n < 126) \geq 0,85$, soit $P(|M_n - 120| \geq 6) \leq 0,15$: il suffit donc que $\frac{48}{n} \leq 0,15$.

$$n \geq \frac{48}{0,15} = 320.$$

Le plus petit entier qui convient est $\mathbf{n = 320}$: un échantillon d'au moins 320 familles garantit, via cette inégalité, que le prix moyen payé a au moins 85 % de chances d'être compris entre 114 € et 126 €.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 1)**1.a Affirmation 1 : Le plan (P) est orthogonal à la droite (AB), et passe par le milieu de [AB].**

Un vecteur normal au plan (P) : $-x + y - 5z - 0,5 = 0$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$\text{Le vecteur } \overrightarrow{AB} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 2 - 3 \\ 1 - 0 \\ -3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux, donc colinéaires : la droite (AB) est donc orthogonale au plan (P).

Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{3+2}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{2-3}{2}\right) = (2,5; 0,5; -0,5)$.

On vérifie : $-2,5 + 0,5 - 5 \times (-0,5) - 0,5 = -2,5 + 0,5 + 2,5 - 0,5 = 0$: le milieu appartient bien à (P).

L'affirmation 1 est VRAIE.

1.b Affirmation 2 : Les droites (d) et (AB) sont sécantes.

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, non colinéaire à $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$: les droites ne sont pas parallèles.

Cherchons un éventuel point d'intersection en résolvant $t = 3 - s$ et $-1,5 - t = s$ (paramètres de (d) et (AB)).

En substituant : $-1,5 - (3 - s) = s$, soit $-4,5 + s = s$, soit $-4,5 = 0$, ce qui est impossible.

Le système n'a donc pas de solution : les droites (d) et (AB) ne sont pas sécantes (elles sont non coplanaires).

L'affirmation 2 est FAUSSE.

1.c Affirmation 3 : La mesure de l'angle ACB, arrondie à 10^{-1} , est égale à $70,5^\circ$ (C(1,5; -3; -1)).

$$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 3 - 1,5 \\ 0 - (-3) \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 2 - 1,5 \\ 1 - (-3) \\ -3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 1,5 \times 0,5 + 3 \times 4 + 3 \times (-2) = 0,75 + 12 - 6 = 6,75.$$

$$CA = \sqrt{1,5^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{20,25} = 4,5 \text{ et } CB = \sqrt{0,5^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20,25} = 4,5.$$

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{CA \times CB} = \frac{6,75}{4,5 \times 4,5} = \frac{6,75}{20,25} = \frac{1}{3}.$$

$$\widehat{ACB} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,5^\circ.$$

L'affirmation 3 est VRAIE.

2. Affirmation 4 : Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

Le digicode de la porte A utilise 3 symboles distincts parmi 8, saisis dans un ordre précis : il y a $8 \times 7 \times 6 = 336$ codes possibles.

Le digicode de la porte B utilise 4 symboles distincts parmi 8, saisis dans n'importe quel ordre : il y a $\binom{8}{4} = 70$ codes possibles.

Clotilde choisit un code au hasard pour la porte A : $P(\text{ouvrir}) = \frac{1}{336} \approx 0,0030$.

Titouan choisit un code au hasard pour la porte B : $P(\text{ouvrir}) = \frac{1}{70} \approx 0,0143$.

Comme $\frac{1}{70} > \frac{1}{336}$, Titouan a bien plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

L'affirmation 4 est VRAIE.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 1)

A.1 Donner les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,035y + 0,91$ sur $[0; +\infty[$.

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,035$ et $b = 0,91$.

La solution constante particulière vérifie $0 = -0,035y_p + 0,91$, soit $y_p = \frac{0,91}{0,035} = 26$.

Les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto Ke^{-0,035t} + 26$, où **K est une constante réelle**.

A.2 En déduire que, pour tout réel t de $[0; +\infty[$, $T(t) = 26 - 8e^{-0,035t}$.

D'après la question précédente, $T(t) = Ke^{-0,035t} + 26$.

Comme $T(0) = 18 : Ke^0 + 26 = 18$, soit $K = 18 - 26 = -8$.

Donc, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $T(t) = -8e^{-0,035t} + 26 = 26 - 8e^{-0,035t}$.

A.3 Déterminer au bout de combien de temps la pièce atteindra 20°C (en heures et minutes, arrondi à la minute).

On résout $T(t) = 20 : 26 - 8e^{-0,035t} = 20$, soit $8e^{-0,035t} = 6$, soit $e^{-0,035t} = 0,75$.

$-0,035t = \ln(0,75)$, donc $t = \frac{-\ln(0,75)}{0,035} \approx 8,22$ dizaines de minutes, soit environ 82,2 minutes.

82,2 minutes $\approx$ **1 h 22 min**.

A.4 Si le système ne s'éteignait pas à 20°C, la température pourrait-elle dépasser 28°C selon ce modèle ?

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,035t} > 0$, donc $T(t) = 26 - 8e^{-0,035t} < 26$.

La température modélisée par T reste donc toujours strictement inférieure à 26°C, quelle que soit la durée de chauffe.

Non, selon ce modèle, la température de la pièce ne pourra jamais dépasser 28°C (elle ne dépasse même jamais 26°C).

B.1 Montrer que $u_1 = 19,72$.

$$u_1 = 0,965 \times u_0 + 0,35 + 0,07e^{-0,1 \times 0} = 0,965 \times 20 + 0,35 + 0,07 \times 1 = 19,3 + 0,35 + 0,07 = \mathbf{19,72}.$$

B.2 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 10$.

Initialisation : $u_0 = 20 > 10$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que $u_n > 10$ pour un entier n donné. Montrons que $u_{n+1} > 10$.

$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n}. \text{ Comme } u_n > 10, \text{ on a } 0,965u_n > 9,65.$$

De plus, $0,07e^{-0,1n} > 0$ pour tout n (une exponentielle est toujours strictement positive).

Donc $u_{n+1} > 9,65 + 0,35 + 0 = 10$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 10$.

B.3 En déduire que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est décroissante (admis dans l'énoncé) et minorée par 10 (question précédente) : d'après le théorème de convergence monotone, **la suite (u_n) est convergente**.

B.4.a Justifier que la limite ℓ est solution de l'équation $x = 0,965x + 0,35$.

Comme (u_n) converge vers ℓ , la suite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ .

De plus, $e^{-0,1n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n}$, on obtient $\ell = 0,965\ell + 0,35$.

B.4.b Déterminer ℓ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

$$\ell - 0,965\ell = 0,35, \text{ soit } 0,035\ell = 0,35, \text{ soit } \ell = \frac{0,35}{0,035} = \mathbf{10}.$$

Interprétation : si le chauffage ne se remettait jamais en marche, la température de la pièce se rapprocherait indéfiniment de 10°C sans jamais l'atteindre.

B.5.a Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 du programme Python pour qu'il renvoie le nombre de dizaines de minutes à partir duquel le chauffage se remet en marche.

- Ligne 4 : `while u > 18 :`
- Ligne 5 : `u = 0.965*u + 0.35 + 0.07*math.exp(-0.1*n)`
- Ligne 6 : `n = n + 1`

B.5.b Déterminer le temps, en dizaines de minutes, à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

En calculant successivement les termes de la suite, on obtient $u_7 \approx 18,14$ (encore supérieur à 18) puis $u_8 \approx 17,90$ (inférieur à 18).

Le chauffage se remet donc en marche à partir de $n = 8$ dizaines de minutes, soit 80 minutes (1 h 20 min) après le début du refroidissement.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 1)

A.1 Justifier que $a = 1$.

Le point $A(0; 1)$ appartient à la courbe, donc $f(0) = 1$. Or $f(0) = a + \frac{b \ln(1)}{1} = a + 0 = a$. Donc $a = 1$.

A.2.a En utilisant le graphique, donner la valeur de $f'(0)$. Justifier.

La tangente T_A passe par $A(0; 1)$ et semble également passer par le point de coordonnées $(0,5; 3)$ (lecture graphique).

Son coefficient directeur est donc $\frac{3 - 1}{0,5 - 0} = \frac{2}{0,5} = 4$.

$f'(0) = 4$ (coefficient directeur de la tangente en A).

A.2.b En utilisant le graphique, donner le signe de $f''(1)$. Justifier.

Le graphique montre que la courbe atteint son maximum peu avant $x = 1$, puis décroît en restant concave (tournée vers le bas) au voisinage de $x = 1$.

Le signe de $f''(1)$ correspond donc au sens de variation de f' (la pente) à cet endroit, qui diminue juste après le maximum.

$f''(1)$ est négatif.

A.3.a Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]-1; +\infty[$, on a $f'(x) = b(1 - \ln(x+1))/(x+1)^2$.

On dérive $\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ par la formule du quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = \ln(x+1)$ et $v = x+1$.

$$u' = \frac{1}{x+1} \text{ et } v' = 1, \text{ donc } u'v - uv' = \frac{1}{x+1} \times (x+1) - \ln(x+1) \times 1 = 1 - \ln(x+1).$$

$$\text{Donc } f'(x) = b \times \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}.$$

A.3.b En déduire la valeur de b .

D'après la question 2.a, $f'(0) = 4$. Or $f'(0) = b \times \frac{1 - \ln(1)}{1^2} = b \times 1 = b$. Donc **$b = 4$** .

B.1 Justifier que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f .

Quand $x \rightarrow +\infty$, on sait que $\frac{\ln(x+1)}{x+1} \rightarrow 0$ (limite usuelle du type $\frac{\ln(t)}{t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$).

$$\text{Donc } f(x) = 1 + \frac{4\ln(x+1)}{x+1} \rightarrow 1 + 0 = 1 \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

La droite d'équation $y = 1$ est donc asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

B.2 Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x+1) > 0$ sur $]-1; +\infty[$.

$1 - \ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) < 1 \Leftrightarrow x+1 < e$ (la fonction $\ln$ étant strictement croissante), soit $x < e - 1$.

L'ensemble des solutions, en tenant compte du domaine $x > -1$, est $]-1; e - 1[$.

B.3 Dresser le tableau de variation complet de f , en indiquant la valeur exacte de son extremum.

Le signe de $f'(x) = \frac{4(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}$ est celui de $1 - \ln(x+1)$ (le dénominateur est toujours positif).

D'après la question précédente, $f'(x) > 0$ sur $]-1; e - 1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]e - 1; +\infty[$: f est donc croissante puis décroissante, avec un maximum en $x = e - 1$.

$$f(e - 1) = 1 + \frac{4\ln(e)}{e} = 1 + \frac{4}{e} \text{ (valeur exacte du maximum).}$$

Aux bornes : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ (admis) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (question B.1).

Tableau : f décroît de $-\infty$ à -1 (exclu), croît de $-\infty$ à $1 + \frac{4}{e}$ sur $]-1; e - 1]$, puis décroît de $1 + \frac{4}{e}$ vers 1 (sans l'atteindre) sur $[e - 1; +\infty[$.

B.4 Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution dans $[2; +\infty[$. En donner une valeur approchée à 10^{-1} .

Sur $[2; +\infty[$ (inclus dans $]e - 1; +\infty[$ puisque $e - 1 \approx 1,72 < 2$), f est continue et strictement décroissante.

$$f(2) = 1 + \frac{4\ln(3)}{3} \approx 2,46, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Comme 1,5 est compris entre ces deux valeurs, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), **l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution dans $[2; +\infty[$.**

À l'aide de la calculatrice, on trouve une valeur approchée de cette solution : $x_0 \approx \mathbf{25,1}$.

B.5.a Montrer que l'intégrale de $\ln(x+1)/(x+1)$ entre 0 et 2 est égale à $(\frac{1}{2})(\ln 3)^2$.

On pose $u = \ln(x+1)$, donc $du = \frac{1}{x+1}dx$; quand $x = 0$, $u = \ln(1) = 0$ et quand $x = 2$, $u = \ln(3)$.

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \int_0^{\ln(3)} u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{\ln(3)} = \frac{(\ln 3)^2}{2} - 0 = \frac{1}{2}(\ln 3)^2.$$

B.5.b En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

Sur $[0; 2]$, la fonction f est strictement positive (elle vaut 1 en $x = 0$ et reste au-dessus de 2,4 ensuite) : l'aire cherchée est donc $\int_0^2 f(x) dx$.

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 1 dx + 4 \int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = [x]_0^2 + 4 \times \frac{1}{2}(\ln 3)^2 = 2 + 2(\ln 3)^2.$$

L'aire cherchée est $2 + 2(\ln 3)^2$ **unités d'aire**, soit environ 4,41 u.a.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan ($A(2; 1; 1)$, $B(3; -2; 0)$, $C(0; -1; 1)$).

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-2 \\ -2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-2 \\ -1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ont des coordonnées non proportionnelles (par exemple $\frac{1}{-2} \neq \frac{-3}{-2}$), donc ils ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés : **ils définissent bien un plan.**

2.a Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; -1; 4)$ est normal au plan (ABC) .

On calcule les produits scalaires (le repère est orthonormé) :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + (-1) \times (-3) + 4 \times (-1) = 1 + 3 - 4 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) + 4 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : $\vec{n}$ est donc un vecteur normal à (ABC) .

2.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x - y + 4z - 5 = 0$.

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ étant normal à (ABC) , une équation de ce plan est de la forme $x - y + 4z + d = 0$.

Comme A appartient à (ABC) : $2 - 1 + 4 \times 1 + d = 0$, soit $5 + d = 0$, donc $d = -5$.

Une équation cartésienne de (ABC) est donc $x - y + 4z - 5 = 0$.

3. Vérifier la représentation paramétrique donnée de la droite Δ passant par D et orthogonale au plan (ABC) .

Une droite orthogonale au plan (ABC) est dirigée par un vecteur normal à ce plan, ici $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Comme Δ passe par $D(0; 0; 2)$, une représentation paramétrique de Δ est $x = 0 + 1t$, $y = 0 - 1t$, $z = 2 + 4t$, soit bien $x = t$, $y = -t$, $z = 2 + 4t$ avec $t \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point $H(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3})$.

Le projeté orthogonal de D sur (ABC) est le point d'intersection de Δ et de (ABC) .

Un point de Δ a pour coordonnées $(t; -t; 2 + 4t)$. En le substituant dans l'équation du plan :

$$t - (-t) + 4(2 + 4t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 2t + 8 + 16t - 5 = 0 \Leftrightarrow 18t = -3 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{6}$$

Les coordonnées de H sont donc $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; 2 - \frac{4}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$.

5.a Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$$

$$CB = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-(-1))^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

Comme $AB = CB$, le triangle ABC est isocèle en B.

5.b Montrer que l'aire du triangle ABC est $3\sqrt{2}$.

Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal (ici B) passe par le milieu I de la base [AC].

$$I = \left(\frac{2+0}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{1+1}{2} \right) = (1; 0; 1)$$

$$AC = \sqrt{(0-2)^2 + (-1-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ et } BI = \sqrt{(1-3)^2 + (0-(-2))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Aire} = \frac{AC \times BI}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 3}{2} = 3\sqrt{2}.$$

6.a En déduire que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 1.

En choisissant ABC comme base, la hauteur associée est la distance DH (H étant le projeté orthogonal de D sur (ABC), question 4).

$$DH = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{18}{36}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \times 3 = 1.$$

6.b Sachant que la distance de A au plan (BCD) vaut $\sqrt{2}$, en déduire l'aire du triangle BCD.

En reprenant le volume avec BCD comme base et $h = \sqrt{2}$ comme hauteur associée : $V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{BCD} \times h$.

$$1 = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{BCD} \times \sqrt{2}, \text{ donc } \text{Aire}_{BCD} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

7.a Déterminer k pour lequel A, B, C et $D_k(0; 0; k)$ sont coplanaires. Quel est alors le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) ?

D_k appartient au plan (ABC) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$0 - 0 + 4k - 5 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{5}{4}$$

Pour $k = \frac{5}{4}$, le point D_k appartient déjà au plan (ABC) : son projeté orthogonal sur (ABC) est donc **lui-même**.

7.b Peut-on trouver une valeur de k telle que A soit le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) ?

Pour que A soit le projeté orthogonal de D_k sur (ABC), le vecteur $\overrightarrow{AD_k}$ devrait être colinéaire au

vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AD_k} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-1 \\ k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ k-1 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières coordonnées seraient dans un rapport $\frac{-2}{1} = -2$ pour $\overrightarrow{AD_k}$, contre $\frac{-1}{-1} = 1$ pour $\vec{n}$: ces rapports sont différents, quelle que soit la valeur de k .

Non, il n'existe aucune valeur de k pour laquelle A est le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) .

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)

A.1 Calculer V_1 et V_2 ($V_0 = 0$, $V_{n+1} = 0,995 V_n + 6$).

$$V_1 = 0,995 \times 0 + 6 = \mathbf{6 \text{ litres.}}$$

$$V_2 = 0,995 \times 6 + 6 = 5,97 + 6 = \mathbf{11,97 \text{ litres.}}$$

A.2 Recopier et compléter le programme Python pour qu'il renvoie le volume après n heures.

- `def volume(n) :`
- Ligne 2 : `v = 0`
- Ligne 3 : `for k in range(n) :`
- Ligne 4 : `v = 0.995*v + 6`
- Ligne 5 : `return v`

A.3 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.

Initialisation : $V_0 = 0$ et $V_1 = 6$ (question 1), donc $V_0 \leq V_1 \leq 1200$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ pour un entier n donné.

Comme $0,995 > 0$, on peut multiplier chaque membre : $0,995V_n \leq 0,995V_{n+1} \leq 0,995 \times 1200$, soit $0,995V_n \leq 0,995V_{n+1} \leq 1194$.

En ajoutant 6 partout : $0,995V_n + 6 \leq 0,995V_{n+1} + 6 \leq 1200$, c'est-à-dire $V_{n+1} \leq V_{n+2} \leq 1200$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.

A.4 Justifier que la suite (V_n) converge, et calculer sa limite.

D'après la question précédente, la suite (V_n) est croissante et majorée par 1 200.

D'après le théorème de convergence monotone, **la suite (V_n) converge** vers une limite ℓ .

La fonction associée à la récurrence, $x \mapsto 0,995x + 6$, est continue (fonction affine), donc ℓ est solution de l'équation $x = 0,995x + 6$.

$$0,005x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{0,005} = 1\,200.$$

La suite (V_n) converge donc vers **1 200** : le volume de substance polluante se stabilise autour de 1 200 litres.

B.1.a Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,005y + 6$ sur $[0; +\infty[$.

(E) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,005$ et $b = 6$. Sa solution particulière constante est $y_p = -\frac{b}{a} = \frac{6}{0,005} = 1\,200$.

Les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-0,005t} + 1\,200$, où **C est une constante réelle**.

B.1.b Montrer que, pour tout réel t de $[0; +\infty[$, $v(t) = 1200(1 - e^{-0,005t})$.

Comme $v(0) = 0$: $Ce^0 + 1\,200 = 0$, donc $C = -1\,200$.

$$v(t) = -1\,200e^{-0,005t} + 1\,200 = 1\,200(1 - e^{-0,005t}).$$

B.1.c Calculer la limite de v en $+\infty$.

Quand $t \rightarrow +\infty$, $e^{-0,005t} \rightarrow 0$, donc $v(t) \rightarrow 1\,200 \times (1 - 0) = \mathbf{1\,200}$.

B.1.d Déterminer le sens de variation de la fonction v sur $[0; +\infty[$.

$$v'(t) = 1\,200 \times 0,005 \times e^{-0,005t} = 6e^{-0,005t}, \text{ toujours strictement positif.}$$

La fonction v est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

B.2 Un taux de substance polluante supérieur à 5 % du volume du bassin (30 000 L) nécessite un nettoyage complet. Le propriétaire devra-t-il procéder à ce nettoyage ?

Le seuil critique est $0,05 \times 30\,000 = 1\,500$ litres.

La fonction v est strictement croissante et tend vers 1 200 sans jamais l'atteindre : elle est donc toujours strictement inférieure à 1 200, donc à 1 500.

Non, selon ce modèle, le volume de substance polluante n'atteindra jamais le seuil de 1 500 litres : un nettoyage complet ne sera jamais nécessaire.

B.3 Déterminer la valeur exacte de l'instant au-delà duquel le volume dépasse 50 litres (en heure et minute, arrondi à la minute).

On résout $v(t) = 50 : 1\,200 (1 - e^{-0,005t}) = 50$, soit $1 - e^{-0,005t} = \frac{50}{1\,200} = \frac{1}{24}$.

$$e^{-0,005t} = \frac{23}{24}, \text{ donc } -0,005t = \ln\left(\frac{23}{24}\right).$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{23}{24}\right)}{-0,005} = 200 \ln\left(\frac{24}{23}\right) \text{ (valeur exacte), soit environ 8,51 heures.}$$

8,51 heures $\approx$ **8 h 31 min.**

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)

A.1.a À l'aide du graphique, donner $f'(1)$ (la courbe admet une tangente horizontale au point C d'abscisse 1).

La tangente en C (abscisse 1) est parallèle à l'axe des abscisses, donc de coefficient directeur nul : $f'(1) = 0$.

A.1.b Donner la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$ (la courbe coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse $\frac{1}{2}$).

La courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'au point A, d'abscisse $\frac{1}{2}$: la solution de $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$ est $\frac{1}{2}$.

A.2 Déterminer $f'(\frac{1}{2})$ (la tangente en $A(\frac{1}{2}; 0)$ passe par $B(1; e^2)$).

$f'(\frac{1}{2})$ est le coefficient directeur de la tangente en A, c'est-à-dire de la droite (AB) :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{e^2 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = 2e^2.$$

A.3 Parmi les courbes C1, C2 et C3, indiquer lesquelles représentent des primitives de f.

Deux primitives d'une même fonction diffèrent uniquement d'une constante : leurs courbes se déduisent l'une de l'autre par une translation verticale.

C'est le cas de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, qui ont la même forme décalée verticalement.

$\mathcal{C}_3$ est décroissante là où f est positive (autour de $x = 0,5$ à $0,7$), ce qui est incompatible avec une primitive de f à cet endroit.

Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentent des primitives de f .

B.1.a Vérifier que, pour tout x de $[0; +\infty[$, $f(x) = e^2 \times (2x-1)/e^{2x-1}$ (avec $f(x) = (2x-1)e^{-2x+3}$).

On remarque que $-2x + 3 = -(2x - 1) + 2$, donc $e^{-2x+3} = e^{-(2x-1)} \times e^2$.

$$f(x) = (2x - 1) \times e^{-(2x-1)} \times e^2 = e^2 \times \frac{2x - 1}{e^{2x-1}}.$$

B.1.b En déduire la limite de f en $+\infty$ (on pourra poser $X = 2x-1$).

Quand $x \rightarrow +\infty$, $X = 2x - 1 \rightarrow +\infty$, et par croissances comparées $\frac{X}{e^X} \rightarrow 0$.

Donc $\frac{2x-1}{e^{2x-1}} \rightarrow 0$, puis $f(x) = e^2 \times \frac{2x-1}{e^{2x-1}} \rightarrow 0$.

B.2.a Montrer que, pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x) = (-4x+4)e^{-2x+3}$.

En dérivant le produit $f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3}$:

$$f'(x) = 2 \times e^{-2x+3} + (2x - 1) \times (-2)e^{-2x+3} = (2 - 2(2x - 1))e^{-2x+3} = (2 - 4x + 2)e^{-2x+3} = (-4x + 4)e^{-2x+3}.$$

B.2.b Construire le tableau complet des variations de f sur $[0; +\infty[$.

L'exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $(-4x + 4)$, positif avant $x = 1$ et négatif après.

f est donc croissante sur $[0; 1]$ puis décroissante sur $[1; +\infty[$.

$$f(0) = (0 - 1)e^3 = -e^3 \text{ et } f(1) = (2 - 1)e^1 = e.$$

Tableau : f croît de $-e^3$ à e sur $[0; 1]$, puis décroît de e vers 0 (sans l'atteindre) sur $[1; +\infty[$.

B.3 Justifier que la contrainte du client se traduit par $f(\alpha) = 0,15$, puis montrer qu'il existe une unique valeur de α dans $[1; +\infty[$ vérifiant cette égalité. En donner une valeur arrondie au dixième.

Le point $(\alpha; f(\alpha))$ et son symétrique $(\alpha; -f(\alpha))$ par rapport à l'axe des abscisses sont distants verticalement de $2f(\alpha)$.

Cette distance doit valoir 0,3 cm : $2f(\alpha) = 0,3 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0,15$.

Sur $[1; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, de $f(1) = e \approx 2,7$ vers 0 (sans l'atteindre).

Comme $0 < 0,15 < e$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 0,15$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$.

À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 3,3$.

C.1 À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale I de f entre 0,5 et 3,3 est, arrondie au dixième, égale à 3,6.

On pose $u(x) = 2x - 1$ et $v'(x) = e^{-2x+3}$, donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$.

$$I = [u(x)v(x)]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} u'(x)v(x) dx = \left[-\frac{1}{2}(2x-1)e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} + \int_{0,5}^{3,3} e^{-2x+3} dx$$

Le crochet vaut $-\frac{1}{2}(5,6e^{-3,6} - 0) = -2,8e^{-3,6}$.

L'intégrale restante vaut $\left[-\frac{1}{2}e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} = -\frac{1}{2}e^{-3,6} + \frac{1}{2}e^2$.

$$I = -2,8e^{-3,6} - 0,5e^{-3,6} + 0,5e^2 = 0,5e^2 - 3,3e^{-3,6} \approx \mathbf{3,6}.$$

C.2 Déterminer le volume du porte-clé en cm^3 , arrondi au dixième (volume = aire du logo $\times$ épaisseur de 0,2 cm).

Le logo est symétrique par rapport à l'axe des abscisses : son aire est le double de l'aire sous la courbe de f entre 0,5 et 3,3, c'est-à-dire $2I \approx 2 \times 3,6 = 7,2 \text{ cm}^2$.

$$\text{Volume} \approx 7,2 \times 0,2 = \mathbf{1,4 \text{ cm}^3}.$$

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)

A.1 Recopier et compléter l'arbre pondéré.

$$P(A_1) = 0,96 \text{ et } P(\overline{A_1}) = 1 - 0,96 = \mathbf{0,04}.$$

$$\text{D'après l'énoncé : } P_{A_1}(A_2) = \mathbf{0,94}, P_{A_1}(\overline{A_2}) = \mathbf{0,06}, P_{\overline{A_1}}(A_2) = \mathbf{0,35}, P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) = \mathbf{0,65}.$$

A.2 Montrer que $P(A_2) = 0,9164$.

A_1 et $\overline{A_1}$ formant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2)$$

$$P(A_2) = 0,96 \times 0,94 + 0,04 \times 0,35 = \mathbf{0,9164}.$$

A.3 Calculer $P_{A_2}(\overline{A_1})$ et interpréter.

$$P_{A_2}(\overline{A_1}) = \frac{P(\overline{A_1} \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0,04 \times 0,35}{0,9164} \approx \mathbf{0,0153} \text{ (arrondi à } 10^{-4}\text{)}.$$

Sachant que le message reçu par le deuxième relai est sans erreur, il y a environ 1,53 % de chances que le message reçu par le premier relai comportait des erreurs.

B.1.a Déterminer la probabilité que 4 tests soient positifs.

$$P(X = 4) = \binom{50}{4} \times 0,04^4 \times 0,96^{46} \approx \mathbf{0,09} \text{ (arrondi au centième).}$$

B.1.b Donner la probabilité qu'au moins un test soit positif.

À la calculatrice, $P(X \geq 1) \approx \mathbf{0,87}$ (arrondi au centième).

B.1.c Calculer l'espérance et la variance de X.

X suit la loi binomiale $(50; 0,04)$, donc $E(X) = 50 \times 0,04 = \mathbf{2}$ et $V(X) = 50 \times 0,04 \times 0,96 = \mathbf{1,92}$.

B.2.a Vérifier que $E(M) = 2$ et montrer que $V(M) = 0,0768$.

M est la moyenne de 25 variables indépendantes de même loi que X : $E(M) = E(X) = \mathbf{2}$.

$$V(M) = \frac{V(X)}{25} = \frac{1,92}{25} = \mathbf{0,0768}.$$

B.2.b À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $P(M < 7) > 0,99$.

$$P(M < 7) = P(-3 < M < 7) = P(-5 < M - 2 < 5) = 1 - P(|M - 2| \geq 5).$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour $t = 5$: $P(|M - 2| \geq 5) \leq \frac{V(M)}{5^2} = \frac{0,0768}{25} = 0,003072$.

Donc $P(M < 7) \geq 1 - 0,003072 = 0,996928$, qui est bien **supérieur à 0,99**.

C.1 Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} \leq p_n$.

Initialisation : $p_2 = 0,59 \times p_1 + 0,35 = 0,59 \times 0,96 + 0,35 = 0,9164 \leq 0,96 = p_1$: vraie au rang 1.

Hérédité : supposons $p_{n+1} \leq p_n$ pour un n donné. Comme $0,59 > 0$: $0,59p_{n+1} \leq 0,59p_n$, donc $0,59p_{n+1} + 0,35 \leq 0,59p_n + 0,35$, soit $p_{n+2} \leq p_{n+1}$: vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_{n+1} \leq p_n$.

C.2 Montrer que la suite (p_n) est convergente.

La suite (p_n) est décroissante (question C.1) et minorée par 0 (une probabilité est toujours positive) : **elle est donc convergente**.

C.3 Déterminer la valeur exacte de sa limite.

Notons $f(x) = 0,59x + 0,35$, fonction continue telle que $p_{n+1} = f(p_n)$. D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

$$0,59\ell + 0,35 = \ell \Leftrightarrow 0,35 = 0,41\ell \Leftrightarrow \ell = \frac{35}{41}.$$

La suite (p_n) converge donc vers $\frac{35}{41}$.

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)**A.1.a Montrer que le triangle ABC est isocèle en C.**

Le repère étant orthonormé : $AC = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{81}{16} + \frac{144}{16}} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}$.

$$CB = \sqrt{\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}.$$

Comme $AC = CB$, le triangle ABC est isocèle en C.

A.1.b Montrer que l'aire du triangle ABC est 6,75 m².

Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal C est aussi une médiane : elle passe par I, milieu de [AB], de coordonnées $\left(\frac{9}{4}; 0; 0\right)$.

$$AB = \frac{9}{2} \text{ et } CI = \sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} = 3.$$

$$\text{Aire} = \frac{AB \times CI}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 3 = \mathbf{6,75 \text{ m}^2}.$$

A.2.a Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $z = 0$.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ont des coordonnées non proportionnelles : A, B, C ne sont pas alignés et définissent un plan.

Comme $z_A = z_B = z_C = 0$, une équation cartésienne du plan (ABC) est bien $z = 0$.

A.2.b Montrer que $H\left(\frac{3}{2}; 1; 0\right)$ est le projeté orthogonal de D sur (ABC).

$z_H = 0$, donc H appartient à (ABC).

$\overrightarrow{HD} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\vec{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, normal à (ABC) (car l'équation du plan est $z = 0$) : la droite (HD) est donc orthogonale à (ABC).

H est donc bien le projeté orthogonal de D sur (ABC).

A.3 En déduire le volume du module.

En choisissant ABC comme base, la hauteur associée est $DH = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = 3$.

$$V = \frac{1}{3} \times 6,75 \times 3 = \mathbf{6,75 \text{ m}^3}.$$

B.1.a Montrer que $\vec{n}(4; 3; 3)$ est normal au plan (BCD).

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : B, C, D définissent bien un plan.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \times \left(-\frac{9}{4}\right) + 3 \times 3 + 3 \times 0 = -9 + 9 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 4 \times (-3) + 3 \times 1 + 3 \times 3 = -12 + 3 + 9 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD) : $\vec{n}$ est donc normal à (BCD).

B.1.b En déduire qu'une équation cartésienne de (BCD) est $4x + 3y + 3z - 18 = 0$.

Une équation de (BCD) est de la forme $4x + 3y + 3z + d = 0$. Comme $B\left(\frac{9}{2}; 0; 0\right) \in (BCD)$: $4 \times \frac{9}{2} + d = 0$, donc $d = -18$.

Une équation cartésienne de (BCD) est donc bien $4x + 3y + 3z - 18 = 0$.

B.1.c Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale à (BCD) passant par D.

$$\Delta \text{ est dirigée par } \vec{n}(4; 3; 3) \text{ et passe par } D\left(\frac{3}{2}; 1; 3\right) : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

B.2 Montrer que L a pour coordonnées $\left(-\frac{5}{2}; -2; 0\right)$.

L, point de Δ , a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2} + 4t_0; 1 + 3t_0; 3 + 3t_0\right)$ pour un certain t_0 , et vérifie l'équation de (ABC), soit $z = 0$.

$$3 + 3t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = -1.$$

En remplaçant : $x = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}$, $y = 1 - 3 = -2$, $z = 0$: L a bien pour coordonnées $\left(-\frac{5}{2}; -2; 0\right)$.

B.3 Montrer que le module est adapté aux débutants.

$$\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DL} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DL} = 0 \times (-4) + 0 \times (-3) + (-3) \times (-3) = 9.$$

Or $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DL} = DH \times DL \times \cos(\widehat{LDH})$, avec $DH = 3$ et $DL = \sqrt{16 + 9 + 9} = \sqrt{34}$.

$$\cos(\widehat{LDH}) = \frac{9}{3\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}, \text{ donc } \widehat{LDH} \approx 59,04^\circ.$$

Comme $59,04^\circ < 60^\circ$, le module est bien adapté aux débutants.

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)**1.a Affirmation 1 : la courbe de f passe par $A(\ln 2; \frac{1}{2})$. Vrai ou faux ?**L'équation $y' + 2y = 0$ s'écrit $y' = -2y$, de solutions $x \mapsto Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.Comme $f(0) = 1 : C = 1$, donc $f(x) = e^{-2x}$.

$$f(\ln 2) = e^{-2\ln 2} = e^{\ln(\frac{1}{4})} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}.$$

L'affirmation 1 est FAUSSE.**1.b Affirmation 2 : sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, la courbe de f est au-dessus de ses tangentes. Vrai ou faux ?**

$$f'(x) = 1 + \sin(x), \text{ donc } f''(x) = \cos(x).$$

Sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, $\cos(x) \leq 0$: f est donc concave, et sa courbe est **en dessous** de ses tangentes (pas au-dessus).**L'affirmation 2 est FAUSSE.****1.c Affirmation 3 : $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f . Vrai ou faux ?**

Pour tout $x > 0$: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$, soit $1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, les deux bornes tendent vers 1 : d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.**L'affirmation 3 est VRAIE : $y = 1$ est bien asymptote horizontale en $+\infty$.****2. Affirmation 4 : $f(x) = 2x - e^{3x}$ est solution de (E_2) . Vrai ou faux ?**

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = 2 - 3e^{3x}.$$

$$f'(x) - 3f(x) = (2 - 3e^{3x}) - 3(2x - e^{3x}) = 2 - 3e^{3x} - 6x + 3e^{3x} = 2 - 6x.$$

 f vérifie donc bien l'équation (E_2) : **l'affirmation 4 est VRAIE.****Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)****A.1 Donner les variations de F_2 sur $]0; 3]$.**

F_2 est une primitive de f_2 , donc ses variations sont données par le signe de f_2 . D'après le graphique, F_2 est décroissante sur $]0; 0,3]$, croissante sur $[0,3; 2,5]$, puis décroissante sur $[2,5; 3]$.

A.2 Identifier les courbes représentant f_2 et f_2' .

f_2 admet un maximum en $x \approx 0,75$ (là où F_2 change de croissante à décroissante) : sa dérivée doit s'y annuler. C'est la **courbe 1** qui s'annule vers 0,75 : elle représente f_2' .

Le point A (point d'inflexion de $\mathcal{C}_2$) est situé vers $x \approx 1,6$: la dérivée seconde s'y annule. C'est la **courbe 2** qui s'annule vers 1,6 : elle représente f_2'' .

B.1.a Montrer que $f_1(x) = -1 - \ln(x)/x^2$.

$f_1 = w + \frac{u}{v}$ avec $w(x) = 1 - x$, $u(x) = 1 + \ln x$, $v(x) = x$, donc $w'(x) = -1$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v'(x) = 1$.

$$f_1'(x) = w'(x) + \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} = -1 + \frac{1 - (1 + \ln x)}{x^2} = -1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

B.1.b Déterminer la limite de $f_1(x)$ en $+\infty$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1'(x) = -1$.

B.2.a Justifier les variations de f_1 et la valeur de l'extremum.

$f_1''(x)$ a le signe de $2 \ln x - 1$ (car $x^3 > 0$), positif pour $x > e^{\frac{1}{2}}$.

f_1' est donc décroissante sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$ puis croissante sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$.

$$f_1'(e^{\frac{1}{2}}) = -1 - \frac{\ln(e^{\frac{1}{2}})}{e} = -1 - \frac{1}{2e} : \text{c'est bien la valeur du minimum du tableau.}$$

B.2.b Justifier la limite de f_1 en 0.

Quand $x \rightarrow 0^+$: $-\ln(x) \rightarrow +\infty$ et $x^2 \rightarrow 0^+$, donc par quotient puis somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1'(x) = +\infty$.

B.2.c Montrer qu'il existe une unique solution α à $f_1(x) = 0$, puis que f_1 admet un maximum.

Sur $\left]0; e^{\frac{1}{2}}\right]$, f_1' est continue et strictement décroissante, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1'(x) = +\infty > 0$ et $f_1'(e^{\frac{1}{2}}) = -1 - \frac{1}{2e} < 0$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_1'(x) = 0$ y admet une unique solution.

Sur $\left[e^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[$, f_1' est strictement croissante et tend vers -1 , donc reste toujours strictement négative : pas de solution sur cet intervalle.

Il existe donc **une unique solution** α à $f_1'(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$, et f_1 **admet un maximum en** α (signe de f_1' positif puis négatif).

B.2.d Compléter le script Python calculant une valeur approchée de α .

- Condition de la boucle « while » : **while d(u) > 0 :**
- Instruction dans la boucle : **u = u + 0.01**

C.1 Montrer que H est une primitive de h.

H est de la forme $\frac{1}{2}u^2$ avec $u(x) = 1 + \ln x$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$, et $H'(x) = u'(x)u(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x) = h(x)$.

H est donc bien une primitive de h sur $]0; +\infty[$.

C.2 Existe-t-il k tel que la valeur moyenne de f sur $[1; e]$ soit nulle ?

$$\begin{aligned} \text{La valeur moyenne est } \mu &= \frac{1}{e-1} \int_1^e f_k(x) dx = \frac{1}{e-1} \int_1^e (1-x+kh(x)) dx = \frac{1}{e-1} \left[x - \frac{x^2}{2} + kH(x) \right]_1^e \\ &= \frac{1}{e-1} \left(\left(e - \frac{e^2}{2} + k \frac{(1+1)^2}{2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} + k \frac{(1+0)^2}{2} \right) \right) = \frac{2e - e^2 + 3k - 1}{2(e-1)}. \end{aligned}$$

$$\mu = 0 \Leftrightarrow 2e - e^2 + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{e^2 - 2e + 1}{3} = \frac{(e-1)^2}{3}.$$

Oui, il existe une unique valeur $k = \frac{(e-1)^2}{3}$ pour laquelle la valeur moyenne de f_k sur $[1; e]$ est nulle.

Bac Première 2026 — Métropole (SPE)

Affirmation 1 : quelle que soit la valeur de u , $x^2 + x - u^2 = 0$ possède deux solutions réelles distinctes. Vrai ou faux ?

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-u^2) = 1 + 4u^2$.

Comme $4u^2 \geq 0$ pour tout réel u , $\Delta \geq 1 > 0$: **le discriminant est toujours strictement positif, l'équation admet donc toujours deux solutions réelles distinctes. L'affirmation 1 est VRAIE.**

Affirmation 2 : la suite (u_n) définie par $u_n = 2^{-n}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Vrai ou faux ?

$$u_n = 2^{-n} = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n : (u_n) \text{ est bien géométrique de raison } \frac{1}{2}, \text{ de premier terme } u_0 = 1.$$

L'affirmation 2 est VRAIE.

Affirmation 3 : le point A(3;3) appartient à la tangente à Cf en x=0, pour f(x) = e^x - 1.
Vrai ou faux ?

$f'(x) = e^x$, donc $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$. L'équation de la tangente en $x = 0$ est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$.

Le point A(3;3) vérifie $y = x$ (puisque $3 = 3$) : **il appartient bien à la tangente. L'affirmation 3 est VRAIE.**

Bac Première 2026 — Métropole (SPE)

1. Donner les coordonnées du vecteur KP et sa norme. (P(4;0), K(1;0))

$\overrightarrow{KP} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, de norme 3.

2. Exprimer en fonction de x les coordonnées du vecteur KM et sa norme. (M(x;3))

$\overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} x-1 \\ 3 \end{pmatrix}$, de norme $\sqrt{(x-1)^2 + 9}$.

3. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{KM}$ est égal à $3x - 3$.

$$\overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{KM} = 3(x-1) + 0 \times 3 = 3x - 3.$$

4. Montrer que, si l'angle PKM vaut $\pi/3$, alors x est solution de (E) : $\sqrt{(x-1)^2 + 9} = 2x - 2$.

$$\overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{KM} = KP \times KM \times \cos(\widehat{PKM}) = 3 \times \sqrt{(x-1)^2 + 9} \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} \sqrt{(x-1)^2 + 9} \quad (\text{car } \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}).$$

Or ce produit scalaire vaut aussi $3x-3$ (question 3) : $\frac{3}{2} \sqrt{(x-1)^2 + 9} = 3x-3 \iff \sqrt{(x-1)^2 + 9} = 2x - 2$.

x est donc bien solution de l'équation (E) lorsque l'angle $\widehat{PKM}$ vaut $\frac{\pi}{3}$.

5. Vérifier que $1 + \sqrt{3}$ est solution de (E).

En élevant au carré (valide car $2x - 2 \geq 0$ pour une solution) : $(x-1)^2 + 9 = (2x-2)^2 \iff 3x^2 - 6x - 6 = 0$.

Discriminant : $\Delta = 36 + 72 = 108 = (6\sqrt{3})^2$. Les solutions sont $\frac{6 \pm 6\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \sqrt{3}$.

$1 + \sqrt{3}$ est donc bien solution de l'équation (E).

Bac Première 2026 — Métropole (TECHNO)**1. Par lecture graphique, déterminer $f(-2)$ et $f(1)$.**

D'après les coordonnées des points A et B sur le graphique : $f(-2) = -5$ et $f(1) = 4$.

2. Par lecture graphique, déterminer $f'(-2)$ et $f'(1)$.

$f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente (d) en A, soit **6** ; $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T en B, horizontale, soit **0**.

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ par lecture graphique.

La courbe coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 3 : $\mathcal{S} = \{-1; 3\}$.

4. Dresser le tableau de variation de f par lecture graphique.

f est croissante sur $[-3; 1]$ (de -12 à 4) puis décroissante sur $[1; 4]$ (de 4 à -5).

5. On admet que $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Retrouver par le calcul les résultats de la question 1.

$f(-2) = -4 - 4 + 3 = -5$ et $f(1) = -1 + 2 + 3 = 4$: cela confirme la lecture graphique.

6.a Déterminer $f'(x)$ puis retrouver les résultats de la question 2.

$f'(x) = -2x + 2$. $f'(-2) = 4 + 2 = 6$ et $f'(1) = -2 + 2 = 0$: cela confirme la lecture graphique.

6.b Vérifier par le calcul que $f(x) = (x + 1)(-x + 3)$, puis retrouver les résultats de la question 3.

$(x + 1)(-x + 3) = -x^2 + 3x - x + 3 = -x^2 + 2x + 3$, ce qui correspond bien à $f(x)$.

$(x + 1)(-x + 3) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 3$: cela confirme les solutions trouvées en question 3.

6.c Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[-3; 4]$ et en déduire les variations de f .

$f'(x) = -2x + 2 = 0 \iff x = 1$, et $f'(x) > 0 \iff x < 1$ (fonction affine décroissante en x , de coefficient directeur -2).

f est donc croissante sur $[-3; 1]$ (où $f' \geq 0$) et décroissante sur $[1; 4]$ (où $f' \leq 0$), conformément à la lecture graphique.

Bac Première 2026 — Amérique du Nord (SPE)**A.1 Donner la puissance électrique des panneaux à 11 h 00 (lecture graphique).**

Avec la précision permise par le graphique, on lit une puissance d'environ **5,75 kW** à 11 h.

A.2 Résoudre graphiquement $f(x) \geq 5$ et interpréter.

Graphiquement, $f(x) \geq 5$ pour $x \in [10,5; 15,5]$ environ : **la puissance des panneaux dépasse 5 kW entre environ 10 h 30 et 15 h 30**, soit pendant environ 5 heures dans la journée.

B.1 Déterminer la nature de la suite (c_n) et préciser sa raison.

Chaque année, le tarif est multiplié par 1,06 (hausse de 6 %) : (c_n) **est géométrique de raison $q = 1,06$** , de premier terme $c_0 = 0,15$.

B.2 Exprimer c_n en fonction de n .

(c_n) étant géométrique : $c_n = c_0 \times q^n = 0,15 \times 1,06^n$.

B.3 Donner le calcul permettant d'obtenir le coût en 2030.

2030 correspond à $2020 + 10$, soit $n = 10$: le coût pour 1 kWh en 2030 est $c_{10} = 0,15 \times 1,06^{10}$ (calcul non demandé).

B.4.a Que représentent les variables c et S du programme Python ?

c représente le coût (en euros) d'un kWh pour l'année considérée. S représente l'économie totale cumulée (en euros) depuis 2020 : à chaque tour de boucle, on ajoute l'économie de l'année (2000 kWh non achetés, au prix c), puis on met à jour l'année et le prix.

B.4.b Le programme affiche 16. Interpréter ce résultat.

Il faut 16 années pour que l'économie cumulée dépasse 7 000 €, le coût de l'installation : selon ce modèle, l'investissement de Camille est rentabilisé en $2020 + 16 = 2036$.

Bac Première 2026 — Centres étrangers G1 (SPE)**1.a Donner $f(1)$.**

La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par $A(1; 20)$: $f(1) = 20$.

1.b Déterminer $f'(1)$.

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A , c'est-à-dire de la droite (AB) : $f'(1) = \frac{10 - 20}{3 - 1} = \frac{-10}{2} = -5$.

1.c Justifier que la tangente TA a pour équation $y = -5x + 25$.

L'équation de la tangente en $x = 1$ est $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -5(x - 1) + 20 = -5x + 5 + 20 = -5x + 25$.

2.a Démontrer que $f'(x) = (2x - 3)(2x + 3)/x^2$ pour $f(x) = (4x^2 + 7x + 9)/x$.

Par la formule de dérivation d'un quotient : $f'(x) = \frac{(8x + 7)x - (4x^2 + 7x + 9) \times 1}{x^2} = \frac{8x^2 + 7x - 4x^2 - 7x - 9}{x^2} = \frac{4x^2 - 9}{x^2}$.

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3), \text{ donc } f'(x) = \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{x^2}.$$

2.b Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

$x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$. $2x + 3 > 0$ toujours sur cet intervalle. $2x - 3 > 0 \iff x > \frac{3}{2}$. Donc $f'(x) < 0$ sur $]0; \frac{3}{2}[$ et $f'(x) > 0$ sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$.

2.c En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.

f est décroissante sur $]0; \frac{3}{2}]$ et croissante sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$.

3. Existe-t-il une tangente à C_f parallèle à la droite $y = 3x + 5$?

Deux droites sont parallèles ssi elles ont le même coefficient directeur : on cherche x_0 tel que $f'(x_0) = 3$.

$$\frac{4x^2 - 9}{x^2} = 3 \iff 4x^2 - 9 = 3x^2 \iff x^2 - 9 = 0 \iff (x - 3)(x + 3) = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

Seule $x_0 = 3$ appartient à $]0; +\infty[$: **oui, il existe une unique tangente à C_f parallèle à $y = 3x + 5$, c'est la tangente au point d'abscisse 3.**

Brevet 2025 — Métropole**1. Dans un repère, un point A est placé sur la grille. Quelles sont ses coordonnées ?**

D'après le repère, **A(4 ; 3)**.

2. Un sac de 32 billes contient 4 billes vertes. Quelle est la probabilité de tirer une bille verte au hasard ?

Il y a 4 billes vertes sur 32 : la probabilité est $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

3. Quelle est la solution de l'équation $5x - 4 = 6$?

$$5x - 4 = 6 \iff 5x = 10 \iff x = 2.$$

4. Dans la liste 13, 5, 9, 11, 15, 8, 14, 16, 17, quelle est la médiane ?

En rangeant dans l'ordre croissant : 5, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17 : la valeur du milieu (5e sur 9) est 13.

5. Dans une configuration où (DB) est parallèle à (EC), avec A, D, B alignés et A, E, C alignés, quelle égalité donne le théorème de Thalès ?

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \text{ (les rapports des longueurs sur chaque droite sécante sont égaux).}$$

Brevet 2025 — Amérique du Nord

1. Le programme A consiste à : choisir un nombre, multiplier par 3, ajouter 15, diviser par 3, soustraire le nombre de départ. Montrer que, pour le nombre 4, le résultat est 5.

$$4 \xrightarrow{\times 3} 12 \xrightarrow{+15} 27 \xrightarrow{\div 3} 9 \xrightarrow{-4} 5 : \text{on obtient bien } 5.$$

2. Montrer que, pour le nombre -2 , le résultat du programme A est encore 5.

$$-2 \xrightarrow{\times 3} -6 \xrightarrow{+15} 9 \xrightarrow{\div 3} 3 \xrightarrow{-(-2)} 5 : \text{on retrouve } 5.$$

3. Justifier que « le programme A donne toujours le même résultat » est vrai.

En partant d'un nombre a : $a \xrightarrow{\times 3} 3a \xrightarrow{+15} 3a + 15 = 3(a + 5) \xrightarrow{\div 3} a + 5 \xrightarrow{-a} 5$. Quel que soit a , le résultat final est toujours 5.

4. Le programme B consiste à : soustraire 1 au nombre choisi, soustraire 6 au nombre choisi, multiplier les deux résultats, ajouter 5. Lorsque le nombre choisi est 10, quel résultat obtient-on ?

$$10 - 1 = 9 \text{ et } 10 - 6 = 4 : \text{leur produit vaut } 9 \times 4 = 36, \text{ puis } 36 + 5 = 41.$$

5. Il existe exactement deux nombres pour lesquels les programmes A et B donnent des résultats identiques. Lesquels ?

Le programme A donne toujours 5 (question 3). Avec le programme B, en partant de x , on obtient $(x - 1)(x - 6) + 5$.

Les résultats sont égaux si $5 = (x - 1)(x - 6) + 5$, c'est-à-dire $(x - 1)(x - 6) = 0$, dont les solutions sont 1 et 6.

Brevet 2025 — Asie

Partie A — 1. ABCD est un rectangle avec $AD = x$ et $AB = 16 - 2x$; EFGH est un carré de côté $2x$. Pour $x = 1,5$ cm, calculer le périmètre du carré EFGH.

$$\text{Périmètre} = 4 \times 2x = 4 \times 2 \times 1,5 = \mathbf{12 \text{ cm.}}$$

Partie A — 2. Calculer AB pour $x = 1,5$ cm.

$$AB = 16 - 2x = 16 - 2 \times 1,5 = \mathbf{13 \text{ cm.}}$$

Partie A — 3. Construire en vraie grandeur le rectangle ABCD.

On construit un rectangle de largeur $AD = 1,5$ cm et de longueur $AB = 13$ cm, à l'aide de l'équerre et de la règle graduée.

Partie A — 4. Les périmètres de ABCD et EFGH sont-ils égaux pour $x = 1,5$ cm ?

$$\text{Périmètre de ABCD} = 2 \times (AB + AD) = 2 \times (13 + 1,5) = 2 \times 14,5 = 29 \text{ cm.}$$

Périmètre de EFGH = 12 cm (question A.1). $29 \neq 12$: les périmètres ne sont pas égaux.

Partie B — 1.a Un tableur donne le périmètre du carré (colonne B à G) en fonction de x (ligne 1). Quelle formule saisir en B2 avant de l'étirer jusqu'à G2 ?

Le périmètre du carré vaut $4 \times 2x = 8x$, avec x dans la cellule B1 : la formule est `'=8*B1'` (ou `'=4*2*B1'`).

Partie B — 1.b Le tableau (x de 1 à 6, périmètres du carré 8-16-24-32-40-48, périmètres du rectangle 30-28-26-24-22-20) permet-il de trouver une valeur de x où les deux périmètres sont égaux ?

Non : aucune ligne du tableau ne donne deux périmètres identiques (les valeurs se croisent entre $x = 3$ et $x = 4$ sans jamais coïncider exactement dans le tableau).

Partie B — 2.a Montrer que le périmètre du rectangle peut s'écrire $-2x + 32$.

$$\text{Périmètre} = 2 \times (AB + AD) = 2 \times (x + 16 - 2x) = 2 \times (16 - x) = 32 - 2x = -2x + 32.$$

Partie B — 2.b Déterminer par le calcul la valeur de x pour laquelle les deux périmètres sont égaux.

$$\text{On résout } -2x + 32 = 8x \text{ (périmètre du carré} = 4 \times 2x = 8x) : 32 = 10x, \text{ donc } x = 3,2.$$

La solution est $x = \mathbf{3,2 \text{ cm.}}$

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 1)

L'espace est muni d'un repère orthonormé. La droite (d) a pour représentation paramétrique $x = 3 - 2t$, $y = -1$, $z = 2 - 6t$ (t réel). On donne $A(3; -3; -2)$, $B(5; -4; -1)$, C le point de (d) d'abscisse 2, et H le projeté orthogonal de B sur le plan P d'équation $x + 3z - 7 = 0$. **Affirmation 1 : la droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires. Vraie ou fausse ?**

(d) est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ et l'axe des ordonnées par $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires (ils sont même orthogonaux), donc les droites ne sont ni parallèles ni confondues.

L'axe des ordonnées passe par l'origine et a pour représentation paramétrique $x = 0$, $y = s$, $z = 0$. Chercher un point commun revient à résoudre $3 - 2t = 0$, $-1 = s$, $2 - 6t = 0$, soit $t = 1,5$ et $t = \frac{1}{3}$ simultanément : système impossible, donc les droites ne sont pas sécantes.

Les droites ne sont ni parallèles, ni confondues, ni sécantes : elles sont donc non coplanaires. **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 2 : le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne $x + 3z + 3 = 0$. Vraie ou fausse ?

(d) est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, colinéaire à $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, qui est donc un vecteur normal du plan cherché : une équation du plan est de la forme $x + 3z + d = 0$.

Le point A appartient au plan : $3 + 3 \times (-2) + d = 0 \iff d = 3$.

Le plan a donc pour équation $x + 3z + 3 = 0$. **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 3 : une mesure, en radian, de l'angle géométrique BAC est $\pi/6$. Vraie ou fausse ?

C appartient à (d) et a pour abscisse 2 : $3 - 2t = 2 \iff t = \frac{1}{2}$, d'où $z_C = 2 - 6 \times \frac{1}{2} = -1$, soit $C(2; -1; -1)$.

$\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = -3$.

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ et $\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

Or $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, donc $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{-3}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = -\frac{1}{2}$, soit $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

$\frac{2\pi}{3} \neq \frac{\pi}{6}$: l'affirmation est fausse.

Affirmation 4 : la distance BH est égale à $\sqrt{\frac{10}{2}}$. Vraie ou fausse ?

Le vecteur $\vec{u'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, normal au plan P, dirige la droite Δ orthogonale à P passant par B : une représentation paramétrique de Δ est $x = 5+t$, $y = -4$, $z = -1+3t$.

L'intersection avec P vérifie $(5+t) + 3(-1+3t) - 7 = 0 \iff 10t = 5 \iff t = \frac{1}{2}$, donc $H(\frac{11}{2}; -4; \frac{1}{2})$.

$\vec{BH} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, donc $\|\vec{BH}\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4}$, soit $BH = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

L'affirmation est vraie.

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 1)

Partie A — 1. Les courbes C_1 et C_2 représentent deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, l'une étant la dérivée de l'autre ; C_1 coupe l'axe des ordonnées en $(0; 1)$, C_2 le coupe en $(0; 2)$ et coupe l'axe des abscisses en $(-2; 0)$ et $(1; 0)$. Associer à g et g' leur courbe.

La fonction représentée par C_1 est décroissante sur $] -\infty; -2]$ et $[1; +\infty[$, croissante sur $[-2; 1]$.

La fonction représentée par C_2 est négative sur $] -\infty; -2]$ et $[1; +\infty[$, positive sur $[-2; 1]$: ce sont exactement les intervalles où la fonction de C_1 croît ou décroît.

Le signe de la dérivée déterminant les variations, C_1 représente g et C_2 représente g'.

Partie A — 2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

La tangente en 0 a pour équation $y = g'(0)x + g(0)$.

C_1 coupe l'axe des ordonnées en $(0; 1)$ donc $g(0) = 1$; C_2 le coupe en $(0; 2)$ donc $g'(0) = 2$.

L'équation de la tangente est donc $y = 2x + 1$.

Partie B — 1. On considère l'équation différentielle (E) : $y + y' = (2x+3)e^{-x}$. Montrer que $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est une solution particulière de (E).

f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables : $f'_0(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x)(-e^{-x}) = (2x + 3 - x^2 - 3x)e^{-x} = (-x^2 - x + 3)e^{-x}$.

$f_0(x) + f'_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x} + (-x^2 - x + 3)e^{-x} = (2x + 3)e^{-x}$: f_0 vérifie bien (E).

Partie B — 2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y + y' = 0$.

(E_0) équivaut à $y' = -y$: ses solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie B — 3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

(E) est de la forme $y' = ay + f$ avec f_0 solution particulière : ses solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-x} + f_0(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie B — 4. On admet que g est solution de (E). Déterminer l'expression de g .

Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$. Comme $g(0) = 1$: $1 = (0 + 0 + C)e^0 = C$.

$g(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$.

Partie B — 5. Déterminer les solutions de (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Une courbe admet exactement deux points d'inflexion si et seulement si sa dérivée seconde s'annule exactement deux fois en changeant de signe.

Soit $f(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$ une solution de (E) : $f'(x) = (-x^2 - x + 3 - C)e^{-x}$ et $f''(x) = (x^2 - x - 4 + C)e^{-x}$.

L'exponentielle étant strictement positive, $f''(x)$ est du signe de $x^2 - x - 4 + C$, dont le discriminant est $\Delta = 1 - 4(-4 + C) = 17 - 4C$.

Ce polynôme change deux fois de signe si et seulement si $\Delta > 0$, soit $C < \frac{17}{4}$.

Les solutions cherchées sont les fonctions $x \mapsto (x^2 + 3x + C)e^{-x}$ avec $C < \frac{17}{4}$.

Partie C — 1. On considère $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la limite de f en $+\infty$ est égale à 0.

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} + 3\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}.$$

Par croissances comparées, pour tout entier n non nul, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$; donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Partie C — 2.a Vérifier que, pour tout réel x , $f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$.

$$f'(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x + 2)(-e^{-x}) = (2x + 3 - x^2 - 3x - 2)e^{-x} = (-x^2 - x + 1)e^{-x}.$$

Partie C — 2.b Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de f .

L'exponentielle étant strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $-x^2 - x + 1$, de discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$.

Ses racines sont $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$; le coefficient dominant étant négatif, $-x^2 - x + 1$ est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles.

f est décroissante sur $] -\infty ; x_1]$ et sur $[x_2 ; +\infty[$, croissante sur $[x_1 ; x_2]$.

Partie C — 3. Expliquer pourquoi f est positive sur $[0 ; +\infty[$.

L'exponentielle étant strictement positive, $f(x)$ est du signe de $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$, de racines -2 et -1 .

Le coefficient dominant étant positif, ce polynôme est positif sur $] -1 ; +\infty[$, donc en particulier sur $[0 ; +\infty[$: f est positive sur $[0 ; +\infty[$.

Partie C — 4. On admet que $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$ est une primitive de f . Pour α réel positif, déterminer l'aire $A(\alpha)$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites $x = 0$ et $x = \alpha$.

f étant positive sur $[0 ; \alpha]$, l'aire cherchée est $\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx = F(\alpha) - F(0)$.

$$F(0) = (0 - 0 - 7)e^0 = -7, \text{ donc } \mathcal{A}(\alpha) = (-\alpha^2 - 5\alpha - 7)e^{-\alpha} + 7 \text{ unités d'aire.}$$

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 2)

Partie A — 1.a On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Donner la valeur exacte de u_1 et u_2 .

$$u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{2} \text{ et } u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{2}}.$$

Partie A — 1.b Émettre une conjecture, à la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.

À la calculatrice, on conjecture que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 1.

Partie A — 2.a Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation : $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,414$ et $u_0 = 2$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que, pour un entier n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$. La fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{1} \leq \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n}$, soit $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Partie A — 2.b En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, (u_n) est minorée par 1 et décroissante : toute suite décroissante et minorée étant convergente, (u_n) converge vers une limite $\ell \geq 1$.

Partie A — 2.c Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.

Pour $x \geq 0$: $\sqrt{x} = x \iff x = x^2 \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1$.

L'équation admet deux solutions sur $[0 ; +\infty[$: 0 et 1.

Partie A — 2.d Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) .

(u_n) converge vers ℓ et vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction racine carrée, continue sur $[0 ; +\infty[$: par le théorème du point fixe, ℓ est solution de $f(x) = x$.

D'après la question précédente, les solutions sont 0 et 1, et comme $\ell \geq 1$, on a $\ell = 1$.

La suite (u_n) converge vers 1.

Partie B — 1.a On pose $v_n = \ln(u_n)$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(\sqrt{u_n}) = \frac{1}{2} \ln(u_n) = \frac{1}{2} v_n$.

(v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, de premier terme $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$.

Partie B — 1.b Exprimer v_n en fonction de n .

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\ln(2)}{2^n}.$$

Partie B — 1.c En déduire que, pour tout entier naturel n , $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.

Comme $v_n = \ln(u_n)$ et $v_n = \frac{\ln(2)}{2^n}$, on a $\frac{\ln(2)}{2^n} = \ln(u_n)$, soit $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.

Partie B — 2.a Déterminer à la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à $]0,99 ; 1,01[$, et une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.

À la calculatrice, pour tout $k < 7$, $u_k > 1,01$, et $u_7 \approx 1,00543$: la plus petite valeur est $k = 7$.

Partie B — 2.b En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.

En prenant $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ pour $x \in]0,99 ; 1,01[$: $\ln(u_7) \approx u_7 - 1 \approx 0,00543$.

Partie B — 2.c Déduire des questions précédentes une approximation de $\ln(2)$.

D'après ce qui précède, $\ln(2) \approx 2^7 \ln(u_7) \approx 2^7 \times 0,00543 \approx 0,695$.

Partie B — 3. On généralise à tout réel a strictement supérieur à 1. Compléter l'algorithme Python (from math import *; def Briggs(a) : n=0; while a>=1.01 : a=sqrt(a); n=n+1; L=...; return L) pour que Briggs(a) approche $\ln(a)$.

En s'appuyant sur la relation $\ln(a) \approx 2^n(a - 1)$ établie précédemment, il faut compléter la ligne par ' $L = 2n * (a-1)$ '.

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 2)

Partie A — ABCDEFGH est un cube d'arête 1 ; I, J, K, L, M sont les milieux respectifs de [AB], [BF], [AE], [CD], [DH]. **Affirmation 1 : $\vec{JH} = 2\vec{BI} + \vec{DM} - \vec{CB}$. Vraie ou fausse ?**

$$\vec{JH} = \vec{JF} + \vec{FE} + \vec{EH} = \frac{1}{2}\vec{BF} + \vec{BA} + \vec{BC}.$$

Or $\frac{1}{2}\vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{DH} = \vec{DM}$ (M milieu de [DH]) et $\vec{BA} + \vec{BC} = 2\vec{BI} - \vec{CB}$ (I milieu de [AB]), donc $\vec{JH} = \vec{DM} + 2\vec{BI} - \vec{CB}$.

L'affirmation est vraie.

Partie A — Affirmation 2 : le triplet de vecteurs (AB, AH, AG) est une base de l'espace. Vraie ou fausse ?

$$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AB} + \vec{AH} : \vec{AG} \text{ s'exprime comme combinaison linéaire de } \vec{AB} \text{ et } \vec{AH}.$$

Les trois vecteurs sont donc coplanaires : **l'affirmation est fausse.**

Partie A — Affirmation 3 : $\vec{IB} \cdot \vec{LM} = -\frac{1}{4}$. Vraie ou fausse ?

$$\vec{LM} = \vec{IK}, \text{ donc } \vec{IB} \cdot \vec{LM} = \vec{IB} \cdot \vec{IK}.$$

K se projette orthogonalement en A sur (AB), donc $\vec{IB} \cdot \vec{IK} = \vec{IB} \cdot \vec{IA}$, or ces deux vecteurs sont colinéaires de sens contraires : $\vec{IB} \cdot \vec{IA} = -IB \times IA = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ (arête de longueur 1, I milieu de [AB]).

L'affirmation est vraie.

Partie B — Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère le plan $P : 2x - y + 3z + 6 = 0$, $A(2; 0; -1)$ et $B(5; -3; 7)$. **Affirmation 4** : le plan P et la droite (AB) sont parallèles. Vraie ou fausse ?

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ dirige } (AB); \overrightarrow{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ est normal à } P.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n} = 3 \times 2 + (-3) \times (-1) + 8 \times 3 = 6 + 3 + 24 = 33 \neq 0.$$

Le vecteur normal au plan et le vecteur directeur de la droite ne sont pas orthogonaux : **l'affirmation est fausse** (le plan et la droite ne sont pas parallèles).

Partie B — **Affirmation 5** : le plan P' parallèle à P passant par B a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$. Vraie ou fausse ?

$$P \text{ et } P' \text{ étant parallèles, } \overrightarrow{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ est aussi normal à } P' : \text{ une équation de } P' \text{ est de la forme}$$

$$2x - y + 3z + d = 0.$$

$$\text{Le point } B \text{ appartient à } P' : 2 \times 5 - (-3) + 3 \times 7 + d = 0 \iff 10 + 3 + 21 + d = 0 \iff d = -34.$$

$$P' \text{ a donc pour équation } 2x - y + 3z - 34 = 0, \text{ soit, en multipliant par } -1 : -2x + y - 3z + 34 = 0.$$

L'affirmation est vraie.

Partie B — **Affirmation 6** : la distance du point A au plan P est égale à $\sqrt{\frac{14}{2}}$. Vraie ou fausse ?

$$\text{Notons } H \text{ le projeté orthogonal de } A \text{ sur } P : \overrightarrow{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ dirige la droite } \Delta \text{ orthogonale à } P \text{ passant}$$

$$\text{par } A, \text{ de représentation paramétrique } x = 2 + 2t, y = -t, z = -1 + 3t.$$

$$\text{L'intersection avec } P \text{ vérifie } 2(2 + 2t) - (-t) + 3(-1 + 3t) + 6 = 0 \iff 14t = -7 \iff t = -\frac{1}{2},$$

$$\text{donc } H \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2} \right).$$

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \text{ donc } \|\overrightarrow{AH}\|^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{14}{4}, \text{ soit } AH = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

L'affirmation est vraie.

Partie B — On note (d) la droite de représentation paramétrique $x = -12 + 2k$, $y = 6$, $z = 3 - 5k$ (k réel). Affirmation 7 : les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. Vraie ou fausse ?

(d) est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et (AB) par $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont ni parallèles ni confondues.

(AB) a pour représentation paramétrique $x = 2 + 3t$, $y = -3t$, $z = -1 + 8t$. Chercher un point commun revient à résoudre $2 + 3t = -12 + 2k$, $-3t = 6$, $-1 + 8t = 3 - 5k$, soit $t = -2$ et $k = 4$ dans les trois équations : le système admet une solution.

Les droites sont donc sécantes, au point $C(-4 ; 6 ; -17)$, donc coplanaires. **L'affirmation est fausse.**

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 2)

Partie A — 1.a On considère $f(x) = e \sin(x)$ sur $[0 ; \pi]$. Démontrer que $f'(x) = e [\sin(x) + \cos(x)]$ sur cet intervalle.

f est un produit de fonctions dérivables : $f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) = e^x [\sin(x) + \cos(x)]$.

Partie A — 1.b Justifier que f est strictement croissante sur $[0 ; \pi/2]$.

Sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$, et ils ne s'annulent jamais simultanément (sin ne s'annule qu'en 0 où $\cos(0) = 1$, cos ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$ où $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$) : donc $\sin(x) + \cos(x) > 0$ sur cet intervalle.

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , $f'(x) > 0$ comme produit de deux facteurs strictement positifs : f est strictement croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

Partie A — 2.a Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.

$f(0) = e^0 \sin(0) = 0$ et $f'(0) = e^0 [\sin(0) + \cos(0)] = 1$.

La tangente en 0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$, soit $y = x$.

Partie A — 2.b Démontrer que f est convexe sur $[0 ; \pi/2]$.

Pour tout réel x : $f''(x) = e^x [\sin(x) + \cos(x)] + e^x [\cos(x) - \sin(x)] = 2e^x \cos(x)$.

Sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \geq 0$ et $e^x > 0$, donc $f''(x) \geq 0$: f est convexe sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

Partie A — 2.c En déduire que, pour tout réel x de $[0 ; \pi/2]$, $e^x \sin(x) \geq x$.

La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier au-dessus de la tangente T d'équation $y = x$ au point d'abscisse 0.

Donc, pour tout $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, $f(x) \geq x$, c'est-à-dire $e^x \sin(x) \geq x$.

Partie A — 3. Justifier que le point d'abscisse $\pi/2$ de la courbe de f est un point d'inflexion.

$f''(x) = 2e^x \cos(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = \frac{\pi}{2}$ (positive avant, négative après, car $\cos$ change de signe en $\frac{\pi}{2}$) : le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est donc un point d'inflexion de la courbe de f .

Partie B — On note $I = \int_0^{\pi/2} e^x \sin(x) dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx$. En intégrant par parties de deux manières différentes, établir $I = 1 + J$ et $I = e^{\pi/2} - J$.

En posant $u(x) = e^x$, $v'(x) = \sin(x)$ (donc $u'(x) = e^x$, $v(x) = -\cos(x)$), l'intégration par parties donne : $I = [-\cos(x)e^x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx = 0 + 1 + J = 1 + J$.

En posant $u(x) = \sin(x)$, $v'(x) = e^x$ (donc $u'(x) = \cos(x)$, $v(x) = e^x$), l'intégration par parties donne : $I = [\sin(x)e^x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx = e^{\pi/2} - J$.

On obtient donc bien $I = 1 + J$ et $I = e^{\pi/2} - J$.

Partie B — En déduire que $I = (1 + e^{\pi/2}) / 2$.

En additionnant les deux relations : $2I = 1 + J + e^{\pi/2} - J = 1 + e^{\pi/2}$, donc $I = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2}$.

Partie B — On note $g(x) = x$. Calculer l'aire exacte du domaine hachuré entre les courbes de f et g sur $[0 ; \pi/2]$.

D'après la partie A, $f(x) \geq g(x)$ sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, donc l'aire cherchée est $\mathcal{A} = \int_0^{\pi/2} (f(x) - x) dx = I - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/2}$.

$$\mathcal{A} = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2} - \frac{\pi^2}{8} \text{ unités d'aire } (\approx 1,67 \text{ u.a.}).$$

Bac Terminale 2025 — Asie (jour 1)

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne α réel, $A(1; 1; 0)$, $B(2; 1; 0)$, $C(\alpha; 3; \alpha)$, et (d) : $x=1+t$, $y=2t$, $z=-t$. Affirmation 1 : pour toute valeur de α , A, B, C définissent un plan dont un vecteur normal est $\vec{j}(0; 1; 0)$. Vraie ou fausse ?

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$ ne sont jamais colinéaires (leurs deuxièmes coordonnées sont 0 et 2) : A, B, C définissent bien un plan quel que soit α .

Le repère étant orthonormé : $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{j} = (\alpha - 1) \times 0 + 2 \times 1 + \alpha \times 0 = 2 \neq 0$.

$\vec{j}$ n'est donc pas orthogonal à $\overrightarrow{AC}$, donc ce n'est pas un vecteur normal au plan (ABC). **L'affirmation est fausse.**

Affirmation 2 : il existe exactement une valeur de α telle que (AC) et (d) soient parallèles. Vraie ou fausse ?

(d) est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et (AC) par $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ont la même deuxième coordonnée (2), donc pour qu'ils soient colinéaires, il faudrait qu'ils soient égaux.

Cela exigerait $\alpha - 1 = 1$ (soit $\alpha = 2$) et $\alpha = -1$ simultanément, ce qui est impossible.

Quel que soit α , les vecteurs ne sont donc jamais colinéaires : **l'affirmation est fausse.**

Affirmation 3 : une mesure de l'angle OAB est 135° . Vraie ou fausse ?

$\overrightarrow{AO} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \times 1 + (-1) \times 0 + 0 \times 0 = -1$.

$AO = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $AB = \sqrt{1^2} = 1$, donc $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = AO \times AB \times \cos(\widehat{OAB}) = \sqrt{2} \cos(\widehat{OAB})$.

$-1 = \sqrt{2} \cos(\widehat{OAB}) \iff \cos(\widehat{OAB}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui correspond à un angle de $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, soit 135° . **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 4 : le projeté orthogonal de A sur (d) est le point H(1 ; 2 ; 2). Vraie ou fausse ?

Pour que $x_H = 1 + t$ avec $x_H = 1$, il faut $t = 0$; mais alors $y = 2 \times 0 = 0 \neq 2$ et $z = -0 = 0 \neq 2$: H ne vérifie pas la représentation paramétrique de (d), donc **H n'appartient même pas à (d)** : l'affirmation est fausse.

Affirmation 5 : la sphère de centre O et de rayon 1 rencontre (d) en deux points distincts. Vraie ou fausse ?

Un point M_t de (d) vérifie $OM_t = \sqrt{(1+t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2} = \sqrt{6t^2 + 2t + 1}$.

$$OM_t = 1 \iff 6t^2 + 2t + 1 = 1 \iff 6t^2 + 2t = 0 \iff 2t(3t + 1) = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = -\frac{1}{3}.$$

Cette équation a deux solutions distinctes : la sphère rencontre bien (d) en deux points. **L'affirmation est vraie.**

Bac Terminale 2025 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. 95 % des jouets réussissent le test de fabrication F ; parmi eux, 98 % réussissent le test de sécurité S. Donner $P(F)$ et $P_F(S)$.

D'après l'énoncé : $P(F) = 0,95$ et $P_F(S) = 0,98$.

Partie A — 2.a Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

L'arbre a pour première branche $P(F) = 0,95$ et $P(\bar{F}) = 0,05$; sur la branche F, $P_F(S) = 0,98$ et $P_F(\bar{S}) = 0,02$; sur la branche $\bar{F}$, les probabilités $P_{\bar{F}}(S)$ et $P_{\bar{F}}(\bar{S})$ restent à déterminer.

Partie A — 2.b 1 % des jouets ne réussissent aucun des deux tests. Montrer que $P_{\bar{F}}(\bar{S}) = 0,2$.

D'après l'énoncé, $P(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0,01$.

$$P_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{P(\bar{F} \cap \bar{S})}{P(\bar{F})} = \frac{0,01}{0,05} = 0,2.$$

Partie A — 3. Calculer la probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests.

$$P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0,95 \times 0,98 = 0,931, \text{ soit } \mathbf{0,93} \text{ arrondi au centième.}$$

Partie A — 4. Montrer que la probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut 0,97 arrondi au centième.

$\{F, \bar{F}\}$ forme une partition, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(S) = P(F \cap S) + P(\bar{F} \cap S)$.

$$P(\bar{F} \cap S) = P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(S) = 0,05 \times 0,8 = 0,04 \text{ (car } P_{\bar{F}}(S) = 1 - 0,2 = 0,8).$$

$$P(S) = 0,931 + 0,04 = 0,971 \approx \mathbf{0,97}.$$

Partie A — 5. Lorsque le jouet a réussi le test de sécurité, quelle est la probabilité qu'il réussisse le test de fabrication (arrondie au centième) ?

$$P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{0,931}{0,971} \approx \mathbf{0,96}.$$

Partie B — 1. On note S_n le nombre de jouets sur n réussissant le test de fabrication, suivant la loi binomiale de paramètres n et $0,95$. Exprimer $E(S_n)$ et $V(S_n)$ en fonction de n .

$$E(S_n) = np = 0,95n \text{ et } V(S_n) = np(1-p) = n \times 0,95 \times 0,05 = 0,0475n.$$

Partie B — 2.a Pour $n = 150$, déterminer une valeur approchée de $P(S_{150} = 145)$ à 10^{-3} près et interpréter.

À la calculatrice : $P(S_{150} = 145) \approx 0,109$.

Cela signifie que, dans environ 10,9 % des cas, exactement 145 des 150 jouets du lot réussissent le test de fabrication.

Partie B — 2.b Déterminer la probabilité qu'au moins 94 % des jouets du lot réussissent le test de fabrication (arrondie à 10^{-3}).

94 % de 150 jouets correspond à 141 jouets : la probabilité cherchée est $P(S_{150} \geq 141)$.

À la calculatrice, $P(S_{150} \geq 141) \approx 0,781$.

Partie B — 3.a On pose $F_n = S_n/n$. Montrer que $E(F_n) = 0,95$ et $V(F_n) = 0,0475/n$.

$$E(F_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E(S_n)}{n} = \frac{0,95n}{n} = 0,95.$$

$$V(F_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{0,0475n}{n^2} = \frac{0,0475}{n}.$$

Partie B — 3.b On note I l'évènement « la proportion de jouets réussissant le test de fabrication est strictement comprise entre 93 % et 97 % ». Déterminer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, une taille de lot n à partir de laquelle $P(I) \geq 0,96$.

L'évènement I s'écrit $|F_n - 0,95| < 0,02$, donc $P(I) = 1 - P(|F_n - 0,95| \geq 0,02)$.

D'après Bienaymé-Tchebychev, avec $t = 0,02$: $P(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \leq \frac{V(F_n)}{0,02^2} = \frac{0,0475}{0,0004n}$.

$$\text{On veut } 1 - \frac{0,0475}{0,0004n} \geq 0,96 \iff \frac{0,0475}{0,0004n} \leq 0,04 \iff n \geq \frac{0,0475}{0,04 \times 0,0004} = 2\,968,75.$$

Il faut donc un lot d'au moins **2 969 jouets** pour garantir $P(I) \geq 0,96$.

Bac Terminale 2025 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. Un patient prend 2 mL de médicament chaque heure. On pose $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$ pour tout $n \geq 1$ (u_n = quantité présente après n prises). Calculer u_2 .

$$u_2 = 2 + 0,8 \times u_1 = 2 + 0,8 \times 2 = 2 + 1,6 = 3,6 \text{ mL.}$$

Partie A — 2. Montrer par récurrence que $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Initialisation : pour $n = 1$, $10 - 8 \times 0,8^0 = 10 - 8 = 2 = u_1$: la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : on suppose que, pour un entier $n \geq 1$, $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$. Alors : $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n = 2 + 0,8(10 - 8 \times 0,8^{n-1}) = 2 + 8 - 8 \times 0,8^n = 10 - 8 \times 0,8^n$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$.

Partie A — 3. Déterminer la limite de u_n et interpréter.

Comme $-1 < 0,8 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^{n-1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10$.

Cela signifie qu'après un grand nombre de prises, la quantité de médicament dans l'organisme se rapproche indéfiniment de 10 mL, sans jamais l'atteindre.

Partie A — 4. L'inéquation $u_N \geq 10$ admet-elle des solutions pour N entier naturel non nul ? Interpréter.

$$u_N \geq 10 \iff 10 - 8 \times 0,8^{N-1} \geq 10 \iff -8 \times 0,8^{N-1} \geq 0.$$

Or $-8 \times 0,8^{N-1}$ est strictement négatif pour tout N : cette inéquation **n'a pas de solution**.

Cela signifie que la quantité de médicament dans l'organisme reste toujours strictement inférieure à 10 mL, quel que soit le nombre de prises.

Partie A — 5. Déterminer à partir de combien de prises la quantité de médicament est strictement supérieure à 9 mL.

$$u_n > 9 \iff 10 - 8 \times 0,8^{n-1} > 9 \iff -8 \times 0,8^{n-1} > -1 \iff 0,8^{n-1} < \frac{1}{8} \text{ (en divisant par } -8 < 0, \text{ ce qui inverse le sens de l'inégalité).}$$

En passant au logarithme népérien (croissant) : $(n-1) \ln(0,8) < -\ln(8)$, et comme $\ln(0,8) < 0$:
 $n-1 > -\frac{\ln(8)}{\ln(0,8)} \approx 9,3$, soit $n > 10,3$.

Les solutions entières sont donc les entiers $n \geq 11$: **c'est à partir de la 11e prise que la quantité dépasse 9 mL.**

Partie B — 1. On pose $S_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)/n$. Calculer S_2 .

$$S_2 = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{2 + 3,6}{2} = 2,8.$$

Partie B — 2. Montrer que $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n$.

En sommant l'expression explicite de u_k pour k de 1 à n : $\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (10 - 8 \times 0,8^{k-1}) = 10n - 8 \sum_{k=1}^n 0,8^{k-1}$.

La somme géométrique $\sum_{k=1}^n 0,8^{k-1} = \frac{1 - 0,8^n}{1 - 0,8} = 5(1 - 0,8^n)$.

Donc $\sum_{k=1}^n u_k = 10n - 8 \times 5(1 - 0,8^n) = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n$.

Partie B — 3. Calculer la limite de S_n .

D'après la question précédente, $S_n = 10 - \frac{40}{n} + \frac{40}{n} \times 0,8^n$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{40}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 10$: la quantité moyenne de médicament tend elle aussi vers 10 mL.

Partie B — 4. On donne la fonction mystere(k) (n=1, s=2 ; while s<k : n=n+1, s=10-40/n+40*0.8n/n ; return n). Que représente mystere(9) ?**

La fonction calcule les termes successifs de S_n (avec la formule explicite de la question précédente) jusqu'à ce que S_n dépasse le seuil k : 'mystere(9)' renvoie donc **le premier rang n à partir duquel la quantité moyenne de médicament dans l'organisme dépasse 9 mL.**

Partie B — 5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

D'après la partie A, $u_n < 9$ pour tout $n \leq 10$ (la quantité ne dépasse 9 mL qu'à partir de la 11e prise).

Or S_n est la moyenne de $u_1, \dots, u_n$: si tous les u_k (pour $k \leq 10$) sont inférieurs à 9, alors S_{10} l'est aussi.

La valeur renvoyée par 'mystere(9)' est donc nécessairement **strictement supérieure à 10.**

Bac Terminale 2025 — Asie (jour 1)

1.a On considère $g(x) = e^{\sqrt{x}}$ sur $]0 ; +\infty[$, et $f(x) = e^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$. Montrer que $g'(x) = f(x)$.

g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables : $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = f(x)$.

1.b Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)/(4x\sqrt{x})$.

f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$. En dérivant $f = \frac{g}{2\sqrt{x}}$ (avec

$$g' = f) : f'(x) = \frac{f(x) \times 2\sqrt{x} - g(x) \times \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x}.$$

$$\text{En réduisant au même dénominateur : } f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}.$$

2.a Déterminer la limite de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{x} = 0^+, \text{ avec } f(x) > 0 : \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

2.b Interpréter graphiquement ce résultat.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote verticale d'équation $x = 0$** .

3.a Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Par croissances comparées, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$; en posant $u = \sqrt{x}$ (qui tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$), par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3.b Étudier le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

Pour tout $x > 0$, $e^{\sqrt{x}} > 0$ et $4x\sqrt{x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{x} - 1$.

$\sqrt{x} - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$: f est donc décroissante sur $]0 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$, avec un minimum $f(1) = \frac{e}{2}$.

3.c Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[1 ; +\infty[$, avec une valeur approchée à 10^{-1} près.

Sur $[1 ; +\infty[$, f est continue et strictement croissante, de $f(1) = \frac{e}{2} \approx 1,36$ à $+\infty$.

Comme $2 \in \left[\frac{e}{2} ; +\infty\right]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[1 ; +\infty[$.

À la calculatrice, $\alpha \approx 4,6$.

4.a On pose $I = \int_1^{e^2} f(x) \, dx$. Calculer I .

D'après la question 1.a, g est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

$$I = [g(x)]_1^{e^2} = \left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^{e^2} = e^{\sqrt{e^2}} - e.$$

4.b Interpréter graphiquement ce résultat.

f étant positive, $I = e^{\sqrt{2}} - e$ représente l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = 2$, en unités d'aire.

5.a On admet que $f''(x) = e^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)/(8x^2\sqrt{x})$. En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ sur $]0; +\infty[$.

En posant $X = \sqrt{x}$, l'expression devient $X^2 - 3X + 3$, un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$.

Comme $\Delta < 0$ et que le coefficient dominant est positif, $X^2 - 3X + 3 > 0$ pour tout réel X , donc $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ pour tout $x > 0$.

5.b Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$: $e^{\sqrt{x}} > 0$, $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ (question précédente) et $8x^2\sqrt{x} > 0$, donc $f''(x) > 0$: f est convexe sur $]0; +\infty[$.

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 1)

1. On donne $A(-3; 1; 4)$, $B(1; 5; 2)$, la droite $(d) : x = -6 + 3t, y = 1, z = 9 - 5t$. Les droites (AB) et (d) sont : a) sécantes non perpendiculaires, b) perpendiculaires, c) non coplanaires, d) parallèles.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ (colinéaire à $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$) dirige (AB) , et $\vec{u}' \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ dirige (d) : ces vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.

$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 6 + 0 + 5 = 11 \neq 0$: les droites ne sont pas perpendiculaires.

En résolvant le système de recherche d'un point commun (avec (AB) paramétrée par s), on trouve une solution unique $(t, s) = (1, 0)$: les droites sont sécantes.

Réponse a) sécantes non perpendiculaires.

2. On considère le plan $P : 4x + 4y - 2z + 3 = 0$. La droite (AB) est : a) incluse dans P , b) strictement parallèle à P , c) sécante et non orthogonale à P , d) orthogonale à P .

$\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ est normal à P , et c'est exactement le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Réponse d) la droite (AB) est orthogonale au plan P .

3. On considère le plan $P' : 2x + y + 6z + 5 = 0$. Les plans P et P' sont : a) sécants et non perpendiculaires, b) perpendiculaires, c) confondus, d) strictement parallèles.

$\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ (normal à P) et $\vec{n'} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ (normal à P') ne sont pas colinéaires : les plans ne sont pas parallèles.

$\vec{n} \cdot \vec{n'} = 8 + 4 - 12 = 0$: les vecteurs normaux sont orthogonaux.

Réponse b) les plans sont perpendiculaires.

4. On considère $C(0 ; 1 ; -1)$. La valeur de l'angle BAC arrondie au degré est : a) 90° , b) 51° , c) 39° , d) 0° .

$\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 12 + 0 + 10 = 22$.

$AC = \sqrt{9 + 0 + 25} = \sqrt{34}$ et $AB = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$.

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{22}{6\sqrt{34}}$, soit $\widehat{BAC} \approx 51^\circ$.

Réponse b) 51° .

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 1)

Partie A — 1. On considère $f(x) = 4\ln(x+1) - x^2/25$ sur $] -1 ; +\infty[$. Déterminer la limite de f en -1 .

$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0^+$, donc, par composition avec $\ln$ (qui tend vers $-\infty$ en 0^+), $\lim_{x \rightarrow -1} 4\ln(x+1) = -\infty$.

Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow -1} \left(-\frac{x^2}{25}\right) = -\frac{1}{25}$, donc par somme, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

Partie A — 2. Montrer que, pour tout x de $] -1 ; +\infty[$, $f'(x) = (100 - 2x - 2x^2) / (25(x+1))$.

f est dérivable sur $] -1 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables : la dérivée de $4\ln(x+1)$ est $\frac{4}{x+1}$, et celle de $-\frac{x^2}{25}$ est $-\frac{2x}{25}$.

$$f'(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{2x}{25} = \frac{4 \times 25 - (x+1) \times 2x}{25(x+1)} = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}.$$

Partie A — 3. Étudier les variations de f sur $] -1 ; +\infty[$ et en déduire que f est strictement croissante sur $[2 ; 6,5]$.

Comme $25(x+1) > 0$ sur $] -1 ; +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $100 - 2x - 2x^2$, trinôme de coefficient dominant négatif (-2) .

$$\Delta = 4 + 800 = 804 > 0 : \text{les racines sont } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{201}}{2} \approx 6,6 \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{201}}{2} \approx -7,6 < -1.$$

Le coefficient dominant étant négatif, $f'(x) > 0$ sur $] -1 ; x_1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]x_1 ; +\infty[$: f est croissante sur $] -1 ; x_1]$ puis décroissante.

Comme $[2 ; 6,5] \subset] -1 ; x_1[$ (car $x_1 \approx 6,6 > 6,5$), f est strictement croissante sur $[2 ; 6,5]$.

Partie A — 4. On pose $h(x) = f(x) - x$ sur $[2 ; 6,5]$, avec un maximum $M \approx 2,265$ atteint en $m \approx 2,364$. Montrer que $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2 ; 6,5]$.

$h(2) = f(2) - 2 \approx 2,23 > 0$. Sur $[2 ; m]$, h est strictement croissante et $h(2) > 0$, donc $h(x) > 0$ sur cet intervalle : pas de solution ici.

Sur $[m ; 6,5]$, h est continue et strictement décroissante, avec $h(m) = M \approx 2,265 > 0$ et $h(6,5) \approx -0,13 < 0$.

0 est compris entre $h(m)$ et $h(6,5)$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[m ; 6,5]$, donc sur $[2 ; 6,5]$.

Partie A — 5.a On donne un script Python bornes(n) qui affine un encadrement de α . Donner les valeurs renvoyées par bornes(2) (arrondies au centième).

À la calculatrice, 'bornes(2)' renvoie **(6,36 ; 6,37)**.

Partie A — 5.b Interpréter ces valeurs.

Ces valeurs donnent un encadrement de α : $6,36 < \alpha < 6,37$.

Partie B — 1. On considère (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence que, pour tout n , $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, donc $2 \leq u_0 \leq u_1 < 6,5$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que, pour un entier n , $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$. Comme f est strictement croissante sur $[2 ; 6,5]$: $f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(6,5)$.

Or $f(2) \approx 4,23 > 2$ et $f(6,5) \approx 6,37 < 6,5$, donc $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6,5$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n , $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$.

Partie B — 2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite .

D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée par 6,5 : toute suite croissante et majorée étant convergente, (u_n) **converge vers une limite** $\ell \leq 6,5$.

Partie B — 3. On rappelle que α est l'unique solution de $h(x) = 0$ sur $[2; 6,5]$. Justifier que $\ell = \alpha$.

(u_n) vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue : d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de $f(x) = x$, c'est-à-dire de $h(x) = 0$. Comme $\ell \in [2; 6,5]$ et que cette équation y admet l'unique solution α , on a $\ell = \alpha$.

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 1)**Partie A — 1. On considère $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$. Montrer que la fonction constante $h(t) = \frac{1}{120}$ est solution de (E_1) .**

h est dérivable et $h'(t) = 0$ pour tout t , donc $h'(t) + 0,48h(t) = 0 + 0,48 \times \frac{1}{120} = \frac{1}{250}$: h est bien solution de (E_1) .

Partie A — 2. Donner la forme générale des solutions de $y' + 0,48y = 0$.

Les solutions sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-0,48t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie A — 3. En déduire l'ensemble des solutions de (E_1) .

Les solutions de (E_1) sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie B — 1. Une population de bactéries $p(t)$ (en milliers, $p(0)=30$) vérifie $(E_2) : p' = p(120-p)/250$. On pose $y = 1/p$. Montrer que si p est solution de (E_2) , alors y est solution de (E_1) .

$p = \frac{1}{y}$ donne $p' = -\frac{y'}{y^2}$. En remplaçant dans $(E_2) : -\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{250} \times \frac{1}{y} \times \left(120 - \frac{1}{y}\right)$.

En multipliant par $-y^2$: $y' = -\frac{y}{250} \times (120y - 1) = -0,48y + \frac{1}{250}$, soit $y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.

y est donc bien solution de (E_1) .

Partie B — 2. En admettant la réciproque, montrer que $p(t) = 120 / (1 + Ke^{-0,48t})$, avec K une constante réelle.

D'après la partie A, $y(t) = Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

$$p(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{Ce^{-0,48t} + \frac{1}{120}} = \frac{120}{120Ce^{-0,48t} + 1}.$$

En posant $K = 120C$: $p(t) = \frac{120}{Ke^{-0,48t} + 1}$.

Partie B — 3. En utilisant la condition initiale $p(0) = 30$, déterminer la valeur de K .

$$p(0) = 30 \iff \frac{120}{K+1} = 30 \iff K+1 = \frac{120}{30} = 4 \iff K = 3.$$

Partie B — 4. Déterminer la limite de $p(t)$ en $+\infty$ et interpréter.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,48t) = -\infty, \text{ donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,48t} = 0, \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} (3e^{-0,48t} + 1) = 1.$$

Par quotient, $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 120$: la population de bactéries se stabilise autour de 120 000 individus.

Partie B — 5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population dépasse 60 000 individus (en heures et minutes).

$$p(t) = 60 \iff \frac{120}{3e^{-0,48t} + 1} = 60 \iff 3e^{-0,48t} + 1 = 2 \iff e^{-0,48t} = \frac{1}{3}.$$

$$-0,48t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3) \iff t = \frac{\ln(3)}{0,48} \approx 2,289 \text{ heures.}$$

Il faut environ 2 heures et 17 minutes pour que la population dépasse 60 000 individus.

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 2)

Partie A — 1. Une population animale du milieu A est modélisée par une suite géométrique (u_n) , $u_0 = 6$ (en milliers), de raison 0,93 (n = années depuis 2025). Donner la population au 1er janvier 2026.

$$u_1 = u_0 \times 0,93 = 6 \times 0,93 = 5,58 \text{ (milliers), soit } \mathbf{5\,580 \text{ individus.}}$$

Partie A — 2. Exprimer u_n en fonction de n .

$$(u_n) \text{ étant géométrique de premier terme } 6 \text{ et de raison } 0,93 : u_n = 6 \times 0,93^n.$$

Partie A — 3. Déterminer la limite de (u_n) et interpréter.

$$\text{Comme } 0,93 \in]-1 ; 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,93^n = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, la population du milieu A tend vers l'extinction.

Partie B — 1. On modélise la population du milieu B par $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n$. Donner la population au 1er janvier 2026.

$$v_1 = -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 = -1,8 + 6,6 = 4,8 \text{ (milliers), soit } \mathbf{4\,800 \text{ individus.}}$$

Partie B — 2. On pose $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$ sur $[0 ; +\infty[$. Démontrer que f est croissante sur $[0 ; 11]$.

f est dérivable sur $[0 ; +\infty[: f'(x) = -0,1x + 1,1$.

$f'(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{1,1}{0,1} = 11 : f$ est donc croissante sur $[0 ; 11]$.

Partie B — 3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.

Initialisation : $v_0 = 6$ et $v_1 = 4,8$, donc $2 \leq v_1 \leq v_0 \leq 6$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que, pour un entier n , $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$. Comme $v_n, v_{n+1} \in [0 ; 11]$ et que f est croissante sur $[0 ; 11]$: $f(2) \leq f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \leq f(6)$.

Or $f(2) = -0,05 \times 4 + 2,2 = 2$ et $f(6) = v_1 = 4,8 \leq 6$, donc $2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 6$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n , $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.

Partie B — 4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite .

D'après la question précédente, (v_n) est décroissante (car $v_{n+1} \leq v_n$) et minorée par 2 : toute suite décroissante et minorée étant convergente, (v_n) converge vers une limite $\ell \geq 2$.

Partie B — 5.a Justifier que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, puis en déduire la valeur de ℓ .

(v_n) vérifie $v_{n+1} = f(v_n)$ avec f continue : d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

$f(\ell) = \ell \iff -0,05\ell^2 + 1,1\ell = \ell \iff 0,05\ell^2 - 0,1\ell = 0 \iff 0,05\ell(\ell - 2) = 0$, soit $\ell = 0$ ou $\ell = 2$.

Comme $\ell \geq 2$, on a $\ell = 2$.

Partie B — 5.b Interpréter ce résultat.

Au bout d'un grand nombre d'années, la population du milieu B se stabilise autour de 2 000 individus, soit le tiers de la population initiale.

Partie C — 1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.

On cherche $u_n < 3 \iff 6 \times 0,93^n < 3 \iff 0,93^n < \frac{1}{2}$.

En passant au logarithme népérien (croissant) : $n \ln(0,93) < -\ln(2)$, et comme $\ln(0,93) < 0$:
 $n > -\frac{\ln(2)}{\ln(0,93)} \approx 9,55$, soit $n \geq 10$.

La population du milieu A passera sous 3 000 individus à partir de 2035.

Partie C — 2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.

(v_n) étant décroissante, on calcule : $v_5 \approx 3,14$ et $v_6 \approx 2,96$: la population du milieu B passera sous 3 000 individus à partir de 2031 ($n = 6$).

Partie C — 3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera celle du milieu A.

(u_n) converge vers 0 et (v_n) converge vers 2, toutes deux décroissantes à partir de la même valeur initiale $u_0 = v_0 = 6$: il existera donc nécessairement un rang N à partir duquel $v_N > u_N$.

Partie C — 4.a Compléter le programme Python (`n=0, u=6, v=6; while ... : u=...; v=...; n=n+1; print(2025+n)`) pour qu'il affiche l'année où la population B dépasse la population A.

Il faut compléter par `'while u >= v :'`, `'u = 0.93*u'`, `'v = -0.05*v+1.1*v'` (les formules de récurrence des deux suites).

Partie C — 4.b Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

À la calculatrice : $u_{12} \approx 2,51$ et $v_{12} \approx 2,41$ (encore $u > v$) ; $u_{13} \approx 2,34$ et $v_{13} \approx 2,36$ (désormais $v > u$) : le programme affiche **2038**.

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 2)

Partie A — 1. On considère $f(x) = 1/(a+e^{-bx})$ sur $[0; +\infty[$, avec $a, b > 0$. Par lecture graphique (points A(0 ; 0,5), B(10 ; 1) sur la courbe), donner une valeur approchée de $f(10)$.

Par lecture graphique, $f(10) \approx 0,9$.

Partie A — 2. On admet que la limite de f en $+\infty$ est 1. Interpréter graphiquement.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

Partie A — 3. Justifier que $a = 1$.

$f(0) = \frac{1}{a+1}$, et le point A(0 ; 0,5) appartient à la courbe, donc $\frac{1}{a+1} = 0,5 \iff a+1 = 2 \iff a = 1$.

Partie A — 4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0,5}{10 - 0} = \frac{0,5}{10} = 0,05.$$

Partie A — 5.a Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et b .

f est de la forme $\frac{1}{1+e^{-bx}}$, de dérivée $-\frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2} = \frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$.

Partie A — 5.b En déduire la valeur de b .

(AB) étant tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0, son coefficient directeur est $f'(0) = \frac{b}{(1+1)^2} = \frac{b}{4}$.

$$\frac{b}{4} = 0,05 \iff b = 0,2.$$

Partie B — 1. On admet que $f(x) = 1/(1+e^{-0,2x})$ sur $[0; +\infty[$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,2x} = 0$ (par composition), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Partie B — 2. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{0,2e^{-0,2x}}{(1+e^{-0,2x})^2} \text{ (même calcul que ci-dessus avec } b = 0,2).$$

Pour tout $x \geq 0$, le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs : $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Partie B — 3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0,97$.

$f(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$: f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Comme $0,97 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,97$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.

Partie B — 4. À l'aide de la calculatrice, encadrer α par deux entiers consécutifs et interpréter.

À la calculatrice, $\alpha \approx 17,4$, donc $\alpha \in]17; 18[$.

Partie C — 1. Montrer que, pour tout x de $[0; +\infty[$, $f(x) = e^{0,2x} / (1 + e^{0,2x})$.

En multipliant numérateur et dénominateur de $f(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}}$ par $e^{0,2x}$: $f(x) = \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x} + 1}$.

Partie C — 2. En déduire une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

En écrivant $f(t) = \frac{1}{0,2} \times \frac{0,2e^{0,2t}}{1+e^{0,2t}} = 5 \times \frac{0,2e^{0,2t}}{1+e^{0,2t}}$, on reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u(t) = 1+e^{0,2t} > 0$), de primitive $\ln(u)$.

Une primitive de f est donc $F(t) = 5 \ln(1 + e^{0,2t})$.

Partie C — 3. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0 ; 40]$ (valeur exacte puis approchée au millième).

$$I = \frac{1}{40} \int_0^{40} f(t) dt = \frac{1}{40} [5 \ln(1 + e^{0,2t})]_0^{40} = \frac{5}{40} (\ln(e^8 + 1) - \ln(2)).$$

$$I = \frac{1}{8} \ln\left(\frac{e^8 + 1}{2}\right) \approx \mathbf{0,913}.$$

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 2)

1.a L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne $A(1 ; 0 ; 3)$, $B(-2 ; 1 ; 2)$, $C(0 ; 3 ; 2)$. Montrer que A , B , C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires (car $\frac{-3}{-1} \neq \frac{1}{3}$), donc **A , B , C ne sont pas alignés.**

1.b Soit $n(-1 ; 1 ; 4)$. Vérifier que n est orthogonal au plan (ABC) .

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 + 1 - 4 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + 3 - 4 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : **il est donc normal à ce plan.**

1.c En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $-x + y + 4z - 11 = 0$.

$\vec{n}$ étant normal à (ABC) , ce plan a une équation de la forme $-x + y + 4z + d = 0$.

A appartient au plan : $-1 + 0 + 12 + d = 0 \iff d = -11$.

Le plan (ABC) a donc pour équation $-x + y + 4z - 11 = 0$.

2.a On considère $P : 3x - 3y + 2z - 9 = 0$ et $P' : x - y - z + 2 = 0$. Démontrer que P et P' sont sécants.

$\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à P et $\vec{v'} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à P' : ces vecteurs ne sont pas colinéaires (car $\frac{3}{1} \neq \frac{2}{-1}$).

P et P' ne sont donc ni parallèles ni confondus : **ils sont sécants**, leur intersection étant une droite (d) .

2.b Déterminer si les plans P et P' sont perpendiculaires.

$\vec{v} \cdot \vec{v'} = 3 + 3 - 2 = 4 \neq 0$: les vecteurs normaux ne sont pas orthogonaux, donc **les plans P et P' ne sont pas perpendiculaires.**

3. Montrer que la droite (d) est dirigée par le vecteur $u(1; 1; 0)$.

Il suffit de vérifier que $\vec{u}$ est orthogonal aux deux vecteurs normaux $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ (donc contenu dans les deux plans, comme direction).

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 - 3 + 0 = 0 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v'} = 1 - 1 + 0 = 0.$$

(d) est donc bien dirigée par $\vec{u}$.

4. Montrer que $M(2; 1; 3)$ appartient à P et P', et en déduire une représentation paramétrique de (d).

$$3 \times 2 - 3 \times 1 + 2 \times 3 - 9 = 6 - 3 + 6 - 9 = 0 : M \text{ appartient à P.}$$

$$2 - 1 - 3 + 2 = 0 : M \text{ appartient à P'.$$

(d) passe donc par M et est dirigée par $\vec{u}(1; 1; 0)$: une représentation paramétrique est $x = 2 + t, y = 1 + t, z = 3$, avec $t \in \mathbb{R}$.

5. Montrer que (d) est aussi incluse dans le plan (ABC). Que peut-on dire des trois plans (ABC), P et P' ?

En substituant la représentation paramétrique de (d) dans l'équation de (ABC) : $-(2 + t) + (1 + t) + 4 \times 3 - 11 = -2 - t + 1 + t + 12 - 11 = 0$, vérifiée pour tout t .

(d) est donc incluse dans (ABC), comme dans P et P'.

Les vecteurs normaux $\vec{n}, \vec{v}, \vec{v'}$ n'étant pas colinéaires deux à deux, les trois plans ne sont ni confondus ni parallèles entre eux : **les trois plans (ABC), P et P' sont simplement sécants deux à deux selon la même droite (d).**

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 1)**Partie A — 1. On donne la courbe de f, avec la tangente T_A en $A(1; 2)$ passant par $C(3; 0)$. Déterminer $f'(1)$.**

$$f'(1) \text{ est le coefficient directeur de } T_A : \frac{0 - 2}{3 - 1} = -1.$$

Partie A — 2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle sur $]0; 3]$?

$f'(x) = 0$ correspond aux points où la tangente est horizontale : d'après le graphique, cela se produit **2 fois** sur $]0; 3]$.

Partie A — 3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Sur $]0 ; 0,5]$, la courbe semble concave d'après le graphique, donc $f''(0,2) < 0$.

Partie B — 1. On admet que $f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$ sur $]0 ; +\infty[$. Résoudre $2X^2 - 3X + 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$, et en déduire que la courbe de f ne coupe pas l'axe des abscisses.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0$: l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$ n'a pas de solution réelle.

$f(x) = 0 \iff x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2] = 0$. Comme $x > 0$, cela équivaut à $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$, soit, en posant $X = \ln x$, à $2X^2 - 3X + 2 = 0$, qui n'a pas de solution.

L'équation $f(x) = 0$ n'a donc pas de solution : **la courbe de f ne coupe pas l'axe des abscisses.**

Partie B — 2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$ (on admet que la limite en 0 est 0).

$$f(x) = x(\ln x)^2 \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right) = 2.$$

Par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B — 3.a On admet que $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$. Montrer que $f''(x) = (1/x)(4\ln x + 1)$.

$$f''(x) = 2 \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(4\ln x + 1).$$

Partie B — 3.b Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$ et préciser l'abscisse exacte du point d'inflexion.

Sur $]0 ; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $4\ln x + 1$.

$$4\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{4} \iff x = e^{-\frac{1}{4}} ; 4\ln x + 1 > 0 \iff x > e^{-\frac{1}{4}}.$$

f est donc **concave** sur $\left] 0 ; e^{-\frac{1}{4}} \right]$ et **convexe** sur $\left[e^{-\frac{1}{4}} ; +\infty \right[$, avec un point d'inflexion

d'abscisse exacte $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,779$.

Partie B — 3.c Montrer que la courbe de f est au-dessus de la tangente T_B sur $]1 ; +\infty[$.

Comme $e^{-\frac{1}{4}} < 1$, f est convexe sur $[1 ; +\infty[$: sur cet intervalle, la courbe est donc au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier T_B .

Partie C — 1. Justifier que la tangente T_B (au point d'abscisse e) a pour équation réduite $y = 2x - e$.

$$f'(e) = 2(\ln e)^2 + \ln e - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 \text{ et } f(e) = e(2 \times 1 - 3 + 2) = e \times 1 = e.$$

$$\text{La tangente en } e \text{ a pour équation } y = f'(e)(x - e) + f(e) = 2(x - e) + e = 2x - e.$$

Partie C — 2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale de $x \ln x$ entre 1 et e vaut $(e^2 + 1)/4$.

$$\text{On pose } u(x) = \ln x \text{ et } v'(x) = x \text{ (donc } u'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } v(x) = \frac{x^2}{2}).$$

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\ln x \times \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Partie C — 3. On admet que l'intégrale de $x(\ln x)^2$ entre 1 et e vaut $(e^2 - 1)/4$. En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine entre la courbe de f , la tangente T_B et les droites $x=1$ et $x=e$.

$$\text{Sur } [1; e], \text{ la courbe est au-dessus de } T_B, \text{ donc } \mathcal{A} = \int_1^e [f(x) - (2x - e)] \, dx = \int_1^e [2x(\ln x)^2 - 3x \ln x + e] \, dx.$$

$$\text{Par linéarité : } \mathcal{A} = 2 \times \frac{e^2 - 1}{4} - 3 \times \frac{e^2 + 1}{4} + [ex]_1^e = \frac{-e^2 - 5}{4} + (e^2 - e).$$

$$\mathcal{A} = \frac{3e^2 - 4e - 5}{4} \text{ unités d'aire (soit environ 1,57 u.a.).}$$

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 1)

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne $A(-1; 0; 5)$ et $B(3; 2; -1)$.

Affirmation 1 : une représentation paramétrique de (AB) est $x=3-2t$, $y=2-t$, $z=-1+3t$.

Vraie ou fausse ?

$$\text{Cette représentation décrit une droite passant par } B \text{ (pour } t = 0) \text{ et dirigée par } \vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = -2\vec{u} : \vec{u} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AB}, \text{ donc cette droite est bien } (AB). \text{ L'affirmation est vraie.}$$

Affirmation 2 : le vecteur $\vec{n}(5; -2; 1)$ est normal au plan (OAB). Vraie ou fausse ?

$\vec{OA} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{OB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : O, A, B définissent bien un plan.

$\vec{n} \cdot \vec{OA} = -5 + 0 + 5 = 0$ (orthogonal), mais $\vec{n} \cdot \vec{OB} = 15 - 4 - 1 = 10 \neq 0$ (non orthogonal).

$\vec{n}$ n'est pas orthogonal aux deux vecteurs directeurs du plan : **l'affirmation est fausse.**

On considère (d) : $x=15+k$, $y=8-k$, $z=-6+2k$ et (d') : $x=1+4s$, $y=2+4s$, $z=1-6s$. Affirmation 3 : les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires. Vraie ou fausse ?

$\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dirige (d) et $\vec{v'} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ dirige (d') : ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont ni parallèles ni confondues.

En résolvant le système de recherche d'un point commun, on trouve une solution unique $k = -4$, $s = 2,5$, correspondant au point (11 ; 12 ; -14).

Les droites sont donc sécantes en ce point, donc coplanaires : **l'affirmation est fausse.**

On considère le plan P : $x-y+z+1=0$. Affirmation 4 : la distance du point C(2 ; -1 ; 2) au plan P est $2\sqrt{3}$. Vraie ou fausse ?

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à P, donc la droite Δ orthogonale à P passant par C a pour représentation paramétrique $x=2+l$, $y=-1-l$, $z=2+l$.

L'intersection avec P vérifie $(2+l) - (-1-l) + (2+l) + 1 = 0 \iff 3l + 6 = 0 \iff l = -2$, donc H(0 ; 1 ; 0).

$$CH = \sqrt{(0-2)^2 + (1-(-1))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

L'affirmation est vraie.

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 1)

Partie A — 1. Une zone de 20 ha voit sa posidonie occuper 1 ha au 1er juillet 2024 ($u_0 = 1$). On modélise $u_{n+1} = 0,02u_n^2 + 1,3u_n$. Calculer la superficie au 1er juillet 2025.

$$u_1 = -0,02 \times 1^2 + 1,3 \times 1 = 1,28 : \mathbf{1,28 \text{ ha.}}$$

Partie A — 2.a On pose $h(x) = -0,02x^2 + 1,3x$ sur $[0 ; 20]$ (croissante). Démontrer que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,28$, donc $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 20$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que, pour un entier n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$. Comme h est croissante sur $[0 ; 20]$: $h(1) \leq h(u_n) \leq h(u_{n+1}) \leq h(20)$, soit $1,28 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 18$.

Comme $1 \leq 1,28$ et $18 \leq 20$: $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 20$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

Partie A — 2.b En déduire que la suite (u_n) converge, vers une limite L .

D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée par 20 : elle **converge donc vers une limite** $L \in [1 ; 20]$.

Partie A — 2.c Justifier que $L = 15$.

(u_n) vérifie $u_{n+1} = h(u_n)$ avec h continue : L est solution de $h(x) = x$.

$$h(x) = x \iff -0,02x^2 + 0,3x = 0 \iff -0,02x(x - 15) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 15.$$

Comme $L \in [1 ; 20]$, seule $x = 15$ convient : $L = 15$.

Partie A — 3.a Sans calcul, justifier que la surface dépassera 14 hectares.

(u_n) converge vers 15 : tout intervalle ouvert contenant 15, comme $]14 ; +\infty[$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. La surface dépassera donc bien 14 ha.

Partie A — 3.b Compléter l'algorithme (def seuil() : n=0, u=1 ; while ... : n=... ; u=... ; return n) pour qu'il affiche l'année où la surface dépasse 14 ha.

Il faut compléter par 'while u <= 14 :', 'n = n+1', 'u = -0.02*u² + 1.3*u'. L'appel 'seuil()' renvoie 18 (car $u_{17} \approx 13,8$ et $u_{18} \approx 14,1$).

Partie B — On modélise $f(t)$ (superficie au temps t , en continu) avec $f(0)=1$, f ne s'annulant pas, dérivable, solution de (E_1) : $y' = 0,02y(15-y)$. On pose $g(t) = 1/f(t)$. Montrer que g est solution de (E_2) : $y' = -0,3y + 0,02$.

$$g'(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)^2} = -\frac{0,02f(t)(15-f(t))}{f(t)^2} = -\frac{0,02(15-f(t))}{f(t)} = -0,3 \times \frac{1}{f(t)} + 0,02 = -0,3g(t) + 0,02.$$

g est donc bien solution de (E_2) .

Partie B — 2. Donner les solutions de (E_2) .

Les solutions de (E_2) sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-0,3t} + \frac{1}{15}$, avec $C \in \mathbb{R}$ (solution particulière constante $\frac{0,02}{0,3} = \frac{1}{15}$ plus solution homogène).

Partie B — 3. En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 15 / (14e^{-0,3t} + 1)$.

$$g(0) = \frac{1}{f(0)} = 1, \text{ donc } C + \frac{1}{15} = 1 \iff C = \frac{14}{15}.$$

$$g(t) = \frac{14}{15}e^{-0,3t} + \frac{1}{15}, \text{ donc } f(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{\frac{14}{15}e^{-0,3t} + \frac{1}{15}} = \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1}.$$

Partie B — 4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,3t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} (14e^{-0,3t} + 1) = 1$, et par quotient $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 15$: cohérent avec le modèle discret.

Partie B — 5. Résoudre $f(t) > 14$ sur $[0; +\infty[$ et interpréter.

$$f(t) > 14 \iff \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1} > 14 \iff 15 > 14(14e^{-0,3t} + 1) \iff 1 > 196e^{-0,3t} \iff e^{-0,3t} < \frac{1}{196}.$$

$$\text{En passant au logarithme : } -0,3t < -\ln(196) \iff t > \frac{\ln(196)}{0,3}.$$

L'ensemble des solutions est $\left] \frac{\ln(196)}{0,3} ; +\infty \right[$, soit $t > 17,6$: il faudra environ 17,6 ans (17 ans et 7 mois) pour dépasser 14 ha, cohérent avec le modèle discret.

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 2)

Partie A — 1. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$, $C(1; 1; 1)$, la droite $(d) : x = \frac{3}{2} + 2t, y = 2 + t, z = 3 - t$, et $(d') : x = s, y = \frac{3}{2} + s, z = 3 - 2s$.

Montrer que (d) et (d') sont sécantes au point $S(-\frac{1}{2}; 1; 4)$.

Chercher un point commun revient à résoudre $\frac{3}{2} + 2t = s, 2 + t = \frac{3}{2} + s, 3 - t = 3 - 2s$.

En substituant $s = \frac{3}{2} + 2t$ dans les deux dernières équations : $2 + t = 3 + 2t \iff t = -1$, et $3 - t = -4t \iff 3t = -3 \iff t = -1$ (cohérent), d'où $s = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$.

Ces deux valeurs donnent bien le même point $(-\frac{1}{2}; 1; 4)$ sur les deux droites : **elles sont donc sécantes en S .**

Partie A — 2.a Montrer que le vecteur $n(1; 2; 4)$ est normal au plan (ABC) .

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas colinéaires.}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 - 6 + 4 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 2 + 0 = 0 : \vec{n} \text{ est donc normal au plan } (ABC).$$

Partie A — 2.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + 2y + 4z - 7 = 0$.

$\vec{n}$ étant normal à (ABC), ce plan a une équation de la forme $x + 2y + 4z + d = 0$; comme $C(1; 1; 1)$ appartient au plan : $1 + 2 + 4 + d = 0 \iff d = -7$, soit $x + 2y + 4z - 7 = 0$.

Partie A — 3. Démontrer que A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

A, B, C définissant un plan, il suffit de vérifier que S n'appartient pas à ce plan : $-\frac{1}{2} + 2 \times 1 + 4 \times 4 - 7 = -\frac{1}{2} + 2 + 16 - 7 = \frac{21}{2} \neq 0$: **S n'appartient pas au plan (ABC), donc A, B, C, S ne sont pas coplanaires.**

Partie A — 4.a Démontrer que $H(-1; 0; 2)$ est le projeté orthogonal de S sur (ABC).

Si H est ce projeté, $\overrightarrow{SH}$ doit être colinéaire à $\vec{n}$: $\overrightarrow{SH} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, et $\vec{n} = -2\overrightarrow{SH}$: colinéaires.

De plus, H appartient au plan : $-1 + 2 \times 0 + 4 \times 2 - 7 = -1 + 0 + 8 - 7 = 0$.

H est donc bien le projeté orthogonal de S sur (ABC).

Partie A — 4.b En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \sqrt{\frac{21}{2}}$.

$$SH^2 = \frac{1}{4} + 1 + 4 = \frac{21}{4}, \text{ donc } SH = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

H étant le projeté orthogonal de S, c'est le point du plan le plus proche de S : pour tout autre point M du plan, [SM] est l'hypoténuse du triangle rectangle SHM, donc $SM > SH$.

Il n'existe donc aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B — 1. Soit M sur [CS] avec $CM = k \cdot CS$, $k \in [0; 1]$. Déterminer les coordonnées de M en fonction de k.

$$\overrightarrow{CS} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS} \text{ donne } x - 1 = -\frac{3}{2}k, y - 1 = 0, z - 1 = 3k.$$

M a pour coordonnées $(1 - \frac{3}{2}k; 1; 1 + 3k)$.

Partie B — 2. Existe-t-il un point M sur [CS] tel que le triangle MAB soit rectangle en M ?

Le triangle MAB est rectangle en M si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 2 - \frac{3}{2}k \\ -1 \\ 3k \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}k \\ 2 \\ 3k - 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -\frac{3}{2}k \left(2 - \frac{3}{2}k\right) - 2 + 3k(3k - 1).$$

En développant : $45k^2 - 24k - 8 = 0$, de discriminant $\Delta = 24^2 + 4 \times 45 \times 8 = 2016 > 0$, avec racines $k_1 = \frac{24 + \sqrt{2016}}{90} \approx 0,765$ et $k_2 \approx -0,232$.

Seul $k_1 \in [0 ; 1]$ convient : **il existe un unique point M_1 sur [CS] tel que le triangle M_1AB soit rectangle en M_1 .**

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 2)

Partie A — 1. D'après le graphique (courbe de d, la distance parcourue par un chariot en zone de freinage), au bout de combien de temps le chariot a-t-il parcouru 15 m ?

Par lecture graphique, $d(2) \approx 15$: le chariot a parcouru 15 m au bout de **2 secondes**.

Partie A — 2. Quelle longueur minimale prévoir pour la zone de freinage ?

L'asymptote horizontale Δ de la courbe est proche de $y = 23$: une zone de **23 mètres** semble suffisante.

Partie A — 3. Que vaut $d'(4,7)$? Interpréter.

Le coefficient directeur de la tangente T (passant par $(0 ; 16,5)$ et $(4,7 ; 21)$) vaut $\frac{21 - 16,5}{4,7} \approx 0,96$: $d'(4,7) \approx 0,96$ m/s, c'est la vitesse instantanée du chariot à $t = 4,7$ s.

Partie B — 1.a On modélise la vitesse v, solution de (E) : $y' + 0,6y = e^{-0,6t}$, avec $v(0)=12$.

Résoudre (E') : $y' + 0,6y = 0$.

Les solutions de (E') sont les fonctions $t \mapsto Ke^{-0,6t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Partie B — 1.b Soit $g(t) = te^{-0,6t}$. Vérifier que g est solution de (E).

$$g'(t) = e^{-0,6t} - 0,6te^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 0,6t).$$

$$g'(t) + 0,6g(t) = e^{-0,6t}(1 - 0,6t) + 0,6te^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 0,6t + 0,6t) = e^{-0,6t}.$$

g est bien solution de (E).

Partie B — 1.c En déduire les solutions de (E) sur $[0 ; +\infty[$.

Les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto e^{-0,6t}(t + K)$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Partie B — 1.d En déduire que $v(t) = (12 + t)e^{-0,6t}$.

v est de cette forme et vérifie $v(0) = 12 : e^0(0 + K) = 12 \iff K = 12$, donc $v(t) = (12 + t)e^{-0,6t}$.

Partie B — 2.a Montrer que $v'(t) = (-6,2 - 0,6t)e^{-0,6t}$.

v vérifie (E) : $v'(t) + 0,6v(t) = e^{-0,6t}$, donc $v'(t) = e^{-0,6t} - 0,6(12 + t)e^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 7,2 - 0,6t) = e^{-0,6t}(-6,2 - 0,6t)$.

Partie B — 2.b En admettant que $v(t) = 12e^{-0,6t} + t/e^{0,6t}$, déterminer la limite de v en $+\infty$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} 12e^{-0,6t} = 0$, et par croissances comparées $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{0,6t}} = 0$: par somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$ (le chariot finit par s'arrêter).

Partie B — 2.c Étudier le sens de variation de v sur $[0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

$e^{-0,6t} > 0$ pour tout t , donc $v'(t)$ est du signe de $-6,2 - 0,6t$, qui est strictement négatif pour tout $t \geq 0$.

v est donc strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$, de $v(0) = 12$ vers 0.

Partie B — 2.d Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une unique solution α , avec une valeur approchée au dixième.

v est continue (dérivable) et strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$, de 12 à 0 ; comme $1 \in]0 ; 12]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $v(t) = 1$ admet une unique solution α .

À la calculatrice : $v(4) \approx 1,5$, $v(5) \approx 0,85$ (donc $4 < \alpha < 5$) ; $v(4,6) \approx 1,05$, $v(4,7) \approx 0,995$: $\alpha \approx 4,7$.

Partie B — 3. Déterminer, en justifiant, au bout de combien de temps le système d'arrêt se déclenche (vitesse ≤ 1 m/s).

D'après la question précédente, $v(t) = 1$ pour $t = \alpha \approx 4,7$ s, et v étant décroissante, $v(t) \leq 1$ pour $t \geq \alpha$: le système se déclenche au bout d'environ 4,7 secondes.

Partie C — 1. On admet que $d(t) = \int_0^t v(x) dx$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $d(t) = e^{-0,6t}(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9}) + \frac{205}{9}$.

On pose $u(x) = 12 + x$ et $v'(x) = e^{-0,6x}$ (donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\frac{1}{0,6}e^{-0,6x}$).

$$d(t) = \left[-(12+x) \times \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} \right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} dx = \left[-(12+x) \times \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} - \frac{1}{0,36} e^{-0,6x} \right]_0^t.$$

En simplifiant ($\frac{1}{0,6} = \frac{5}{3}$ et $\frac{1}{0,36} = \frac{25}{9}$) : $d(t) = e^{-0,6t} \left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}$.

Partie C — 2. Déterminer, au centième près, la distance parcourue par le chariot avant le déclenchement du dispositif d'arrêt.

Le dispositif se déclenche à $t \approx 4,7$ s : $d(4,7) = e^{-0,6 \times 4,7} \left(-\frac{5}{3} \times 4,7 - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9} \approx \mathbf{20,95 \text{ m}}$.

Bac Terminale 2025 — Polynésie française (jour 2)

1. On considère $f(x) = x \ln(x-2)$ sur $]2; +\infty[$, dont la courbe est donnée. Conjecturer le sens de variation, les limites aux bornes et les asymptotes éventuelles.

D'après le graphique, f semble strictement croissante sur $]2; +\infty[$, avec $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ (asymptote verticale $x = 2$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2; +\infty[$.

$f(x) = 0 \iff x \ln(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou $\ln(x-2) = 0$. Comme $x > 2$, $x \neq 0$, donc $\ln(x-2) = 0 \iff x-2 = 1 \iff x = 3$.

L'équation a une unique solution : $x = 3$.

3. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 2 par valeurs supérieures. Ce résultat confirme-t-il une conjecture de la question 1 ?

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0^+$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) = -\infty$; et $\lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$.

Ce résultat confirme la conjecture de limite en 2 et l'asymptote verticale d'équation $x = 2$.

4. Démontrer que, pour tout x de $]2; +\infty[$, $f'(x) = \ln(x-2) + x/(x-2)$.

f est un produit de fonctions dérivables : $f'(x) = 1 \times \ln(x-2) + x \times \frac{1}{x-2} = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$.

5.a On pose $g(x) = f'(x)$. Démontrer que, pour tout x de $]2; +\infty[$, $g'(x) = (x-4)/(x-2)^2$.

$$g'(x) = f''(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1 \times (x-2) - x \times 1}{(x-2)^2} = \frac{x-2}{(x-2)^2} - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

5.b On admet que la limite de g en 2 (à droite) et en $+\infty$ vaut $+\infty$. En déduire le tableau de variation de g , avec la valeur exacte de son extremum.

$(x-2)^2 > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $x-4$: négatif sur $]2; 4[$, positif sur $]4; +\infty[$.

g est donc décroissante sur $]2; 4]$ puis croissante sur $[4; +\infty[$, avec un minimum $g(4) = \ln(2) + \frac{4}{2} = 2 + \ln(2)$.

5.c En déduire que, pour tout x de $]2; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Le minimum de g est $g(4) = 2 + \ln(2)$; comme $\ln(2) > 0$, $g(4) > 2 > 0$: $g(x) > 0$ pour tout x de $]2; +\infty[$.

5.d En déduire le sens de variation de f sur $]2; +\infty[$.

$g = f'$ est strictement positive sur $]2; +\infty[$: f est donc strictement croissante sur cet intervalle.

6. Étudier la convexité de f sur $]2; +\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion.

$f' = g$ est décroissante sur $]2; 4]$ (donc f concave) et croissante sur $[4; +\infty[$ (donc f convexe) : f change de convexité en $x = 4$.

$f(4) = 4 \ln(2) = \ln(16)$: le point d'inflexion a pour coordonnées $(4; \ln(16))$.

7. Combien de valeurs de x donnent une tangente à la courbe de f de coefficient directeur 3 ?

On cherche $f'(x) = 3$, soit $g(x) = 3$. Or $g(4) = 2 + \ln(2) \approx 2,7$.

Sur $]2; 4]$, g est continue et strictement décroissante de $+\infty$ à 2,7 : comme 3 est dans cet intervalle, il existe une unique solution α .

Sur $[4; +\infty[$, g est continue et strictement croissante de 2,7 à $+\infty$: il existe de même une unique solution β .

Il existe donc exactement deux valeurs de x pour lesquelles la tangente a un coefficient directeur égal à 3.

Bac Terminale 2025 — Polynésie française (jour 2)

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne $A(1; 3; 0)$, $B(-1; 4; 5)$, $C(0; 1; 0)$, $D(-2; 2; 1)$. Montrer que A , B , C déterminent un plan.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : A , B , C ne sont pas alignés, ils déterminent bien un plan.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times (-1) + 1 \times (-2) + 5 \times 0 = 2 - 2 + 0 = 0$: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, donc le triangle ABC est rectangle en A .

3.a Soit Δ la droite passant par D , de vecteur directeur $u(2; -1; 1)$. Démontrer que Δ est orthogonale au plan (ABC) .

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-2) + (-1) \times 1 + 1 \times 5 = -4 - 1 + 5 = 0$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 1 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$.

$\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : Δ (dirigée par $\vec{u}$) est donc orthogonale au plan (ABC) .

3.b Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $2x - y + z + 1 = 0$.

$\vec{u}$ étant normal à (ABC) , ce plan a une équation de la forme $2x - y + z + d = 0$; A appartient au plan : $2 \times 1 - 3 + 0 + d = 0 \iff d = 1$, soit $2x - y + z + 1 = 0$.

3.c Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

Δ passe par D et est dirigée par $\vec{u}$: $x = -2 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 1 + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

4. On appelle H le point de coordonnées $(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3})$. Vérifier que H est le projeté orthogonal de D sur (ABC) .

Le point de Δ appartenant à (ABC) vérifie $2(-2 + 2t) - (2 - t) + (1 + t) + 1 = 0 \iff 6t - 4 = 0 \iff t = \frac{2}{3}$.

Pour $t = \frac{2}{3}$: $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $z = \frac{5}{3}$: on retrouve H . Comme $\Delta \perp (ABC)$, H est bien le projeté orthogonal de D sur (ABC) .

5.a Montrer que $DH = 2\sqrt{\frac{6}{3}}$.

$$DH = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

5.b En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

En prenant ABC (rectangle en A) comme base : son aire est $B = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{30} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$.

La hauteur relative à cette base est $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, donc $V = \frac{1}{3} \times B \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2}\sqrt{6} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{10}{3} \approx 3,33$.

6. On considère la droite d : $x=1-2k$, $y=-3k$, $z=1+k$. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

d est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 2 \times (-2) + (-1) \times (-3) + 1 \times 1 = -4 + 3 + 1 = 0$.

$\vec{u}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{u}$ du plan (ABC), donc $\vec{u}$ dirige une droite parallèle au plan.

Le point $E(1 ; 0 ; 1)$ de d (pour $k = 0$) ne vérifie pas $2 \times 1 - 0 + 1 + 1 = 4 \neq 0$: E n'appartient pas au plan, donc d est strictement parallèle au plan (ABC).

Bac Terminale 2025 — Polynésie française (jour 2)

On donne $E = 1, \dots, 7$ et $F = 0, \dots, 9$. Affirmation 1 : il y a plus de 3-uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F. Vraie ou fausse ?

Les 3-uplets d'éléments distincts de E (ordre compté, sans répétition) : $\frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

Les combinaisons à 4 éléments de F : $\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$.

Les deux quantités sont égales ($210 = 210$), pas l'une supérieure à l'autre : **l'affirmation est fausse**.

On représente la fonction carré f et un carré ABCD de côté 3. Affirmation 2 : la zone hachurée (sous la courbe de f entre 0 et 3) et le carré ABCD ont la même aire. Vraie ou fausse ?

L'aire du carré ABCD est $3^2 = 9$ unités d'aire.

L'aire sous la courbe (f positive) est $\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9$ unités d'aire.

Les deux aires sont égales : **l'affirmation est vraie**.

On considère J , l'intégrale de $x \ln(x)$ entre 1 et 2. Affirmation 3 : une intégration par parties donne $J = \frac{7}{11}$. Vraie ou fausse ?

On pose $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $v(x) = \ln(x)$ (donc $u'(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$).

$$J = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x \, dx = 2 \ln(2) - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 2 \ln(2) - \frac{3}{4} \approx 0,636.$$

Or $\frac{7}{11} \approx 0,6364$: $J \neq \frac{7}{11}$ (l'écart est réel bien que très faible). **L'affirmation est fausse.**

On considère (E) : $y' = 2y - e^x$. Affirmation 4 : $f(x) = e^x + e^{2x}$ est solution de (E). Vraie ou fausse ?

$$f'(x) = e^x + 2e^{2x}.$$

$$2f(x) - e^x = 2(e^x + e^{2x}) - e^x = e^x + 2e^{2x} = f'(x).$$

f vérifie bien (E) : **l'affirmation est vraie.**

Soit $x \in [0; 1[$. On pose $u_n = (x - 1)e^n + \cos(n)$. Affirmation 5 : la suite (u_n) diverge vers $-\infty$. Vraie ou fausse ?

$x \in [0; 1[$, donc $x - 1 \in [-1; 0[$ est strictement négatif.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty \text{ et } (x - 1) < 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (x - 1)e^n = -\infty, \text{ puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} [(x - 1)e^n + 1] = -\infty.$$

Comme $\cos(n) \leq 1$ pour tout n : $u_n \leq (x - 1)e^n + 1$, donc par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

L'affirmation est vraie.

Brevet 2024 — Amérique du Nord

1. Un programme de calcul propose deux chaînes d'opérations à partir d'un nombre de départ : à gauche, ajouter 2 puis multiplier par 4 ; à droite, multiplier par 5 puis soustraire 3 ; puis multiplier les deux résultats obtenus. Montrer qu'en partant de 2, le résultat final est 112.

En partant de 2 : à gauche, $2 + 2 = 4$ puis $4 \times 4 = 16$; à droite, $2 \times 5 = 10$ puis $10 - 3 = 7$.

Le résultat final est le produit des deux résultats intermédiaires : $16 \times 7 = 112$.

2. Quel est le résultat obtenu en partant du nombre -3 ?

En partant de -3 : à gauche, $-3 + 2 = -1$ puis $-1 \times 4 = -4$; à droite, $-3 \times 5 = -15$ puis $-15 - 3 = -18$.

Le résultat final est $(-4) \times (-18) = 72$.

3. On choisit x comme nombre de départ. Parmi les quatre expressions suivantes, lesquelles permettent d'exprimer le résultat obtenu par ce programme : $A = (x + 2 \times 4)(x \times 5 - 3)$, $B = (4x + 2)(5x - 3)$, $C = (4x + 8)(5x - 3)$, $D = (x + 2) \times 4 \times (5x - 3)$?

En partant de x : à gauche, $x + 2$ puis $4(x + 2) = 4x + 8$; à droite, $5x$ puis $5x - 3$.

Le résultat général est donc $4(x + 2) \times (5x - 3)$, que l'on peut écrire $(x + 2) \times 4 \times (5x - 3)$ (expression D, sans distribuer le 4) ou $(4x + 8)(5x - 3)$ (expression C, après avoir distribué le 4 dans le premier facteur).

Les expressions **C et D** conviennent toutes les deux ; les expressions A et B ne correspondent pas au programme.

4. Trouver les deux nombres de départ qui donnent 0 comme résultat final, en expliquant la démarche.

Le résultat final s'écrit $(4x + 8)(5x - 3)$. Ce produit est nul si l'un au moins des deux facteurs est nul.

Soit $4x + 8 = 0$, c'est-à-dire $4x = -8$, soit $x = -2$.

Soit $5x - 3 = 0$, c'est-à-dire $5x = 3$, soit $x = \frac{3}{5} = 0,6$.

Les deux nombres de départ qui donnent 0 à l'arrivée sont donc **-2 et 0,6**.

5. Développer et réduire l'expression $B = (4x + 2)(5x - 3)$.

On développe chaque produit : $B = 4x \times 5x + 4x \times (-3) + 2 \times 5x + 2 \times (-3) = 20x^2 - 12x + 10x - 6$.

En réduisant les termes de même degré : $B = 20x^2 - 2x - 6$.

Brevet 2024 — Amérique du Nord

1. Un cinéma propose le tarif « Classique » à 11 € l'entrée. Combien coûtent 3 entrées avec ce tarif ?

Avec le tarif Classique, 3 entrées coûtent $3 \times 11 = \mathbf{33 \text{ €}}$.

2. Le tarif « Essentiel » consiste en un abonnement annuel de 50 € puis 5 € par entrée. Montrer qu'avec ce tarif, 8 entrées coûtent 90 €.

Avec le tarif Essentiel, le coût de 8 entrées est $50 + 8 \times 5 = 50 + 40 = \mathbf{90 \text{ €}}$, ce qui confirme l'énoncé.

3. Le tarif « Liberté » consiste en un abonnement annuel de 240 € donnant un accès illimité. En notant x le nombre d'entrées, on considère les fonctions $f : x \mapsto 50 + 5x$, $g : x \mapsto 240$ et $h : x \mapsto 11x$. Associer chacune de ces fonctions au tarif correspondant.

La fonction f , qui combine un montant fixe de 50 et un coût de 5 par entrée, correspond au tarif « **Essentiel** ».

La fonction g , constante et égale à 240 quel que soit le nombre d'entrées, correspond au tarif « **Liberté** ».

La fonction h , proportionnelle au nombre d'entrées avec un coefficient de 11, correspond au tarif « **Classique** ».

4. Sur un graphique, les droites (d1), (d2) et (d3) représentent respectivement les tarifs Classique, Essentiel et Liberté en fonction du nombre d'entrées. Quel tarif propose un prix proportionnel au nombre d'entrées ?

Seule la fonction h (tarif Classique) est linéaire, de la forme $x \mapsto 11x$ sans terme constant : c'est donc le tarif « **Classique** » qui propose un prix proportionnel au nombre d'entrées.

5.a Avec 150 €, combien d'entrées peut-on acheter au maximum avec le tarif « Essentiel » (aucune justification attendue) ?

On résout $50 + 5x \leq 150$, soit $5x \leq 100$, soit $x \leq 20$.

Avec 150 €, on peut acheter au maximum **20 entrées** avec le tarif Essentiel.

5.b À partir de combien d'entrées le tarif « Liberté » devient-il le plus intéressant (aucune justification attendue) ?

Le tarif Liberté (240 €) devient plus avantageux que l'Essentiel lorsque $50 + 5x > 240$, soit $5x > 190$, soit $x > 38$.

À partir de **39 entrées**, le tarif Liberté est le plus intéressant.

5.c Avec un budget de 200 € maximum, quel tarif permet d'acheter le plus grand nombre d'entrées (aucune justification attendue) ?

Tarif Classique : $11x \leq 200$ donne au plus 18 entrées ($11 \times 18 = 198$).

Tarif Essentiel : $50 + 5x \leq 200$ donne au plus 30 entrées ($50 + 5 \times 30 = 200$).

Tarif Liberté : l'abonnement de 240 € dépasse déjà le budget de 200 €, donc ce tarif est inaccessible.

C'est donc le tarif « **Essentiel** » qui permet d'acheter le plus grand nombre d'entrées, soit 30.

Brevet 2024 — Asie

PARTIE A. Des amis, habitant Strasbourg, veulent se rendre à Marseille en voiture de location, puis se déplacer sur place à pied ou en transports en commun. Une agence propose trois formules : A à 0,50 € par kilomètre parcouru ; B avec un forfait fixe de 300 € puis 0,25 € par kilomètre parcouru ; C avec un forfait fixe de 900 € pour un kilométrage illimité. Un tableau des distances indique que Marseille est à 803 km de Strasbourg. Leur budget total pour le voyage est de 1 000 €. 1. Quelle distance vont-ils parcourir pour l'aller-retour ?

Pour l'aller-retour, la distance parcourue est $803 \times 2 = 1\,606$ km.

2. En choisissant la formule B, montrer que la location de voiture coûtera 701,50 €.

Avec la formule B, le prix payé est $300 + 1\,606 \times 0,25$.

$1\,606 \times 0,25 = 401,50$, donc le prix total est $300 + 401,50 = 701,50$ €, ce qui confirme le montant annoncé.

3. Quelle formule de location est la plus avantageuse pour ce trajet de 1 606 km ?

Avec la formule A, le prix payé serait $1\,606 \times 0,50 = 803$ €.

Avec la formule C, le prix payé serait fixe, 900 €.

En comparant les trois montants : $701,50 < 803 < 900$, la formule B est donc **la plus avantageuse** pour ce trajet.

4. On donne : prix moyen du gazole en 2023 : 1,87 € par litre ; consommation de la voiture : 5,6 L pour 100 km ; coût total des péages : 115,80 €. Leur budget de 1 000 € sera-t-il suffisant pour ce voyage (location + carburant + péages), en choisissant la formule B ?

La consommation totale de carburant pour 1 606 km est $1\,606 \times \frac{5,6}{100} = 89,936$ L.

Le coût du carburant est donc $89,936 \times 1,87 \approx 168,18$ € (arrondi au centime).

Le coût total du voyage est la somme de la location, du carburant et des péages : $701,50 + 168,18 + 115,80 = 985,48$ €.

Comme $985,48 \leq 1\,000$, le budget de 1 000 € est suffisant pour ce voyage.

PARTIE B. On étudie maintenant les trois formules de location de façon plus générale, en fonction de la distance parcourue. 5. En notant x le nombre de kilomètres parcourus, exprimer en fonction de x le prix payé avec chacune des trois formules.

- Formule A : prix = $0,5x$

- Formule B : $\text{prix} = 0,25x + 300$
- Formule C : $\text{prix} = 900$ (constant, quel que soit x)

6. Sur un graphique, trois courbes représentent le coût de la location (en euros) en fonction de la distance parcourue (en kilomètres) : la courbe 1 est une droite horizontale coupant l'axe des ordonnées à 900, la courbe 2 est une droite croissante coupant l'axe des ordonnées à 300, et la courbe 3 est une droite croissante passant par l'origine. Associer chaque courbe à sa formule (aucune justification n'était demandée, on en donne une ici).

La formule A, $0,5x$, est une fonction linéaire : sa représentation est une droite passant par l'origine du repère. C'est donc la **courbe 3**.

La formule B, $0,25x + 300$, est une fonction affine dont l'ordonnée à l'origine est 300 : c'est donc la **courbe 2**.

La formule C, constante et égale à 900, est représentée par une droite horizontale coupant l'axe des ordonnées à 900 : c'est donc la **courbe 1**.

7. Résoudre l'équation $0,25x + 300 = 0,5x$ et interpréter le résultat obtenu.

$$0,25x + 300 = 0,5x \iff 300 = 0,5x - 0,25x \iff 300 = 0,25x \iff x = \frac{300}{0,25} \iff x = \mathbf{1\ 200}.$$

Cela signifie que pour une distance parcourue de 1 200 km, le prix payé avec la formule A est égal à celui payé avec la formule B.

8.a. Si la distance parcourue est de 2 500 km, quelle formule permet de payer le moins cher (sans justifier) ?

D'après une lecture graphique, pour une distance parcourue de 2 500 km, c'est la **formule C** qui est la moins chère.

8.b. Donner une distance parcourue pour laquelle la formule A est la plus intéressante (sans justifier).

Toute distance strictement comprise entre 0 et 1 200 km convient, par exemple **600 km** (pour ces distances, la courbe 3, qui représente la formule A, est la plus basse).

8.c. Déterminer graphiquement quelle formule est la moins chère en fonction de la distance parcourue, pour une distance inférieure à 2 600 km.

- de 0 à 1 200 km parcourus : la formule A est la moins chère ;
- de 1 200 à 2 400 km parcourus : la formule B est la moins chère ;
- de 2 400 à 2 600 km parcourus : la formule C est la moins chère.

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 1)

1. Dans un repère orthonormé (unité 1 cm), on donne $A(3; -1; 1)$, $B(4; -1; 0)$, $C(0; 3; 2)$, $D(4; 3; -2)$ et $S(2; 1; 4)$. Montrer que A, B, C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (les premières coordonnées donneraient un rapport -3 , mais $0 \times (-3) \neq 4$) : **A, B, C ne sont pas alignés.**

2.a Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ vérifie $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$: c'est une combinaison linéaire de vecteurs du plan (ABC).

Le point C appartenant au plan (ABC), D y appartient aussi : **les quatre points sont coplanaires.**

2.b Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].

$\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$ montre que (AB) et (CD) sont strictement parallèles (C n'est pas sur (AB)) : ABDC est un quadrilatère plan non croisé dont deux côtés opposés sont parallèles, c'est-à-dire **un trapèze de bases [AB] et [CD].**

3.a Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 + 0 - 2 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -6 + 4 + 2 = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, donc **normal à (ABC).**

3.b En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

(ABC) a une équation de la forme $2x + y + 2z + d = 0$; $A(3; -1; 1)$ y appartient : $6 - 1 + 2 + d = 0 \iff d = -7$. D'où $2x + y + 2z - 7 = 0$.

3.c Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par S et orthogonale au plan (ABC).

Δ est dirigée par $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passe par $S(2; 1; 4)$: $x = 2 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = 4 + 2t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

3.d Montrer que le point I d'intersection de Δ et (ABC) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$, puis que $SI = 2$ cm.

En substituant dans l'équation du plan : $2(2+2t) + (1+t) + 2(4+2t) - 7 = 9t + 6 = 0 \iff t = -\frac{2}{3}$.

D'où $I\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$, et $SI = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{9}} = 2$ cm.

4.a Vérifier que le projeté orthogonal H de B sur la droite (CD) a pour coordonnées $H(3; 3; -1)$, et montrer que $HB = 3\sqrt{2}$ cm.

$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifie $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} = -4 + 0 + 4 = 0$: (BH) est orthogonale à (CD).

$\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$: H est bien sur la droite (CD). H est donc le projeté orthogonal de B sur (CD).

$$HB = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ cm.}$$

4.b Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.

$AB = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$ et $CD = 4AB = 4\sqrt{2}$ (bases du trapèze), la hauteur étant $HB = 3\sqrt{2}$.

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \text{ cm}^2.$$

5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABDC} \times SI = \frac{1}{3} \times 15 \times 2 = 10 \text{ cm}^3.$$

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. Au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient été infectés par la COVID-19. On prélève un individu au hasard ; quelle est la probabilité qu'il ait déjà été infecté (événement I) ?

Par équiprobabilité, $P(I) = 0,057$.

Partie A — 2.a On prélève 100 personnes (tirage assimilé avec remise) ; X compte les personnes déjà infectées. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

L'épreuve « être déjà infecté » (probabilité 0,057) est répétée 100 fois de façon indépendante : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,057$.

Partie A — 2.b Calculer son espérance et interpréter.

$E(X) = 100 \times 0,057 = 5,7$: en moyenne, un échantillon de 100 adultes contient 5,7 personnes déjà infectées.

Partie A — 2.c Quelle est la probabilité qu'aucune personne de l'échantillon ne soit infectée (à 10^{-4} près) ?

$$P(X = 0) = 0,943^{100} \approx 0,0028.$$

Partie A — 2.d Quelle est la probabilité qu'au moins 2 personnes soient infectées (à 10^{-4} près) ?

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,9801.$$

Partie A — 2.e Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leq n) > 0,9$, et interpréter.

À la calculatrice, $P(X \leq 8) \approx 0,883$ et $P(X \leq 9) \approx 0,941$: le plus petit entier est $n = 9$. Il y a plus de 9 chances sur 10 que l'échantillon contienne au plus 9 personnes déjà infectées.

Partie B — 1. Un test a une sensibilité de 0,8 ($P_I(T)$, test positif sachant infecté) et une spécificité de 0,99 ($P_{\bar{I}}(\bar{T})$). Compléter l'arbre de probabilités.

$$P(I) = 0,057, P(\bar{I}) = 0,943; P_I(T) = 0,8, P_I(\bar{T}) = 0,2; P_{\bar{I}}(T) = 0,01, P_{\bar{I}}(\bar{T}) = 0,99.$$

Partie B — 2. Montrer que $P(T) = 0,05503$.

Par les probabilités totales : $P(T) = P(I \cap T) + P(\bar{I} \cap T) = 0,057 \times 0,8 + 0,943 \times 0,01 = 0,0456 + 0,00943 = 0,05503$.

Partie B — 3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif (à 10^{-4} près) ?

$$P_T(I) = \frac{P(I \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0456}{0,05503} \approx 0,8286.$$

Partie C. Dans un autre pays, avec le même test, la proportion de tests positifs est de 29,44 %. Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard ait été infecté ?

En notant x la proportion d'infectés : $P(T) = 0,8x + 0,01(1 - x) = 0,79x + 0,01$.

$0,79x + 0,01 = 0,2944 \iff 0,79x = 0,2844 \iff x = 0,36$: la probabilité d'avoir été infecté est **0,36** (36 % de la population).

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 2)

Partie A — 1. Soit $f(x) = x^2 - x \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

En 0 : $x^2 \rightarrow 0$ et, par croissances comparées, $x \ln(x) \rightarrow 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

En $+\infty$: $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$, avec $\frac{\ln(x)}{x} \rightarrow 0$: le facteur entre parenthèses tend vers 1, et $x^2 \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie A — 2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.

$$f'(x) = 2x - \ln(x) - x \times \frac{1}{x} = 2x - 1 - \ln(x).$$

Partie A — 3. Montrer que $f''(x) = \frac{2x-1}{x}$.

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}.$$

Partie A — 4. Étudier les variations de f' sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations (avec la valeur exacte de l'extremum).

Sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $2x - 1$: négatif sur $]0 ; \frac{1}{2}[$, positif au-delà.

f' décroît puis croît, avec un minimum en $x = \frac{1}{2}$: $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$.

Partie A — 5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Le minimum de f' vaut $\ln(2) > 0$: $f'(x) > 0$ sur tout l'intervalle, donc f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B — 1. Soit $g(x) = x - \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau des variations de g .

$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, du signe de $x - 1$: g décroît sur $]0 ; 1]$ puis croît sur $[1 ; +\infty[$, avec un minimum $g(1) = 1 - 0 = 1$.

Partie B — 2. Sachant que 1 est l'unique solution de $g(x) = 1$, résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0 ; +\infty[$.

$f(x) = x \iff x^2 - x \ln(x) - x = 0 \iff x(x - 1 - \ln(x)) = 0$; comme $x > 0$, cela équivaut à $x - \ln(x) = 1$, soit $g(x) = 1$.

L'unique solution est donc $x = 1$.

Partie C — 1. Soit (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence que, pour tout n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Initialisation : $u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,597$, donc $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$: vrai au rang 0.

Hérédité : si $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$, la stricte croissance de f donne $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(1) = 1$; comme $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,6 \geq \frac{1}{2}$, l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Partie C — 2. Justifier que la suite (u_n) converge.

(u_n) est croissante et majorée par 1 : **elle converge** vers une limite ℓ avec $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

Partie C — 3. Sachant que la limite vérifie $f(\ell) = \ell$, déterminer ℓ .

D'après la partie B, l'équation $f(x) = x$ a pour unique solution 1 sur $]0 ; +\infty[$: $\ell = 1$.

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 2)

Affirmation 1. Si, pour tout n , $\frac{1}{2} < u_n \leq \frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1}$, alors $\lim u_n = \frac{1}{2}$. Vraie ou fausse ?

En factorisant par n^2 : $\frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1} = \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}}{6 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(u_n) est encadrée par deux suites de limite $\frac{1}{2}$: par le théorème des gendarmes, $\lim u_n = \frac{1}{2}$. **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 2. La dérivée h' d'une fonction h est représentée graphiquement sur $[-4 ; 4]$.

La fonction h est convexe sur $[-1 ; 3]$. Vraie ou fausse ?

Sur $[-1 ; 3]$, la courbe de h' n'est pas croissante (elle monte puis redescend) : h n'est donc pas convexe sur tout cet intervalle. **L'affirmation est fausse.**

Affirmation 3. Un code est composé de 4 chiffres (répétitions permises) suivis de 2 lettres distinctes parmi A, B, C. Il existe 20 634 codes contenant au moins un 0. Vraie ou fausse ?

Nombre total de codes : $10^4 \times 3 \times 2 = 60\,000$. Codes sans aucun 0 : $9^4 \times 3 \times 2 = 39\,366$.

Codes avec au moins un 0 : $60\,000 - 39\,366 = 20\,634$. **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 4. La fonction $f(x) = x \ln(x)$ est solution sur $]0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle $xy' - y = x$. Vraie ou fausse ?

$f'(x) = \ln(x) + 1$, donc $xf'(x) - f(x) = x \ln(x) + x - x \ln(x) = x$: l'équation est bien vérifiée.

L'affirmation est vraie.

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 2)

Partie A — 1. Dans un repère orthonormé, $(P) : 2x + 2y - 3z + 1 = 0$, et $A(1 ; 0 ; 1)$, $B(2 ; -1 ; 1)$, $C(-4 ; -6 ; 5)$. Vérifier pour chaque point s'il appartient à (P) .

$A : 2 + 0 - 3 + 1 = 0$: **A appartient à (P) .** $B : 4 - 2 - 3 + 1 = 0$: **B appartient à (P) .**

$C : -8 - 12 - 15 + 1 = -34 \neq 0$: **C n'appartient pas à (P) .**

Partie A — 2. Montrer que $C(0 ; -2 ; -1)$ est le projeté orthogonal de C sur le plan (P) .

$\overrightarrow{CC'} = 2\vec{n}$, où $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal à (P) : la droite (CC') est orthogonale à (P) .

C' vérifie l'équation de (P) : $0 - 4 + 3 + 1 = 0$. **C' est donc bien le projeté orthogonal de C sur (P) .**

Partie A — 3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dirige la droite passant par A : $x = 1 + t$, $y = -t$, $z = 1$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Partie A — 4. Déterminer les coordonnées du point H de (AB) tel que (AB) et (HC) soient orthogonales.

Pour le point de paramètre t : $\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 5+t \\ 6-t \\ -4 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = (5+t) - (6-t) = 2t - 1$.

L'orthogonalité impose $2t - 1 = 0$, soit $t = \frac{1}{2}$: **$H(1,5 ; -0,5 ; 1)$ (c'est le milieu de $[AB])$.**

Partie B — 1. On admet $\overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer la valeur exacte de $\|\overrightarrow{HC}\|$.

$$\|\overrightarrow{HC}\| = \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{121}{4} + 16} = \sqrt{\frac{153}{2}}.$$

Partie B — 2. Déterminer la valeur exacte de l'aire S du triangle ABC.

H est le pied de la hauteur issue de C : $S = \frac{AB \times HC}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{153}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{153}}{2}$.

Partie C — 1. On admet $HC = \sqrt{\frac{17}{2}}$. Soit $\alpha = \widehat{CHC'}$. Déterminer $\cos(\alpha)$.

(CC) est orthogonale à (P), donc à (CH) : le triangle CHC' est rectangle en C.

$$\cos(\alpha) = \frac{HC'}{HC} = \frac{\sqrt{\frac{17}{2}}}{\sqrt{\frac{153}{2}}} = \sqrt{\frac{17}{153}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

Partie C — 2.a Montrer que les droites (CH) et (AB) sont perpendiculaires.

(CH) est orthogonale à (AB) (définition de H), et (CC), orthogonale au plan (P), est orthogonale à (AB) qui y est incluse.

(AB) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (CCH), donc à ce plan tout entier, et en particulier à (CH). Ces deux droites étant sécantes en H : **elles sont perpendiculaires.**

Partie C — 2.b Calculer S' , l'aire du triangle ABC (valeur exacte).

[CH] est la hauteur issue de C relative à la base [AB] : $S' = \frac{AB \times C'H}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{17}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Partie C — 2.c Donner une relation entre S , S' et $\cos(\alpha)$.

$\frac{S'}{S} = \frac{C'H}{CH} = \cos(\alpha)$, autrement dit $S' = S \cos(\alpha)$: l'aire du triangle projeté est celle du triangle initial multipliée par le cosinus de l'angle entre les deux plans.

Bac Terminale 2024 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1.a Soit $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ sur $] -\infty ; 1[$. Déterminer la limite de f en 1.

$e^x \rightarrow e > 0$ et $x-1 \rightarrow 0^-$ (négatif sur l'intervalle) : par quotient, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

1.b En déduire une interprétation graphique.

La courbe $\mathcal{C}$ admet la **droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale.**

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

$e^x \rightarrow 0$ et $x-1 \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; la droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

3.a Montrer que $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}.$$

3.b Dresser, en justifiant, le tableau de variations de f sur $] -\infty ; 1[$.

$e^x > 0$ et $(x-1)^2 > 0$: $f'(x)$ est du signe de $x-2$, strictement négatif sur $] -\infty ; 1[$. f est strictement décroissante, de 0 (limite en $-\infty$) vers $-\infty$ (limite en 1).

4.a On admet $f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}$. **Étudier la convexité de f sur $] -\infty ; 1[$.**

$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0$ pour tout réel x , et $e^x > 0$; sur $] -\infty ; 1[$, $(x-1)^3 < 0$.

$f''(x) < 0$ sur tout l'intervalle : f est concave sur $] -\infty ; 1[$.

4.b Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

$$f(0) = -1 \text{ et } f'(0) = \frac{-2 \times 1}{1} = -2 : T : y = -2x - 1.$$

4.c En déduire que, pour tout x de $] -\infty ; 1[$, $e^x \geq (-2x-1)(x-1)$.

f étant concave, sa courbe est sous ses tangentes : $f(x) \leq -2x - 1$, soit $\frac{e^x}{x-1} \leq -2x - 1$.

En multipliant par $x-1 < 0$ (le sens change) : $e^x \geq (-2x-1)(x-1)$.

5.a Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $] -\infty ; 1[$.

f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty ; 1[$, et -2 est compris entre $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_1 f = -\infty$: par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution α .

5.b À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

$$f(0,31) \approx -1,98 > -2 \text{ et } f(0,32) \approx -2,03 < -2 : 0,31 < \alpha < 0,32.$$

Bac Terminale 2024 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. ABCDEFGH est un cube d'arête 1 cm ; I est le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CG]$.

Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de I et J.

$$I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 0\right) \text{ et } J\left(1 ; 1 ; \frac{1}{2}\right).$$

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI).

$$\overrightarrow{EJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \overrightarrow{FH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{FI} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FH} = -1 + 1 + 0 = 0$ et $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FI} = -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 0$: $\overrightarrow{EJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, donc **normal à (FHI)**.

3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (FHI) est $-2x - 2y + z + 1 = 0$.

$-2\overrightarrow{EJ} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi normal au plan : l'équation est de la forme $-2x - 2y + z + d = 0$; $F(1; 0; 1)$ donne $-2 + 1 + d = 0 \iff d = 1$. D'où $-2x - 2y + z + 1 = 0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EJ).

(EJ) passe par $E(0; 0; 1)$ et est dirigée par $\overrightarrow{EJ} : x = t, y = t, z = 1 - \frac{1}{2}t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

5.a On note K le projeté orthogonal de E sur le plan (FHI). Calculer ses coordonnées.

En substituant dans l'équation du plan : $-2t - 2t + 1 - \frac{1}{2}t + 1 = 0 \iff -\frac{9}{2}t = -2 \iff t = \frac{4}{9}$.

D'où $K \left(\frac{4}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{7}{9} \right)$.

5.b Montrer que le volume de la pyramide EFHI est $\frac{1}{6} \text{ cm}^3$ (on utilisera L, milieu de [EF], projeté orthogonal de I sur (EF)).

Avec le triangle EFH comme base : EFH est rectangle en E, d'aire $\frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.

La hauteur correspondante est IL, avec $L \left(\frac{1}{2} ; 0 ; 1 \right) : IL = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1$.

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6} \text{ cm}^3.$$

5.c Dédurre des deux questions précédentes l'aire du triangle FHI.

En reprenant le volume avec FHI comme base et EK comme hauteur : $EK = \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{4}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{FHI} \times \frac{2}{3} \text{ donne } \mathcal{A}_{FHI} = \frac{3}{4} \text{ cm}^2.$$

Bac Terminale 2024 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A — 1. Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$ sur $[0 ; +\infty[$. Démontrer que f est croissante sur cet intervalle.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0 \text{ sur } [0 ; +\infty[: f \text{ est croissante.}$$

Partie A — 2. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}$.

$$\begin{aligned} \text{En multipliant par la quantité conjuguée : } \sqrt{x+1} - x &= \frac{(\sqrt{x+1} - x)(\sqrt{x+1} + x)}{\sqrt{x+1} + x} = \frac{(x+1) - x^2}{\sqrt{x+1} + x} = \\ &= \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}. \end{aligned}$$

Partie A — 3. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ sur $[0 ; +\infty[$.

Le dénominateur étant strictement positif, $f(x) = x \iff -x^2 + x + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 5$.

Les racines sont $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$: seule la première appartient à $[0 ; +\infty[$. $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or).

Partie B — 1. Soit (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer par récurrence que, pour tout n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation : $u_1 = \sqrt{6} \approx 2,45$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0 = 5$: vrai au rang 0.

Hérédité : si $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$, la croissance de f donne $f(1) = \sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$, et $\sqrt{2} \geq 1$: vrai au rang $n+1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Partie B — 2. En déduire que la suite (u_n) converge.

(u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge.

Partie B — 3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

f étant continue sur $[0 ; +\infty[$, la limite vérifie $f(\ell) = \ell$; d'après la partie A, l'unique solution de cette équation est $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$: c'est la limite de la suite.

Partie B — 4.a Un script Python 'seuil(n)' compte les itérations nécessaires pour que $|u_i - \ell| < 10^{-n}$. Donner la valeur renvoyée par seuil(2).

À la calculatrice, $|u_4 - \ell| \approx 0,02 \geq 10^{-2}$ et $|u_5 - \ell| \approx 0,007 < 10^{-2}$: la fonction renvoie 5.

Partie B — 4.b La valeur renvoyée par seuil(4) est 9. Interpréter.

u_9 est le premier terme de la suite qui approche le nombre d'or ℓ à moins de 10^{-4} près : **il faut 9 itérations pour obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.**

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 1)

Affirmation 1. Soit $f(x) = 5xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe C_f . Vraie ou fausse ?

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$. **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 2. La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' + y = 5e^{-x}$. Vraie ou fausse ?

$f'(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} = 5e^{-x}(1-x)$, donc $f'(x) + f(x) = 5e^{-x}(1-x) + 5xe^{-x} = 5e^{-x}$. **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 3. Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n , avec (u_n) convergeant vers -1 et (w_n) vers 1 , alors (v_n) converge vers un réel de $[-1 ; 1]$. Vraie ou fausse ?

Rien ne garantit la convergence de (v_n) : par exemple $u_n = -1 - \frac{1}{n}$, $v_n = (-1)^n$ et $w_n = 1 + \frac{1}{n}$ vérifient l'encadrement, mais (v_n) diverge.

L'affirmation est fausse.

Affirmation 4. Si de plus (u_n) est croissante et (w_n) décroissante, alors pour tout n , $u_0 \leq v_n \leq w_0$. Vraie ou fausse ?

Par croissance de (u_n) : $u_0 \leq u_n \leq v_n$; par décroissance de (w_n) : $v_n \leq w_n \leq w_0$. **L'affirmation est vraie.**

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 1)

1.a Dans un repère orthonormé, on donne $A(5 ; 5 ; 0)$, $B(0 ; 5 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 10)$ et $D(0 ; 0 ; -\frac{5}{2})$. Montrer que $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan (CAD).

$\vec{CA} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ et $\vec{DC} \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires ; $\vec{n}_1 \cdot \vec{CA} = 5 - 5 + 0 = 0$ et $\vec{n}_1 \cdot \vec{DC} = 0$: $\vec{n}_1$ est normal au plan (CAD).

1.b En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne $x - y = 0$.

L'équation est de la forme $x - y + d = 0$; $C(0; 0; 10)$ donne $0 - 0 + d = 0 \iff d = 0$. D'où $x - y = 0$.

2.a La droite $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique $x = \frac{5}{2}t$, $y = 5 - \frac{5}{2}t$, $z = 0$. Justifier que son intersection H avec (CAD) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$.

En substituant : $\frac{5}{2}t - \left(5 - \frac{5}{2}t\right) = 0 \iff 5t = 5 \iff t = 1$, d'où $H\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$.

2.b Démontrer que H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

Pour $t = 0$, $\mathcal{D}$ passe par $(0; 5; 0) = B$, et son vecteur directeur $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}\vec{n}_1$ est normal au plan (CAD).

$\mathcal{D}$ est donc la droite orthogonale à (CAD) passant par B , et H son point d'intersection avec le plan : **H est le projeté orthogonal de B sur (CAD).**

3.a Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H .

$\vec{HA} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{HB} = -\frac{5}{2}\vec{n}_1$ vérifient $\vec{n}_1 \cdot \vec{HA} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$: les droites (BH) et (HA) sont perpendiculaires, **le triangle ABH est rectangle en H .**

3.b En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.

$$BH = HA = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \text{ donc } \mathcal{A} = \frac{BH \times HA}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{50}{4} = \frac{25}{4}.$$

4.a Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C .

A, B, H ont une cote nulle : ils sont dans le plan $z = 0$; C est sur l'axe $(O; \vec{k})$, perpendiculaire à ce plan. **(CO) est donc la hauteur issue de C .**

4.b En déduire le volume du tétraèdre $ABCH$.

$$CO = 10, \text{ donc } V = \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10 = \frac{125}{6}.$$

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. En déduire la distance du point H au plan (ABC).

$$BA = 5 \text{ et } BC = \sqrt{25 + 100} = 5\sqrt{5}, \text{ donc } \mathcal{A}(ABC) = \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{En égalant les deux expressions du volume : } \frac{125}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{25\sqrt{5}}{2} \times d, \text{ d'où } d = \frac{125}{6} \times \frac{6}{25\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 2)

1. À l'issue d'un examen, 91,7 % des étudiants ont répondu « oui » à la question « Pensez-vous avoir réussi ? » ; 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non », et 98 % de ceux ayant réussi ont répondu « oui ». Préciser $P(Q)$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q})$.

$P(Q) = 0,917$ (proportion de « oui ») et $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0,65$ (probabilité d'avoir répondu « non » sachant qu'on a échoué).

2.a En notant $x = P(R)$, compléter l'arbre pondéré.

$$P(R) = x, P(\bar{R}) = 1 - x; P_R(Q) = 0,98, P_R(\bar{Q}) = 0,02; P_{\bar{R}}(Q) = 0,35, P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0,65.$$

2.b Montrer que $x = 0,9$.

$$\text{Par les probabilités totales : } P(Q) = 0,98x + 0,35(1 - x) = 0,63x + 0,35.$$

$$0,63x + 0,35 = 0,917 \iff 0,63x = 0,567 \iff x = 0,9.$$

3. L'étudiant interrogé a répondu « oui ». Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen (à 10^{-3} près) ?

$$P_Q(R) = \frac{P(Q \cap R)}{P(Q)} = \frac{0,9 \times 0,98}{0,917} \approx \mathbf{0,962}.$$

4. La note N suit la loi binomiale de paramètres $(20; 0,615)$. À partir de quelle note la directrice doit-elle récompenser pour que 65 % des étudiants le soient ?

À la calculatrice : $P(N \geq 11) \approx 0,797$ et $P(N \geq 12) \approx 0,649$: en récompensant à partir de la note 11, environ 80 % des étudiants sont récompensés, ce qui est le premier seuil garantissant au moins 65 %.

5. Les notes $N_1, \dots, N_{10}$ de dix étudiants sont indépendantes et suivent la même loi binomiale $(20; 0,615)$. Calculer $E(S)$ et $V(S)$ pour $S = N_1 + \dots + N_{10}$.

$$\text{Pour chaque note : } E(N_i) = 20 \times 0,615 = 12,3 \text{ et } V(N_i) = 20 \times 0,615 \times 0,385 = 4,7355.$$

$$E(S) = 10 \times 12,3 = 123 \text{ et, par indépendance, } V(S) = 10 \times 4,7355 = 47,355.$$

6.a On pose $M = \frac{S}{10}$. Que modélise cette variable aléatoire ?

M modélise la **moyenne des notes** obtenues par les dix étudiants choisis au hasard.

6.b Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.

$$E(M) = \frac{1}{10}E(S) = 12,3 \text{ et } V(M) = \frac{1}{100}V(S) = 0,47355.$$

6.c À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier que la probabilité que la moyenne de dix étudiants soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 %.

L'intervalle $]10,3 ; 14,3[$ est centré sur $E(M) = 12,3$: l'évènement s'écrit $|M - 12,3| < 2$.

Bienaymé-Tchebychev : $P(|M - 12,3| \geq 2) \leq \frac{0,47355}{4} \approx 0,118$, donc $P(|M - 12,3| < 2) \geq 0,88 \geq 0,8$.

L'affirmation est justifiée.

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 2)

Partie A — 1. La piscine d'Alain contient 50 m^3 d'eau ; il ajoute chaque jour 15 g de chlore. Justifier que cet ajout fait augmenter le taux de 0,3 mg/L.

$$15 \text{ g} = 15\,000 \text{ mg répartis dans } 50\,000 \text{ L} : \frac{15\,000}{50\,000} = 0,3 \text{ mg/L.}$$

Partie A — 2.a Le taux v_n vérifie $v_0 = 0,7$ et $v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3$. Montrer par récurrence que, pour tout n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

Initialisation : $v_1 = 0,92 \times 0,7 + 0,3 = 0,944$, donc $v_0 \leq v_1 \leq 4$: vrai au rang 0.

Hérédité : si $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$, en multipliant par 0,92 puis en ajoutant 0,3 : $v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 3,98 \leq 4$: vrai au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

Partie A — 2.b Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

(v_n) est croissante et majorée par 4 : elle converge.

La fonction de récurrence $x \mapsto 0,92x + 0,3$ étant continue, la limite vérifie $\ell = 0,92\ell + 0,3 \iff 0,08\ell = 0,3 \iff \ell = 3,75$.

Partie A — 3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation (entre 1 et 3 mg/L) ?

La suite converge vers 3,75 : à partir d'un certain rang, le taux dépasse strictement 3 mg/L. **Le taux ne sera pas conforme** à long terme.

Partie A — 4. Compléter l'algorithme Python 'alerte_chlore(s)' qui renvoie le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

'while u <= s :', puis 'n = n + 1' et 'u = 0.92*u + 0.3'.

Partie A — 5. Quelle valeur renvoie 'alerte_chlore(3)' ? Interpréter.

$v_{16} \approx 2,95 \leq 3$ et $v_{17} \approx 3,01 > 3$: la fonction renvoie **17**. Avec ce protocole, le taux de chlore dépassera 3 mg/L au bout de 17 jours.

Partie B — 1. Un modèle continu vérifie (E) : $y' = -0,08y + \frac{q}{50}$. Justifier que f est de la forme $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$.

Les solutions de $y' = ay + b$ sont $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$; ici $a = -0,08$ et $b = \frac{q}{50}$, donc $-\frac{b}{a} = \frac{q}{50 \times 0,08} = \frac{q}{4}$:
 $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$.

Partie B — 2.a Exprimer, en fonction de q , la limite de f en $+\infty$.

$$e^{-0,08x} \rightarrow 0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{q}{4}.$$

Partie B — 2.b Sachant que le taux initial est 0,7 mg/L et que l'on veut une stabilisation à 2 mg/L, déterminer C et q.

Stabilisation à 2 : $\frac{q}{4} = 2 \iff q = 8$ (grammes de chlore par jour).

$f(0) = 0,7 \iff C + 2 = 0,7 \iff C = -1,3$: la fonction est $f(x) = -1,3e^{-0,08x} + 2$.

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 2)

Partie A — 1. La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par B(-1 ; -2), où sa tangente T passe aussi par A(0 ; -1). Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.

$f(-1) = -2$ (ordonnée de B), et $f'(-1)$ est le coefficient directeur de $T = (AB) : \frac{-1 - (-2)}{0 - (-1)} = 1$.

Partie A — 2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ?

Non : la courbe passe **en dessous** de sa tangente T pour les abscisses proches de -2, ce qui est impossible pour une fonction convexe. Elle semble concave puis convexe, avec un point d'inflexion vers $x \approx -1,4$.

Partie A — 3. Conjecturer le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près.

La courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'une seule fois, vers $x \approx 0,1$.

Partie B — 1. On considère $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$ sur $] -2 ; +\infty[$. Déterminer la limite de f en -2 et interpréter.

$x^2 + 2x - 1 \rightarrow -1$ et $\ln(x + 2) \rightarrow -\infty : \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$. La droite $x = -2$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

Partie B — 2. Montrer que, pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.

$$f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x + 2} = \frac{(2x + 2)(x + 2) + 1}{x + 2} = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}.$$

Partie B — 3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations complet.

Le numérateur $2x^2 + 6x + 5$ a pour discriminant $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$: il est strictement positif pour tout x ; le dénominateur $x + 2$ est positif sur l'intervalle.

$f'(x) > 0$: f **est strictement croissante sur $] -2 ; +\infty[$** , de $-\infty$ à $+\infty$.

Partie B — 4. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α , et donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

f est continue, strictement croissante, de $-\infty$ à $+\infty$: par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution α . Par balayage : $\alpha \approx 0,12$.

Partie B — 5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $] -2 ; +\infty[$.

$f(x) < 0$ sur $] -2 ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, et $f(x) > 0$ sur $] \alpha ; +\infty[$.

Partie B — 6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

$$f''(x) = \frac{(4x + 6)(x + 2) - (2x^2 + 6x + 5)}{(x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 8x + 7}{(x + 2)^2}, \text{ du signe du numérateur.}$$

Le trinôme $2x^2 + 8x + 7$ a pour discriminant $\Delta = 64 - 56 = 8 > 0$, avec pour racines $-2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; seule $-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ appartient à l'intervalle.

f'' s'y annule en changeant de signe : **l'unique point d'inflexion a pour abscisse $-2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -1,29$.**

Partie C — 1. Soit $g(x) = \ln(x + 2)$, $J(0 ; 1)$ et M le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x . Justifier que $h(x) = JM^2 = x^2 + [\ln(x + 2) - 1]^2$.

$$JM^2 = (x - 0)^2 + (g(x) - 1)^2 = x^2 + [\ln(x + 2) - 1]^2 \text{ (repère orthonormé).}$$

Partie C — 2.a On admet $h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$. Dresser le tableau de variations de h .

$\frac{2}{x+2} > 0$ sur l'intervalle : $h'(x)$ est du signe de $f(x)$. h décroît sur $] -2 ; \alpha]$ puis croît sur $[\alpha ; +\infty[$, avec un minimum en α .

Partie C — 2.b En déduire que la distance JM est minimale pour $x = \alpha$.

La distance JM est minimale lorsque son carré $h(x)$ est minimal (croissance de la racine carrée), c'est-à-dire pour $x = \alpha$.

Partie C — 3.a Montrer que $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha + 2) = 0 \iff \ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2.$$

Partie C — 3.b En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_g$ en M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

La tangente a pour coefficient directeur $g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha+2}$; la droite (JM_α) a pour coefficient directeur $\frac{\ln(\alpha+2)-1}{\alpha} = \frac{-2\alpha-\alpha^2}{\alpha} = -2-\alpha$.

Le produit vaut $\frac{1}{\alpha+2} \times (-2-\alpha) = -1$: les deux droites sont perpendiculaires.

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 2)

Affirmation 1. Avec $A(2; 0; 0)$, $C(4; 4; 1)$, $D(0; 0; 4)$: les points A, C, D définissent un plan $\mathcal{P}$ d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$. Vraie ou fausse ?

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : les trois points définissent bien un plan.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 16 - 20 + 4 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = -16 + 0 + 16 = 0$: il est normal au plan (ACD), et A vérifie l'équation $(16 - 16 = 0)$.

L'affirmation est vraie.

Affirmation 2. Les points A, B(0; 4; 3), C, D sont coplanaires. Vraie ou fausse ?

Pour B : $8 \times 0 - 5 \times 4 + 4 \times 3 - 16 = -24 \neq 0$: B n'appartient pas au plan (ACD). **L'affirmation est fausse.**

Affirmation 3. Les droites (AC) et (BH), avec $H(-1 ; 1 ; 2)$, sont sécantes. Vraie ou fausse ?

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : les droites sont sécantes ou non coplanaires.

La résolution du système d'intersection donne une solution unique ($t = 8, s = -5$), correspondant au point $(-8 ; -20 ; -5)$. **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 4. Le plan (ABC) a pour équation $x - y + 2z - 2 = 0$. Le point H est le projeté orthogonal de D sur (ABC). Vraie ou fausse ?

H vérifie l'équation : $-1 - 1 + 4 - 2 = 0$.

$\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\vec{n}$ où $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal au plan : (DH) est orthogonale à (ABC).

L'affirmation est vraie : H est bien le projeté orthogonal de D sur (ABC).

Bac Terminale 2024 — Polynésie française (jour 2)

QCM — 1. Quelle est la fonction f , solution de $y' = -3y + 7$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$? **A.** $f(x) = e^{-3x}$ **B.** $f(x) = -\frac{4}{3}e^{-3x} + \frac{7}{3}$ **C.** $f(x) = e^{-3x} + \frac{7}{3}$ **D.** $f(x) = -\frac{10}{3}e^{-3x} - \frac{7}{3}$

Les solutions de $y' = -3y$ sont les fonctions $x \mapsto Ke^{-3x}$ ($K \in \mathbb{R}$) ; une solution constante α de $y' = -3y + 7$ vérifie $0 = -3\alpha + 7$, soit $\alpha = \frac{7}{3}$.

Les solutions de $y' = -3y + 7$ sont donc $x \mapsto Ke^{-3x} + \frac{7}{3}$. La condition $f(0) = 1$ donne $K + \frac{7}{3} = 1 \iff K = -\frac{4}{3}$: **réponse B.**

QCM — 2. La courbe d'une fonction f positive sur $[0 ; +\infty[$ est donnée dans le sujet, quadrillée en carreaux d'aire 1. Un encadrement de $I = \int_1^5 f(x) dx$ est proposé parmi : **A.** $0 \leq I \leq 4$ **B.** $1 \leq I \leq 5$ **C.** $5 \leq I \leq 10$ **D.** $10 \leq I \leq 15$.

La courbe étant positive sur $[1 ; 5]$, I est l'aire sous la courbe entre les droites $x = 1$ et $x = 5$; en comptant les carreaux du quadrillage, cette aire est comprise entre 5 et 10 unités d'aire : **réponse C.**

QCM — 3. Soit $g(x) = x^2 \ln(x^2 + 4)$ définie sur $\mathbb{R}$. Que vaut $\int_0^2 g'(x) dx$ à 10^{-1} près ? A. 4,9
B. 8,3 C. 1,7 D. 7,5

g est une primitive de g' , donc $\int_0^2 g'(x) dx = g(2) - g(0) = 4 \ln(8) - 0 = 4 \ln(8)$.

$4 \ln(8) = 4 \ln(2^3) = 12 \ln(2) \approx 8,3$: réponse B.

QCM — 4. Une professeure veut former un groupe de 5 élèves parmi 31. Combien de groupes différents peut-elle former ? A. 31^5 B. $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$ C. $31 + 30 + 29 + 28 + 27$
D. $\binom{31}{5}$

Un groupe est un choix de 5 élèves parmi 31 sans ordre ni répétition : le nombre de possibilités est $\binom{31}{5}$: réponse D.

QCM — 5. Parmi ces 31 élèves : 10 font physique-chimie, 20 font SES, 1 fait LLCE espagnol. Combien de groupes de 5 élèves comportant exactement 3 élèves de SES peut-on former ? A. $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$ B. $\binom{20}{3} + \binom{11}{2}$ C. $\binom{20}{3}$ D. $20^3 \times 11^2$

Il faut choisir 3 élèves parmi les 20 faisant SES, soit $\binom{20}{3}$ façons, puis 2 élèves parmi les $31 - 20 = 11$ élèves ne faisant pas SES, soit $\binom{11}{2}$ façons ; les deux choix étant indépendants, le nombre total de groupes est $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$: réponse A.

Bac Terminale 2024 — Polynésie française (jour 2)

1.a La suite (u_n) est définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$. Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2 .

$$u_1 = 8 - \ln\left(\frac{8}{4}\right) = 8 - \ln(2) \approx 7,31.$$

$$u_2 = u_1 - \ln\left(\frac{u_1}{4}\right) \approx 7,3069 - \ln(1,8267) \approx 6,70.$$

1.b Une fonction Python ‘mystere(k)’ initialise ‘u = 8’ et ‘S = 0’, puis répète ‘k’ fois ‘S = S + u’ suivi de ‘u = u - log(u/4)’, avant de renvoyer ‘S’. L’appel ‘mystere(10)’ renvoie 58,440... Que représente ce résultat ?

À chaque tour de boucle, ‘S’ accumule la valeur courante de ‘u’ avant sa mise à jour : après 10 tours, ‘S’ contient donc $u_0 + u_1 + \dots + u_9$, c’est-à-dire la somme des dix premiers termes de la suite (u_n) , de u_0 à u_9 .

1.c Modifier la fonction pour qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite.

- def mystere(k) :
- u = 8
- S = 0
- for i in range(k) :
- S = S + u
- u = u - log(u / 4)
- return S / k

2. Soit $f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$ définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Étudier les variations de f et préciser la valeur exacte de son minimum.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x-1$: $f'(x) < 0$ sur $]0 ; 1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$.

f est donc strictement décroissante sur $]0 ; 1]$ puis strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$, avec un minimum en $x = 1$ valant $f(1) = 1 - \ln\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \ln(4)$.

3.a On admet que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n . Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation : $u_0 = 8$ et $u_1 \approx 7,31$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour un certain n . Comme f est croissante sur $[1 ; +\infty[$, on a $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, soit $f(1) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Or $f(1) = 1 + \ln(4) \approx 2,39 \geq 1$, donc $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

3.b En déduire que (u_n) converge, et noter ℓ sa limite.

L'encadrement précédent montre que (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leq u_n$) et minorée par 1 : elle converge donc vers une limite réelle $\ell \geq 1$.

3.c Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0 ; +\infty[$.

$f(x) = x \iff x - \ln\left(\frac{x}{4}\right) = x \iff \ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \iff \frac{x}{4} = 1 \iff x = 4$: l'unique solution est 4.

3.d En déduire la valeur de ℓ .

f est continue sur $]0 ; +\infty[$ (car dérivable); en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. D'après la question précédente, la seule solution possible est $\ell = 4$: $\ell = 4$.

Bac Terminale 2024 — Polynésie française (jour 2)

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé, l'unité étant la centaine de mètres. Des drones sont positionnés en $A(-1 ; -1 ; 17)$, $B(4 ; -2 ; 4)$ et $C(1 ; -3 ; 7)$. Justifier que A , B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, par exemple $\frac{5}{2} \neq \frac{-1}{-2}$), donc **les points A , B et C ne sont pas alignés**; ils définissent un plan $\mathcal{P} = (ABC)$.

2.a Justifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P} = (ABC)$.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 5 + (-3) \times (-1) + 1 \times (-13) = 10 + 3 - 13 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + (-3) \times (-2) + 1 \times (-10) = 4 + 6 - 10 = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$, donc **$\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$** .

2.b Démontrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $2x - 3y + z - 18 = 0$.

Le plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ a une équation de la forme $2x - 3y + z + d = 0$. En écrivant que $A(-1 ; -1 ; 17)$ appartient au plan : $2(-1) - 3(-1) + 17 + d = 0 \iff -2 + 3 + 17 + d = 0 \iff d = -18$. **Une équation de $\mathcal{P}$ est donc $2x - 3y + z - 18 = 0$** (on vérifie que B et C la vérifient également).

3.a Un quatrième drone suit la droite $d : x = 3t + 2, y = t + 5, z = 4t + 1$ ($t \in \mathbb{R}$). Déterminer un vecteur directeur de d .

Les coefficients de t dans la représentation paramétrique donnent un vecteur directeur : $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.b Déterminer les coordonnées du point E, intersection de d avec le plan $\mathcal{P}$.

On substitue les coordonnées paramétriques de d dans l'équation de $\mathcal{P}$: $2(3t+2) - 3(t+5) + (4t+1) - 18 = 0$.

$$6t + 4 - 3t - 15 + 4t + 1 - 18 = 0 \iff 7t - 28 = 0 \iff t = 4.$$

En remplaçant $t = 4$ dans les équations de d : $x = 14$, $y = 9$, $z = 17$. **E a pour coordonnées (14 ; 9 ; 17).**

4. Un cinquième drone suit la droite Δ , passant par D(2 ; 5 ; 1) et perpendiculaire à $\mathcal{P}$; elle coupe $\mathcal{P}$ au point F(6 ; -1 ; 3) (donné). Démontrer que la distance de D au plan $\mathcal{P}$ vaut $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.

Comme Δ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et coupe $\mathcal{P}$ en F, la distance DF est bien la distance du point D au plan $\mathcal{P}$.

$$\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ donc } DF^2 = 4^2 + (-6)^2 + 2^2 = 16 + 36 + 4 = 56 = 4 \times 14.$$

$DF = \sqrt{4 \times 14} = 2\sqrt{14}$: la distance de D au plan $\mathcal{P}$ vaut $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.

5. Il reste 40 secondes avant le spectacle. Un nouveau drone, envoyé de D en ligne droite vers un point quelconque du plan $\mathcal{P}$, vole à 18,6 m/s. Peut-il arriver à temps ?

La distance la plus courte entre D et le plan $\mathcal{P}$ est $DF = 2\sqrt{14}$ centaines de mètres, soit $200\sqrt{14}$ mètres ; tout autre point du plan est au moins aussi loin de D.

Le temps minimal pour parcourir cette distance à 18,6 m/s est $t = \frac{200\sqrt{14}}{18,6} \approx 40,2$ secondes.

Ce temps dépasse les 40 secondes disponibles : **le drone ne peut pas arriver à temps**, quel que soit le point du plan choisi.

Bac Terminale 2023 — Amérique du Nord (jour 1)**Partie A — On étudie la fonction auxiliaire g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$. 1.a Déterminer la limite de g en $-\infty$.**

Par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 3) = +\infty$; par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.

Partie A — 1.b Déterminer la limite de g en $+\infty$.

La forme est indéterminée : on factorise, pour $x \neq 0$, $g(x) = 2x \left(3 \times \frac{e^{2x}}{2x} - 1 - \frac{3}{2x} \right)$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty$, donc le facteur entre parenthèses tend vers $+\infty$, tout comme $2x$.

Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Partie A — 2.a g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée g' . Montrer que $g'(x) = 6e^{2x} - 2$.

Pour tout réel x : $g'(x) = 3 \times 2e^{2x} - 2 = 6e^{2x} - 2$.

Partie A — 2.b Étudier le signe de g' sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) > 0 \iff 6e^{2x} > 2 \iff e^{2x} > \frac{1}{3} \iff 2x > \ln\left(\frac{1}{3}\right) \iff x > -\frac{1}{2}\ln(3)$ (la fonction $\ln$ étant strictement croissante).

Donc g' est strictement négative sur $\left] -\infty ; -\frac{1}{2}\ln(3) \right[$, nulle en $-\frac{1}{2}\ln(3)$, et strictement positive sur $\left] -\frac{1}{2}\ln(3) ; +\infty \right[$.

Partie A — 2.c En déduire le tableau de variations de g et vérifier que son minimum vaut $\ln(3) - 2$.

D'après le signe de g' , g est strictement décroissante sur $\left] -\infty ; -\frac{1}{2}\ln(3) \right[$ puis strictement croissante sur $\left] -\frac{1}{2}\ln(3) ; +\infty \right[$: elle admet donc un minimum en $x = -\frac{1}{2}\ln(3)$.

$$g\left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right) = 3e^{-\ln(3)} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right) - 3 = 3 \times \frac{1}{3} + \ln(3) - 3 = \ln(3) - 2.$$

On retrouve bien le minimum annoncé, $\ln(3) - 2 \approx -0,90$, avec g tendant vers $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Partie A — 3.a Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.

$g(0) = 3e^0 - 2 \times 0 - 3 = 3 - 3 = 0$, donc $x = 0$ est bien solution de $g(x) = 0$.

Partie A — 3.b Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution α , non nulle, et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} .

Sur $\left] -\frac{1}{2}\ln(3) ; +\infty \right[$, g est strictement croissante et s'annule en 0 : c'est donc l'unique solution de $g(x) = 0$ sur cet intervalle.

Sur $\left] -\infty ; -\frac{1}{2}\ln(3) \right[$, g est continue (car dérivable) et strictement décroissante, avec $\lim_{-\infty} g = +\infty$ et $g\left(-\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \ln(3) - 2 < 0$: 0 est une valeur intermédiaire, donc, d'après le corollaire du théorème

des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

L'équation $g(x) = 0$ admet donc exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$: 0 et α .

Un balayage à la calculatrice donne $g(-1,5) \approx 0,149 > 0$ et $g(-1,4) \approx -0,018 < 0$, d'où l'encadrement $-1,5 < \alpha < -1,4$.

Partie A — 4. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

D'après les variations de g et la question précédente, g est strictement positive sur $] -\infty ; \alpha[$ et sur $]0 ; +\infty[$, et strictement négative sur $] \alpha ; 0[$.

Partie B — On étudie désormais $f(x) = e^{3x} - (2x + 1)e^x$, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f' . 1. Montrer que $f'(x) = e^x g(x)$.

Pour tout réel x : $f'(x) = 3e^{3x} - 2e^x - (2x + 1)e^x = e^x (3e^{2x} - 2 - (2x + 1)) = e^x (3e^{2x} - 2x - 3) = e^x g(x)$.

Partie B — 2. En déduire le signe de f' puis les variations de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$.

D'après la question A.4, f est donc strictement croissante sur $] -\infty ; \alpha[$ et sur $]0 ; +\infty[$, et strictement décroissante sur $] \alpha ; 0[$.

Partie B — 3. Expliquer pourquoi f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

Si f était convexe sur $\mathbb{R}$, sa dérivée f' serait croissante sur $\mathbb{R}$. Or f' est positive sur $] -\infty ; \alpha[$ puis négative sur $] \alpha ; 0[$: par exemple $f'(-2) > 0$ alors que $f'(-1) < 0$, donc f' n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction f n'est donc pas convexe sur $\mathbb{R}$.

Bac Terminale 2023 — Amérique du Nord (jour 1)

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(-1 ; 2 ; 5)$, $B(3 ; 6 ; 3)$, $C(3 ; 0 ; 9)$ (non alignés). Le triangle ABC est : a. isocèle rectangle en A — b. isocèle rectangle en B — c. isocèle rectangle en C — d. équilatéral.

Le repère étant orthonormé, on calcule les longueurs des côtés : $AB = \sqrt{(3+1)^2 + (6-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{36} = 6$, $AC = \sqrt{(3+1)^2 + (0-2)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{36} = 6$, $BC = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

$AB = AC$ donc le triangle est isocèle en A ; de plus $AB^2 + AC^2 = 36 + 36 = 72 = BC^2$, donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, il est également rectangle en A.

Donc, la réponse est a.

2. On considère en plus $D(8; -3; -8)$. Une équation cartésienne du plan (BCD) est : a. $2x + y + z - 15 = 0$ — b. $9x - 5y + 3 = 0$ — c. $4x + y + z - 21 = 0$ — d. $11x + 5z - 73 = 0$.

On teste l'appartenance de B, C et D à chaque plan candidat. Pour la proposition c., $4x + y + z - 21$ vaut : en B, $12 + 6 + 3 - 21 = 0$; en C, $12 + 0 + 9 - 21 = 0$; en D, $32 - 3 - 8 - 21 = 0$.

Les trois points B, C et D vérifient donc l'équation $4x + y + z - 21 = 0$ (on vérifie aussi qu'aucune des trois autres équations n'est satisfaite simultanément par B, C et D).

Donc, la réponse est **c**.

3. On admet que (ABC) a pour équation $x - 2y - 2z + 15 = 0$. Soit H le projeté orthogonal de D sur (ABC). On peut affirmer que : a. $H(-2; 17; 12)$ — b. $H(3; 7; 2)$ — c. $H(3; 2; 7)$ — d. $H(-15; 1; -1)$.

Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Comme H est le projeté orthogonal de D sur (ABC),

H est le point d'intersection de (ABC) avec la droite passant par D et dirigée par $\vec{u}$, de représentation paramétrique $x = 8 + k$, $y = -3 - 2k$, $z = -8 - 2k$ ($k \in \mathbb{R}$).

On cherche k tel que ce point appartienne à (ABC) : $(8 + k) - 2(-3 - 2k) - 2(-8 - 2k) + 15 = 0 \iff 8 + k + 6 + 4k + 16 + 4k + 15 = 0 \iff 9k + 45 = 0 \iff k = -5$.

On obtient $H(8 - 5; -3 + 10; -8 + 10) = H(3; 7; 2)$.

Donc, la réponse est **b**.

4. Soit Δ la droite de représentation paramétrique $x = 5 + t$, $y = 3 - t$, $z = -1 + 3t$ ($t \in \mathbb{R}$). Les droites (BC) et Δ sont : a. confondues — b. strictement parallèles — c. sécantes — d. non coplanaires.

Un vecteur directeur de Δ est $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, et un vecteur directeur de (BC) est $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ (soit encore $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ après simplification). Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont ni confondues ni strictement parallèles.

Il reste à savoir si elles ont un point commun. La droite (BC) admet la représentation paramétrique $x = 3$, $y = 6 - s$, $z = 3 + s$ ($s \in \mathbb{R}$). En égalant les coordonnées : $5 + t = 3$ donne $t = -2$, d'où le point de Δ correspondant $(3; 5; -7)$.

En reportant dans (BC) : il faudrait $6 - s = 5$ et $3 + s = -7$, soit $s = 1$ et $s = -10$ simultanément, ce qui est impossible.

Les droites n'ont donc aucun point commun et ne sont pas parallèles : elles ne sont pas coplanaires.

Donc, la réponse est **d**.

5. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + 2z - 6 = 0$ (on rappelle que (ABC) a pour équation $x - 2y - 2z + 15 = 0$). On peut affirmer que : a. $\mathcal{P}$ et (ABC) sont strictement parallèles — b. ils sont sécants selon la droite (AB) — c. selon la droite (AC) — d. selon la droite (BC) .

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, et un vecteur normal à (ABC) est $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans ne sont pas parallèles : ils sont sécants selon une droite.

On teste l'appartenance de A, B et C à $\mathcal{P}$: en A, $2 \times (-1) - 2 + 2 \times 5 - 6 = -2 - 2 + 10 - 6 = 0$; en B, $2 \times 3 - 6 + 2 \times 3 - 6 = 6 - 6 + 6 - 6 = 0$; en C, $2 \times 3 - 0 + 2 \times 9 - 6 = 6 + 18 - 6 = 18 \neq 0$.

A et B appartiennent donc à $\mathcal{P}$ (et aussi à (ABC) , par hypothèse), mais pas C. La droite d'intersection des deux plans est donc la droite (AB) .

Donc, la réponse est **b**.

Bac Terminale 2023 — Amérique du Nord (jour 1)

Partie A — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{11}{u_n} \right)$ (on admet qu'elle est bien définie). 1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.

$$u_1 = \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{11}{u_0} \right) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{11}{5} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{36}{5} = \frac{18}{5}.$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(u_1 + \frac{11}{u_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{18}{5} + \frac{55}{18} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{324 + 275}{90} = \frac{599}{180}.$$

Partie A — 2. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{11}{x} \right)$. Démontrer que f est croissante sur $[\sqrt{11} ; +\infty[$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme fraction rationnelle, et pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{11}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 11}{2x^2}$.

Pour $x \geq \sqrt{11}$, on a $x^2 \geq 11$ (la fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}^+$), donc $x^2 - 11 \geq 0$, et comme $2x^2 > 0$, on obtient $f'(x) \geq 0$.

f est donc croissante sur $[\sqrt{11} ; +\infty[$.

Partie A — 3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$.

On remarque d'abord que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n , et que $f(\sqrt{11}) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{11} + \frac{11}{\sqrt{11}} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{11} + \sqrt{11}) = \sqrt{11}$.

Initialisation : $u_0 = 5$ et $u_1 = \frac{18}{5} = 3,6$, avec $\sqrt{11} \approx 3,317$, donc $u_0 \geq u_1 \geq \sqrt{11}$: l'inégalité est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que, pour un entier n fixé, $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$. Comme f est croissante sur $[\sqrt{11}; +\infty[$, on en déduit $f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \geq f(\sqrt{11})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq \sqrt{11}$: la propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$.

Partie A — 4. En déduire que (u_n) converge, et noter a sa limite.

D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{11}$: d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite réelle a telle que $a \geq \sqrt{11}$.

Partie A — 5. En posant une équation dont a est solution, donner la valeur exacte de a .

La suite (u_n) converge vers a et vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue sur $\mathbb{R}^{*+}$: d'après le théorème du point fixe, a est solution de l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

$$f(x) = x \iff \frac{1}{2} \left(x + \frac{11}{x} \right) = x \iff x + \frac{11}{x} = 2x \iff \frac{11}{x} = x \iff x^2 = 11 \iff x = \sqrt{11} \quad (\text{car } x > 0).$$

Cette équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{*+}$, donc, la suite étant minorée par $\sqrt{11} > 0$, on conclut $a = \sqrt{11}$.

Partie B — Pour tout entier naturel n , un rectangle R_n d'aire 11 a pour largeur ℓ_n et longueur L_n , avec $L_0 = 5$ et $L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$. 1.a Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2,2$.

L'aire de R_0 vaut 11 et sa longueur $L_0 = 5$, donc sa largeur vérifie $L_0 \times \ell_0 = 11$, d'où $\ell_0 = \frac{11}{5} = 2,2$.

Partie B — 1.b Établir que, pour tout entier naturel n , $\ell_n = \frac{11}{L_n}$.

Pour tout entier naturel n , le rectangle R_n a pour aire 11 et pour longueur L_n , donc sa largeur vérifie $L_n \times \ell_n = 11$, d'où $\ell_n = \frac{11}{L_n}$.

Partie B — 2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la partie A.

En remplaçant ℓ_n par $\frac{11}{L_n}$ dans la relation de récurrence : $L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2} = \frac{1}{2} \left(L_n + \frac{11}{L_n} \right)$, qui est exactement la relation vérifiée par (u_n) . Comme de plus $L_0 = u_0 = 5$, les deux suites sont identiques.

Partie B — 3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $\ell_n \leq \sqrt{11} \leq L_n$.

D'après la partie A, (u_n) , donc (L_n) , est minorée par $\sqrt{11}$, ce qui donne $\sqrt{11} \leq L_n$.

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, $\sqrt{11} \leq L_n \implies \frac{1}{\sqrt{11}} \geq \frac{1}{L_n} \implies \frac{11}{\sqrt{11}} \geq \frac{11}{L_n}$, soit $\sqrt{11} \geq \ell_n$.

En combinant les deux inégalités, on obtient bien $\ell_n \leq \sqrt{11} \leq L_n$.

Partie B — 4. On admet que (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Géométriquement, les dimensions du rectangle R_n se rapprochent de plus en plus l'une de l'autre et tendent toutes deux vers $\sqrt{11}$: le rectangle R_n tend donc à devenir un carré de côté $\sqrt{11}$.

Partie B — 5.a Un script Python, nommé heron, initialise $L = 5$ et $\ell = 2,2$, puis répète n fois les instructions $L \leftarrow \frac{L + \ell}{2}$ et $\ell \leftarrow \frac{11}{L}$, avant de renvoyer les deux valeurs arrondies au millionième. Que renvoie l'appel 'heron(3)' ?

- L'appel 'heron(3)' renvoie ℓ_3 et L_3 , arrondis au millionième.
- On obtient les valeurs **0,316606 + 3** (soit $\ell_3 \approx 3,316606$) et $L_3 \approx \mathbf{3,316643}$.

Partie B — 5.b Donner une interprétation de ces deux valeurs.

Ces deux valeurs encadrent $\sqrt{11}$: on a $3,316606 \leq \sqrt{11} \leq 3,316643$, soit un encadrement d'amplitude inférieure à 4×10^{-5} , obtenu avec seulement trois itérations de l'algorithme.

Bac Terminale 2023 — Asie (jour 2)

Partie A — 1. Deux cubes ABCDEFGH et BKLCFJMG sont accolés ; dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a par exemple $F(1 ; 0 ; 1)$, $G(1 ; 1 ; 1)$ et $J(2 ; 0 ; 1)$; le point I est le milieu de [EF]. Montrer que le volume du tétraèdre FIGB vaut $\frac{1}{12}$ (unité de volume), sachant que $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.

Les arêtes des cubes valent toutes 1, donc $BF = FG = 1$; comme I est le milieu de [EF], la longueur FI vaut $\frac{1}{2} \times EF = \frac{1}{2}$.

En choisissant le triangle rectangle isocèle BFG comme base (aire $= \frac{1}{2} \times BF \times FG = \frac{1}{2}$) et [FI] comme hauteur associée (FI est perpendiculaire au plan (BFG), donc à la base) : $V_{FIGB} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Donc, la réponse est $V_{FIGB} = \frac{1}{12}$ unité de volume.

Partie A — 2. Déterminer les coordonnées du point I.

On décompose $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$). Donc, la réponse est $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$.

Partie A — 3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est normal au plan (BIG).

Avec $J(2; 0; 1)$ et $D(0; 1; 0)$, on obtient $\overrightarrow{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'autre part $\overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (car $B(1; 0; 0)$ et $I(\frac{1}{2}; 0; 1)$) et $\overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (car $G(1; 1; 1)$).

On calcule les produits scalaires : $\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BI} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 0 + 1 = 0$, et $\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BG} = 2 \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$.

$\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles) et dirigent le plan (BIG) : $\overrightarrow{DJ}$ leur est orthogonal, donc $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BIG).

Partie A — 4. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BIG) est $2x - y + z - 2 = 0$.

Puisque $\overrightarrow{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (BIG), ce plan admet une équation de la forme $2x - y + z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Le point $B(1; 0; 0)$ appartient au plan, donc $2 \times 1 - 0 + 0 + d = 0$, soit $d = -2$.

Donc, la réponse est $2x - y + z - 2 = 0$.

Partie A — 5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d , orthogonale à (BIG) et passant par F.

La droite d , orthogonale au plan (BIG), admet pour vecteur directeur le vecteur normal $\overrightarrow{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et passe par $F(1; 0; 1)$.

Un point $M(x; y; z)$ appartient à d si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{FM} = t \overrightarrow{DJ}$.

Donc, la réponse est
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Partie A — 6.a La droite d coupe le plan (BIG) au point L' . Montrer que L' a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.

On remplace x, y, z par leurs expressions paramétriques dans l'équation du plan (BIG) : $2(1 + 2t) - (-t) + (1 + t) - 2 = 0$.

En développant : $2 + 4t + t + 1 + t - 2 = 0$, soit $6t + 1 = 0$, donc $t = -\frac{1}{6}$.

En reportant dans les équations paramétriques : $x = 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $y = -\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$,
 $z = 1 + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$.

Donc, la réponse est $L' \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.

Partie A — 6.b Calculer la longueur FL' .

On calcule $\overrightarrow{FL'} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ (différence des coordonnées de L' et de F).

$$FL'^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Donc, la réponse est $FL' = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Partie A — 6.c En déduire l'aire du triangle BIG.

Le segment $[FL']$ est la hauteur du tétraèdre FIGB relative à la base (BIG), puisque d est orthogonale à ce plan.

Avec la formule du volume : $V_{FIGB} = \frac{1}{3} \times \text{aire}(\text{BIG}) \times FL'$, donc $\text{aire}(\text{BIG}) = \frac{3 V_{FIGB}}{FL'} = \frac{3 \times \frac{1}{12}}{\frac{\sqrt{6}}{6}} =$

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{6}} = \frac{1}{4} \times \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{6}{4\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6}}{24} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Donc, la réponse est $\text{aire}(\text{BIG}) = \frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

Bac Terminale 2023 — Asie (jour 2)**Partie A — 1. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.**

Quand $x \rightarrow -\infty$, $2x \rightarrow -\infty$ donc $e^{2x} \rightarrow 0$, et $e^x \rightarrow 0$; par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 - 0 + 1 = 1$.

Partie A — 2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

On factorise par le terme dominant : $g(x) = e^x (e^x - 1 + e^{-x})$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow 0$, donc par somme $e^x - 1 + e^{-x} \rightarrow +\infty$; par produit de limites infinies, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Partie A — 3. Montrer que $g'(x) = e^x(2e^x - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et $g'(x) = 2e^{2x} - e^x = e^x(2e^x - 1)$.

Partie A — 4. Étudier le signe de g' et en déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ (avec les limites et l'extremum exact).

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , le signe de $g'(x)$ est celui de $2e^x - 1$.

$2e^x - 1 = 0 \iff e^x = \frac{1}{2} \iff x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$; de plus $2e^x - 1 > 0 \iff x > -\ln 2$, et $2e^x - 1 < 0 \iff x < -\ln 2$.

La fonction g est donc décroissante sur $] -\infty ; -\ln 2]$ et croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$, avec un minimum en $x = -\ln 2$.

$$g(-\ln 2) = e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} + 1 = \frac{1}{e^{2\ln 2}} - \frac{1}{e^{\ln 2}} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}.$$

Tableau de variations : g vaut 1 en $-\infty$ (limite), décroît jusqu'au minimum $\frac{3}{4}$ en $x = -\ln 2$, puis croît vers $+\infty$.

Partie A — 5. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ vaut $\frac{3}{4}$, qui est strictement positif. Donc, la réponse est : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

Partie A — 6. Sans mener les calculs, expliquer comment retrouver ce résultat en posant $X = e^x$.

En posant $X = e^x$ (avec $X > 0$), on a $g(x) = X^2 - X + 1$, un trinôme du second degré en X .

Sa forme canonique est $\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$: c'est une somme d'un carré (toujours positif ou nul) et d'une constante strictement positive $\frac{3}{4}$, donc ce trinôme est strictement positif pour tout X , ce qui redonne $g(x) > 0$.

Partie B — 1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$. Justifier qu'elle est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(g(x))$ avec $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$. Or on a montré que $g(x) > 0$ pour tout réel x : le logarithme népérien est donc bien défini, et f est définie sur $\mathbb{R}$.

Partie B — 2. Justifier que $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comme $f = \ln \circ g$ avec g dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, par dérivation d'une composée avec le logarithme, $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$.

Partie B — 3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

$$f(0) = \ln(1 - 1 + 1) = \ln(1) = 0.$$

$$f'(0) = \frac{2 \times 1 - 1}{1 - 1 + 1} = \frac{1}{1} = 1.$$

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$. Donc, la réponse est $y = x$.

Partie B — 4. Montrer que f est strictement croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$.

Puisque $g(x) > 0$ pour tout x , le signe de $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ est celui de $g'(x)$.

D'après la partie A, $g'(x) > 0$ sur $] -\ln 2 ; +\infty[$, donc $f'(x) > 0$ sur cet intervalle. Donc, la réponse est : f est strictement croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$.

Partie B — 5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-\ln 2 ; +\infty[$, et donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

$$f(-\ln 2) = \ln(g(-\ln 2)) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0,29, \text{ donc } f(-\ln 2) < 2.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, par composition avec le logarithme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$, avec $f(-\ln 2) < 2 < \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

À la calculatrice : $f(1,12) \approx 1,99 < 2$ et $f(1,13) \approx 2,01 > 2$. Donc, la réponse est $\alpha \approx 1,12$ (à 10^{-2} près).

Partie C. Au vu des résultats précédents, les trois conjectures de l'élève (l'équation $f(x) = 2$ semble avoir une solution ; f semble croissante sur $[-0,5 ; +\infty[$; la tangente en 0 semble être $y = 1,5x$) sont-elles vraies ou fausses ?

Conjecture 1 (existence d'une solution à $f(x) = 2$) : vraie, confirmée par la question précédente.

Conjecture 2 (croissance sur $[-0,5 ; +\infty[)$: fausse : on a montré que f est croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$, avec $-\ln 2 \approx -0,69 \neq -0,5$.

Conjecture 3 (tangente $y = 1,5x$) : fausse : on a établi que l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = x$.

Bac Terminale 2023 — Asie (jour 2)

1.a On étudie la désintégration du polonium : on part d'un échantillon de 2 g, sachant que 1 g contient 3×10^{21} noyaux. On note v_0 le nombre de noyaux au départ. Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$.

L'échantillon initial pèse 2 g, donc $v_0 = 2 \times 3 \times 10^{21} = 6 \times 10^{21}$ noyaux. Donc, la réponse est $v_0 = 6 \times 10^{21}$.

1.b Chaque jour, 0,5 % des noyaux présents se désintègrent, puis on ajoute 0,005 g de polonium pour compenser. Justifier que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,995v_n + 1,5 \times 10^{19}$.

Si v_n désigne le nombre de noyaux au bout de n jours, la disparition de 0,5 % laisse $v_n \left(1 - \frac{0,5}{100}\right) = 0,995 v_n$ noyaux.

L'ajout quotidien de 0,005 g de polonium apporte $0,005 \times 3 \times 10^{21} = 0,015 \times 10^{21} = 1,5 \times 10^{19}$ noyaux supplémentaires.

Donc, la réponse est $v_{n+1} = 0,995v_n + 1,5 \times 10^{19}$.

2.a Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$.

Initialisation : $v_0 = 6 \times 10^{21}$ et $v_1 = 0,995 \times 6 \times 10^{21} + 1,5 \times 10^{19} = 5,97 \times 10^{21} + 0,015 \times 10^{21} = 5,985 \times 10^{21}$. On a bien $0 \leq v_1 \leq v_0$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$ pour un entier n donné. La fonction $x \mapsto 0,995x + 1,5 \times 10^{19}$ est croissante (coefficient $0,995 > 0$), donc l'encadrement se conserve en appliquant cette fonction : $0,995 \times 0 + 1,5 \times 10^{19} \leq 0,995v_{n+1} + 1,5 \times 10^{19} \leq 0,995v_n + 1,5 \times 10^{19}$, c'est-à-dire $1,5 \times 10^{19} \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$, donc en particulier $0 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$.

2.b En déduire que la suite (v_n) converge.

L'inégalité de gauche montre que (v_n) est minorée par 0, et l'inégalité de droite montre qu'elle est décroissante. Donc, la réponse est : une suite décroissante et minorée converge, donc (v_n) converge.

3.a On pose $u_n = v_n - 3 \times 10^{21}$. Montrer que (u_n) est géométrique de raison 0,995.

$$u_{n+1} = v_{n+1} - 3 \times 10^{21} = 0,995v_n + 1,5 \times 10^{19} - 3 \times 10^{21}.$$

On réécrit $3 \times 10^{21} = 0,995 \times 3 \times 10^{21} + 0,005 \times 3 \times 10^{21} = 0,995 \times 3 \times 10^{21} + 1,5 \times 10^{19}$, donc $u_{n+1} = 0,995v_n + 1,5 \times 10^{19} - 0,995 \times 3 \times 10^{21} - 1,5 \times 10^{19} = 0,995(v_n - 3 \times 10^{21}) = 0,995 u_n$.

Donc, la réponse est : (u_n) est géométrique de raison 0,995 et de premier terme $u_0 = v_0 - 3 \times 10^{21} = 3 \times 10^{21}$.

3.b En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n = 3 \times 10^{21} (0,995^n + 1)$.

Le terme général d'une suite géométrique donne $u_n = u_0 \times 0,995^n = 3 \times 10^{21} \times 0,995^n$.

Or $u_n = v_n - 3 \times 10^{21}$, donc $v_n = u_n + 3 \times 10^{21} = 3 \times 10^{21} \times 0,995^n + 3 \times 10^{21}$. Donc, la réponse est $v_n = 3 \times 10^{21} (0,995^n + 1)$.

3.c En déduire la limite de (v_n) et interpréter le résultat.

Comme $-1 < 0,995 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,995^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,995^n + 1) = 1$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3 \times 10^{21} \times 1 = 3 \times 10^{21}$.

Dans le contexte : à force de désintégrations compensées, le nombre de noyaux de polonium présents se stabilise à long terme autour de 3×10^{21} noyaux.

4. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours le nombre de noyaux devient inférieur à $4,5 \times 10^{21}$.

On résout $v_n < 4,5 \times 10^{21} \iff 3 \times 10^{21} (0,995^n + 1) < 4,5 \times 10^{21} \iff 0,995^n + 1 < 1,5 \iff 0,995^n < 0,5$.

En appliquant le logarithme népérien (fonction strictement croissante) : $n \ln(0,995) < \ln(0,5)$; comme $\ln(0,995) < 0$, l'inégalité change de sens en divisant : $n > \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,995)}$.

La calculatrice donne $\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,995)} \approx 138,3$, donc le plus petit entier convenable est $n = 139$ (on vérifie que $v_{138} \approx 4,502 \times 10^{21}$ est encore supérieur au seuil, et $v_{139} \approx 4,495 \times 10^{21}$ est passé sous le seuil).

Donc, la réponse est : au bout de 139 jours.

5.a Un script Python nommé `noyaux(n)` initialise ' $V = 6*10^{21}$ ', une liste ' $L = [V]$ ', puis répète pour ' k ' de 0 à $n-1$ une mise à jour de ' V ' suivie de ' $L.append(V)$ '. Proposer deux façons différentes de compléter la ligne de mise à jour de ' V '.

$$\bullet V = 0.995*V + 1.5*10^{19}$$

$$\bullet V = 3*10^{21}*(0.995^{(k+1)} + 1)$$

5.b Pour quelle valeur de l'entier n l'appel noyaux(n) fournit-il les relevés quotidiens sur 52 semaines d'étude ?

52 semaines représentent $52 \times 7 = 364$ jours. Donc, la réponse est qu'il faut appeler noyaux(364).

Bac Terminale 2023 — Asie (jour 2)

1. On considère la liste L des termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 7 et de raison 3, du type $L = [7, 10, \dots, 2023]$. Déterminer le nombre de termes de cette liste.

Le terme de rang n (en indexant à partir de 1) de cette suite arithmétique s'écrit $7 + 3(n - 1)$. On cherche n tel que $7 + 3(n - 1) = 2023$.

$$3(n - 1) = 2016 \iff n - 1 = 672 \iff n = 673.$$

Donc, la réponse est **673 termes**.

2. On choisit au hasard un nombre de cette liste. Déterminer la probabilité de tirer un nombre pair.

Un terme de la liste s'écrit $7 + 3(n - 1) = 3n + 4$, pour n entier de 1 à 673. Ce nombre est pair si et seulement si $3n + 4$ est pair, c'est-à-dire si et seulement si $3n$ est pair, donc si et seulement si n est pair (3 étant impair).

Parmi les entiers n de 1 à 673 (673 valeurs), les entiers pairs sont 2, 4, ..., 672, soit 336 valeurs.

Donc, la réponse est $P(\text{nombre pair}) = \frac{336}{673}$.

3. On note A l'évènement « obtenir un multiple de 4 » et B l'évènement « obtenir un nombre dont le chiffre des unités est 6 », sachant que $P(A) = \frac{168}{673}$ et $P(A \cap B) = \frac{34}{673}$ (valeurs obtenues par dénombrement direct dans la liste). Donner la probabilité d'obtenir un multiple de 4 se terminant par 6.

Un nombre qui est à la fois un multiple de 4 et qui se termine par 6 est exactement un élément de $A \cap B$. Donc, la réponse est $P(A \cap B) = \frac{34}{673}$ (donnée directement par l'énoncé, qui correspond bien à un dénombrement des multiples de 4 de la liste se terminant par 6).

4. Sachant de plus que $P(\bar{A} \cap B) = \frac{505}{673} \times \frac{33}{505}$, calculer $P_B(A)$.

D'abord $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{34}{673} + \frac{505}{673} \times \frac{33}{505} = \frac{34}{673} + \frac{33}{673} = \frac{67}{673}$ (le facteur $\frac{505}{673}$ se simplifie avec le 505 du numérateur).

Par définition de la probabilité conditionnelle : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{34}{673}}{\frac{67}{673}} = \frac{34}{67}$.

Donc, la réponse est $P_B(A) = \frac{34}{67}$.

5. On choisit successivement et au hasard 10 nombres de la liste (un même nombre pouvant être choisi plusieurs fois). Déterminer la probabilité qu'aucun des 10 nombres tirés ne soit un multiple de 4.

La probabilité de ne pas tirer un multiple de 4 en un seul tirage vaut $P(\overline{A}) = 1 - \frac{168}{673} = \frac{505}{673}$.

Les 10 tirages sont indépendants et identiques (tirage avec remise) : la probabilité qu'aucun des 10 ne soit un multiple de 4 est donc $\left(\frac{505}{673}\right)^{10}$.

Donc, la réponse est $P \approx 0,057$ (au millième).

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

1. On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE trapèze rectangle en A, muni du repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ défini par $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$, avec de plus $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. On note I le milieu de $[EF]$ et J le milieu de $[AE]$. Donner les coordonnées de I et J.

Dans ce repère, les sommets du prisme ont pour coordonnées : A(0 ; 0 ; 0), B(4 ; 0 ; 0), C(4 ; 4 ; 0), D(0 ; 4 ; 0), E(0 ; 0 ; 8), F(4 ; 0 ; 4), G(4 ; 4 ; 4), H(0 ; 4 ; 8).

I est le milieu de $[EF]$, donc $I\left(\frac{0+4}{2} ; \frac{0+0}{2} ; \frac{8+4}{2}\right)$, soit **I(2 ; 0 ; 6)**.

J est le milieu de $[AE]$, donc $J\left(\frac{0+0}{2} ; \frac{0+0}{2} ; \frac{0+8}{2}\right)$, soit **J(0 ; 0 ; 4)**.

2.a Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).

$$\overrightarrow{IG} \begin{pmatrix} 4-2 \\ 4-0 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-0 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IGJ).}$$

Le repère étant orthonormé, on calcule les produits scalaires par les coordonnées : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IG} = -1 \times 2 + 1 \times 4 + 1 \times (-2) = -2 + 4 - 2 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IJ} = -1 \times (-2) + 1 \times 0 + 1 \times (-2) = 2 + 0 - 2 = 0$.

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IGJ) : c'est donc un vecteur normal à ce plan.

2.b Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).

Un vecteur normal étant $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, une équation du plan (IGJ) est de la forme $-x + y + z + d = 0$.

Le point G(4 ; 4 ; 4) appartient au plan, donc $-4 + 4 + 4 + d = 0$, soit $d = -4$.

Donc, la réponse est $-x + y + z - 4 = 0$.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d , perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.

La droite d est dirigée par le vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et passe par H(0 ; 4 ; 8), d'où la représentation

$$\text{paramétrique : } \begin{cases} x = -t \\ y = 4 + t \\ z = 8 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4. On note L le projeté orthogonal de H sur le plan (IGJ). Montrer que L a pour coordonnées $\left(\frac{8}{3} ; \frac{4}{3} ; \frac{16}{3}\right)$.

L est le point d'intersection de la droite d (perpendiculaire au plan et passant par H) avec le plan (IGJ). On cherche donc le paramètre t du point de d qui vérifie l'équation du plan.

$$-(-t) + (4 + t) + (8 + t) - 4 = 0 \iff 3t + 8 = 0 \iff t = -\frac{8}{3}.$$

En reportant dans la représentation paramétrique : $x = -\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$, $y = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$, $z = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$.

Donc, la réponse est L $\left(\frac{8}{3} ; \frac{4}{3} ; \frac{16}{3}\right)$.

5. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).

La distance de H au plan (IGJ) est la longueur HL, où L est le projeté orthogonal de H sur ce plan.

Le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} HL &= \sqrt{\left(\frac{8}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{16}{3} - 8\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{3 \times \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{64}{3}} = \\ &= \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Donc, la réponse est $HL = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

6. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.

$$\vec{IG} \cdot \vec{IJ} = 2 \times (-2) + 4 \times 0 + (-2) \times (-2) = -4 + 0 + 4 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{IG}$ et $\vec{IJ}$ sont non nuls et orthogonaux, donc les droites (IG) et (IJ), sécantes en I, sont perpendiculaires. Donc, la réponse est que le triangle IGJ est rectangle en I.

7. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

Le triangle IGJ étant rectangle en I, son aire vaut $\mathcal{A} = \frac{IG \times IJ}{2}$, avec $IG = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ et $IJ = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$$\mathcal{A} = \frac{2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}.$$

En prenant IGJ pour base et H comme sommet, la hauteur du tétraèdre est la distance HL calculée en question 5, soit $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. Le volume vaut donc $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times HL = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{4 \times 8 \times 3}{9} = \frac{96}{9} = \frac{32}{3}$.

Donc, la réponse est $V = \frac{32}{3}$ (soit environ **10,7** unités de volume, au dixième près).

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

Un biologiste modélise l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'individus) par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = e^3 - e^{-0,5t^2+t+2}$, où t désigne le temps en heures. **Affirmation 1 : « La population de bactéries augmente en permanence ». Vrai ou faux ?**

f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables. En posant $g(t) = -0,5t^2+t+2$, donc $g'(t) = -t+1$, on obtient $f'(t) = -g'(t)e^{g(t)} = (t-1)e^{-0,5t^2+t+2}$.

L'exponentielle étant strictement positive, $f'(t)$ est du signe de $(t-1)$: $f'(t) < 0$ sur $[0 ; 1[$ et $f'(t) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0 ; 1]$.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** : durant la première heure, la population diminue strictement.

Affirmation 2 : « À très long terme, la population dépassera 21 000 bactéries ». Vrai ou faux ?

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,5t^2+t+2} > 0$, donc $-e^{-0,5t^2+t+2} < 0$, d'où $f(t) = e^3 - e^{-0,5t^2+t+2} < e^3$.

Or $e^3 \approx 20,086$ (au millième près), donc $f(t)$ reste toujours strictement inférieur à environ 20,086 milliers d'individus, soit 20 086 bactéries.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** : la population ne dépassera jamais 20 086 bactéries, donc a fortiori jamais 21 000.

Affirmation 3 : « La population de bactéries atteindra un effectif de 10 000 individus à deux reprises au cours du temps ». Vrai ou faux ?

Un effectif de 10 000 bactéries correspond à $f(t) = 10$ (population exprimée en milliers). D'après l'étude de variations précédente, f est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$ puis strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

On calcule les valeurs utiles : $f(0) = e^3 - e^2 \approx 12,696$ et $f(1) = e^3 - e^{2,5} \approx 7,903$. De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,5t^2 + t + 2) = -\infty$ (le terme en t^2 l'emporte), donc par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,5t^2 + t + 2} = 0$, puis $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = e^3 \approx 20,086$.

Sur $[0 ; 1]$: f est continue et strictement décroissante, et 10 est compris strictement entre $f(1) \approx 7,903$ et $f(0) \approx 12,696$, donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 10$ admet une unique solution sur cet intervalle.

Sur $[1 ; +\infty[$: f est continue et strictement croissante, et 10 est compris strictement entre $f(1) \approx 7,903$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \approx 20,086$, donc l'équation $f(t) = 10$ admet là aussi une unique solution.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie** : l'équation $f(t) = 10$ admet exactement deux solutions sur $[0 ; +\infty[$, donc la population atteindra bien 10 000 individus à deux reprises.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A — 1. On définit f sur $] -1,5 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x + 3) - 1$, et $g(x) = f(x) - x$. Déterminer la limite de g en $-1,5$ (on admet que sa limite en $+\infty$ est $-\infty$).

Quand $x \rightarrow -1,5^+$, $2x + 3 \rightarrow 0^+$ (car $x > -1,5$), et $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow -1,5} \ln(2x + 3) = -\infty$.

De plus $-1 - x \rightarrow -1 - (-1,5) = 0,5$ quand $x \rightarrow -1,5$, donc par somme $\lim_{x \rightarrow -1,5} g(x) = -\infty$.

Partie A — 2. Étudier les variations de g sur $] -1,5 ; +\infty[$.

$g(x) = \ln(2x + 3) - 1 - x$ est dérivable sur $] -1,5 ; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$g'(x) = \frac{2}{2x + 3} - 1 = \frac{2 - (2x + 3)}{2x + 3} = \frac{-2x - 1}{2x + 3}.$$

Sur $] -1,5 ; +\infty[$, $2x + 3 > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $-2x - 1$, qui s'annule en $x = -0,5$: $g'(x) > 0$ sur $] -1,5 ; -0,5[$ et $g'(x) < 0$ sur $] -0,5 ; +\infty[$.

g est donc strictement croissante sur $] -1,5 ; -0,5[$ puis strictement décroissante sur $] -0,5 ; +\infty[$, avec un maximum en $x = -0,5$.

Partie A — 3.a Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -0,5 ; +\infty[$.

Sur $] -0,5 ; +\infty[$, g est continue (car dérivable) et strictement décroissante.

$g(-0,5) = \ln(2 \times (-0,5) + 3) - 1 - (-0,5) = \ln(2) - 0,5 \approx 0,193$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ (admis).

0 est bien compris entre $g(-0,5) \approx 0,193$ et cette limite : d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à une fonction strictement monotone, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -0,5 ; +\infty[$.

Partie A — 3.b Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

À la calculatrice, $g(0,2) \approx 0,024 > 0$ et $g(0,3) \approx -0,019 < 0$, donc $0,2 < \alpha < 0,3$.

En affinant, $g(0,25) \approx 0,003 > 0$ et $g(0,26) \approx -0,002 < 0$, donc $0,25 < \alpha < 0,26$.

Partie B — 1. On admet que f est strictement croissante sur $] -1,5 ; +\infty[$. Montrer que si $x \in [-1 ; \alpha]$ alors $f(x) \in [-1 ; \alpha]$.

f est strictement croissante sur $] -1,5 ; +\infty[$, donc en particulier sur $[-1 ; \alpha]$: si $-1 \leq x \leq \alpha$, alors $f(-1) \leq f(x) \leq f(\alpha)$.

Or $g(\alpha) = 0$ signifie $f(\alpha) - \alpha = 0$, donc $f(\alpha) = \alpha$. Et $f(-1) = \ln(2 \times (-1) + 3) - 1 = \ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$.

On obtient donc $-1 \leq f(x) \leq \alpha$, c'est-à-dire $f(x) \in [-1 ; \alpha]$.

Partie B — 2.a Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ (avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$).

Initialisation. $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = \ln(3) - 1 \approx 0,099$. Comme $\alpha \in]0,25 ; 0,26[$, on a bien $-1 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$: la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité. Supposons que, pour un entier naturel n fixé, $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

f étant croissante sur $[-1 ; \alpha]$ (question B.1), on en déduit $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha)$, c'est-à-dire $-1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ (car $f(-1) = -1$ et $f(\alpha) = \alpha$) : la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. La propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire, donc, par principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

Partie B — 2.b En déduire que la suite (u_n) converge.

D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante (car $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n) et majorée par α : elle **converge** donc, d'après le théorème de la limite monotone.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1.a La figure représente une maison cubique ABCDEFGH accolée à un garage cubique BIJKLMNO (L milieu de [BF], K milieu de [BC]), surmonté d'un toit pyramidal LMNOP dont le sommet P est sur la façade de la maison. Dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{AE}$, donner par lecture graphique les coordonnées de H, M et N.

Par lecture directe sur la figure : $H(0 ; 2 ; 2)$, $M(3 ; 0 ; 1)$ et $N(3 ; 1 ; 1)$.

1.b Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM) .

$$\overrightarrow{HM} \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dirige la droite } (HM), \text{ qui passe par } H(0 ; 2 ; 2).$$

$$\text{Donc, la réponse est : } \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. L'architecte place P à l'intersection de (HM) et du plan (BCF) . Montrer que $P\left(2 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$.

Les points $B(2 ; 0 ; 0)$, $C(2 ; 2 ; 0)$ et $F(2 ; 0 ; 2)$ ont tous pour abscisse 2 : le plan (BCF) est parallèle au plan (yOz) et a pour équation $x = 2$.

Cherchons le paramètre t tel que le point de (HM) de paramètre t appartienne à ce plan : $3t = 2$, soit $t = \frac{2}{3}$.

On obtient alors $x = 2$, $y = 2 - 2 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ et $z = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Donc, la réponse est $P\left(2 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$, ce qui confirme le résultat annoncé.

3.a Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$.

$$\overrightarrow{PM} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-\frac{2}{3} \\ 1-\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{PN} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-\frac{2}{3} \\ 1-\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Le repère étant orthonormé, $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 1 \times 1 + \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Donc, la réponse est $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = \frac{8}{9}$.

3.b Calculer la distance PM (on admet que $PN = \frac{\sqrt{11}}{3}$).

$$PM = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

Donc, la réponse est $PM = \frac{\sqrt{14}}{3}$.

3.c Le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55° . Le toit pourra-t-il être construit ?

On sait que $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = PM \times PN \times \cos(\widehat{MPN})$, donc $\frac{8}{9} = \frac{\sqrt{14}}{3} \times \frac{\sqrt{11}}{3} \times \cos(\widehat{MPN})$.

D'où $\cos(\widehat{MPN}) = \frac{8}{\sqrt{14} \times \sqrt{11}} = \frac{8}{\sqrt{154}}$, ce qui donne $\widehat{MPN} \approx 50^\circ$ à la calculatrice.

Comme 50° ne dépasse pas 55° , donc, la réponse est : **le toit pourra être construit**.

4. Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes, et déterminer leur point d'intersection.

Les droites (EH) et (MN) sont parallèles (elles sont chacune dirigées par $\vec{j}$, d'après la construction du garage et du toit), donc les droites (HM) et (EN) , qui relient ces deux droites parallèles par des points distincts, sont coplanaires ; comme elles ne sont pas parallèles (leurs vecteurs directeurs $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EN}$ ne sont pas colinéaires), elles sont donc sécantes.

$E(0 ; 0 ; 2)$ et $N(3 ; 1 ; 1)$ donnent $\overrightarrow{EN} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc (EN) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3t' \\ y = t' \\ z = 2 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

En égalant les deux représentations paramétriques (avec t pour (HM)) : $3t = 3t'$, $2 - 2t = t'$ et $2 - t = 2 - t'$. La première et la troisième équation donnent $t = t'$; en reportant dans la deuxième, $2 - 2t = t$, soit $3t = 2$, donc $t = t' = \frac{2}{3}$.

Donc, la réponse est : les droites (HM) et (EN) se coupent au point $\mathbf{P}$, déjà déterminé à la question 2.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 1)

Partie A — 1. Un télévendeur relance une personne au premier appel : la probabilité qu'elle ne décroche pas vaut 0,6, et si elle décroche, la probabilité qu'elle achète vaut 0,3. Si elle n'a pas décroché, on tente un second appel : la probabilité qu'elle ne décroche toujours pas vaut 0,3, et si elle décroche cette fois, la probabilité d'achat vaut 0,2. On note D_1 , D_2 et A les événements « décroche au 1er appel », « décroche au 2e appel » et « achète le produit ». Compléter l'arbre pondéré.

L'arbre comporte deux niveaux : sur la première branche, $P(D_1) = 0,4$ et $P(\overline{D_1}) = 0,6$, avec $P_{D_1}(A) = 0,3$ et $P_{D_1}(\overline{A}) = 0,7$; sur la seconde branche (issue de $\overline{D_1}$), $P_{\overline{D_1}}(D_2) = 0,7$ et $P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) = 0,3$, avec $P_{\overline{D_1} \cap D_2}(A) = 0,2$ et $P_{\overline{D_1} \cap D_2}(\overline{A}) = 0,8$.

Partie A — 2. En utilisant l'arbre, montrer que $P(A) = 0,204$.

D'après la formule des probabilités totales, l'achat se produit soit dès le premier appel, soit après le second : $P(A) = P(D_1 \cap A) + P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap A) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \times 0,2 = 0,12 + 0,084 = \mathbf{0,204}$.

Partie A — 3. Sachant que la personne a acheté le produit, quelle est la probabilité qu'elle ait décroché dès le premier appel ?

Il s'agit de calculer $P_A(D_1) = \frac{P(D_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{0,4 \times 0,3}{0,204} = \frac{0,12}{0,204} \approx \mathbf{0,588}$.

Partie B — 1.a On prélève un échantillon aléatoire de 30 personnes ; X compte le nombre d'entre elles qui achètent le produit (on admet l'indépendance des situations). Donner, sans justification, la loi suivie par X et ses paramètres.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,204$.

Partie B — 1.b Déterminer, au millième près, la probabilité que 6 personnes exactement de l'échantillon achètent le produit.

$$P(X = 6) = \binom{30}{6} \times 0,204^6 \times (1 - 0,204)^{30-6} \approx \mathbf{0,179}.$$

Partie B — 1.c Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

$E(X) = np = 30 \times 0,204 = \mathbf{6,12}$. Cela signifie que, sur un grand nombre d'échantillons de 30 personnes contactées, le nombre d'acheteurs est en moyenne de 6,12 par échantillon.

Partie B — 2. Pour un échantillon de n personnes, déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins une personne achète le produit soit supérieure ou égale à 0,99.

Notons toujours X le nombre d'acheteurs parmi les n personnes, de loi binomiale de paramètres n et $p = 0,204$. On veut le plus petit n tel que $P(X \geq 1) \geq 0,99$, c'est-à-dire $1 - P(X = 0) \geq 0,99$, soit $P(X = 0) \leq 0,01$.

Or $P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,204^0 \times (1 - 0,204)^n = 0,796^n$. L'inéquation devient $0,796^n \leq 0,01$.

En passant au logarithme népérien (croissant) : $n \ln(0,796) \leq \ln(0,01)$, puis, comme $\ln(0,796) < 0$, on divise en changeant le sens de l'inégalité : $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)} \approx 20,18$.

Le plus petit entier convenable est donc $n = 21$ (on vérifie que $n = 20$ donne $P(X \geq 1) \approx 0,9896 < 0,99$, tandis que $n = 21$ donne $P(X \geq 1) \approx 0,9917 \geq 0,99$).

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 1)

1. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$, deux fois dérivable, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

En 0 : on écrit $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + 1 - 0 = 1$.

En $+\infty$: on factorise, $f(x) = x(3 - 2 \ln(x)) + 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2 \ln(x)) = -\infty$, et donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(3 - 2 \ln(x)) = -\infty$. On en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2.a Démontrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 1 - 2 \ln(x)$.

En dérivant chaque terme : $f'(x) = 3 - 2 \ln(x) - 2x \times \frac{1}{x} = 3 - 2 \ln(x) - 2 = 1 - 2 \ln(x)$.

2.b Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$, en faisant apparaître les limites et la valeur exacte de l'extremum.

On résout $f'(x) > 0 \iff 1 - 2 \ln(x) > 0 \iff \ln(x) < \frac{1}{2} \iff x < e^{\frac{1}{2}}$ (la fonction exponentielle étant strictement croissante). Donc f' est strictement positive sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}[$ et strictement négative sur $]e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}[$ puis strictement décroissante sur $]e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$, avec un maximum en $x = e^{\frac{1}{2}}$ valant $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - 2e^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - e^{\frac{1}{2}} = 2e^{\frac{1}{2}} + 1 \approx 4,3$.

Le tableau de variation part de la limite 1 en 0, croît jusqu'au maximum $2e^{\frac{1}{2}} + 1$ en $x = e^{\frac{1}{2}}$, puis décroît vers $-\infty$.

3.a Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable, donc continue, sur $]0 ; +\infty[$.

Sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}]$, f est strictement croissante et sa valeur minimale y est $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 > 0$: f y est donc strictement positive, et l'équation $f(x) = 0$ n'y a pas de solution.

Sur $[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, passant de la valeur $2e^{\frac{1}{2}} + 1 > 0$ à $-\infty$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ y admet une unique solution, notée α .

Donc, la réponse est que $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$, avec $\alpha > e^{\frac{1}{2}}$.

3.b En déduire le signe de f sur $]0 ; +\infty[$.

D'après les variations de f et le résultat précédent : $f(x) > 0$ sur $]0 ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, et $f(x) < 0$ sur $] \alpha ; +\infty[$.

4. Soit F une primitive quelconque de f sur $]0 ; +\infty[$. Peut-on affirmer que F est strictement décroissante sur $[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$?

Non. Par définition d'une primitive, $F' = f$. Or f est strictement positive sur $[e^{\frac{1}{2}} ; \alpha[$ (question 3.b), donc F est strictement croissante sur cet intervalle, ce qui contredit l'affirmation proposée : F n'est pas décroissante sur tout $[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$.

5.a Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes.

La dérivée seconde vaut $f''(x) = -2 \times \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$, strictement négative sur $]0 ; +\infty[$. La fonction f est donc **concave** sur cet intervalle, ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **en dessous de** chacune de ses tangentes.

5.b Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

On a $f(1) = 3 \times 1 + 1 - 2 \times 1 \times \ln(1) = 4 - 0 = 4$ et $f'(1) = 1 - 2\ln(1) = 1$.

L'équation de la tangente en un point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, donc ici $y = 1 \times (x - 1) + 4$, soit $T : y = x + 3$.

5.c En déduire que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$.

Puisque $\mathcal{C}_f$ est sous chacune de ses tangentes (question 5.a), elle est en particulier sous T : pour tout $x > 0$, $f(x) \leq x + 3$.

Cette inégalité s'écrit $3x + 1 - 2x \ln(x) \leq x + 3$, soit $2x - 2 \leq 2x \ln(x)$. En divisant par $2x > 0$: $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x)$.

Donc, la réponse est que pour tout réel x strictement positif, $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 1)

1. ABCDEFGH est un cube d'arête 1, M est le centre de la face BCGF et N le centre de la face EFGH. Dans le repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$, donner sans justification les coordonnées de F et de C.

En suivant les arêtes du cube depuis D : $F(1; 1; 1)$ et $C(0; 1; 0)$.

2. Calculer les coordonnées de M et de N.

M est le centre de la face BCGF, donc le milieu du segment $[CF]$ (l'une des diagonales de cette face carrée) : $M\left(\frac{0+1}{2} ; \frac{1+1}{2} ; \frac{0+1}{2}\right)$, soit $M\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$.

N est le centre de la face EFGH, donc le milieu du segment $[FH]$, avec $H(1; 0; 0)$: $N\left(\frac{1+1}{2} ; \frac{1+0}{2} ; \frac{1+0}{2}\right)$, soit $N\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

3.a Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (HFC).

Les points H, F, C ne sont pas alignés, donc $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{CF}$ dirigent le plan (HFC), avec $\overrightarrow{HF} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (en utilisant $H(1; 0; 0)$).

De plus, avec $A(0; 0; 1)$ et $G(1; 1; 0)$, on a $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On calcule les produits scalaires : $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{HF} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CF} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 1 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (HFC) : **il est normal à ce plan.**

3.b En déduire une équation cartésienne du plan (HFC).

Le plan (HFC) passe par $F(1; 1; 1)$ et admet $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal : un point $X(x; y; z)$ appartient à ce plan si et seulement si $\overrightarrow{FX} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$.

$$\overrightarrow{FX} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{FX} \cdot \overrightarrow{AG} = (x-1) + (y-1) - (z-1) = x + y - z - 1.$$

Le plan (HFC) a donc pour équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).

La droite (AG) passe par A(0;0;1) et admet $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur, d'où la représen-

$$\text{tation paramétrique : } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

5. Démontrer que le point R de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal de G sur le plan (HFC).

Le projeté orthogonal de G sur (HFC), qu'on note R, est l'unique point qui appartient à la fois au plan (HFC) et à la droite passant par G orthogonale à ce plan — or cette droite est justement (AG), puisque $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (question 3.a).

Les coordonnées de R vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de (AG) et l'équation du plan : $t + t - (1 - t) - 1 = 0$, soit $3t - 2 = 0$, donc $t = \frac{2}{3}$.

En reportant dans la représentation paramétrique : $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. On retrouve bien les coordonnées annoncées : **R est le projeté orthogonal de G sur (HFC).**

6. La droite (FG) admet pour représentation paramétrique $x = 1$, $y = 1$, $z = t$ ($t \in \mathbb{R}$). Démontrer qu'il existe un unique point K de (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.

Un point K de (FG) s'écrit $K(1;1;t)$. Le triangle KMN est rectangle en K si et seulement si $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KN} = 0$.

$$\text{Avec } M\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) : \overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} - t \end{pmatrix}. \text{ Avec } N\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) : \overrightarrow{KN} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - t \end{pmatrix}.$$

$$\text{Le produit scalaire vaut } \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KN} = 0 + 0 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Cette expression s'annule si et seulement si $t = \frac{1}{2}$: il existe donc un **unique** point K, de coordonnées $\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$, tel que KMN soit rectangle en K.

7. Quelle fraction du volume du cube ABCDEFGH le volume du tétraèdre FNKM représente-t-il ?

Le tétraèdre FNKM admet pour base le triangle rectangle KMN et pour hauteur associée la distance FK, puisque $F(1; 1; 1)$ et $K\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$ ont la même abscisse et la même ordonnée : $FK = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Dans le triangle KMN rectangle en K : $KM = \left\|\overrightarrow{KM}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 0^2} = \frac{1}{2}$ et de même $KN = \frac{1}{2}$. Son aire vaut donc $\frac{KM \times KN}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$.

Le volume d'un tétraèdre étant $\frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$, celui de FNKM vaut $\frac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{48}$.

Le cube ayant pour volume $1^3 = 1$ (unité de volume), le tétraèdre FNKM représente donc $\frac{1}{48}$ du volume du cube.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 2)

Partie A — 1. Un vendeur de matelas propose deux modèles : RESSORTS et MOUSSE, chaque client n'achetant qu'un seul matelas. On sait que 20 % des clients choisissent un matelas RESSORTS, que 90 % d'entre eux sont satisfaits, et que 82 % de l'ensemble des clients sont satisfaits. On note R l'évènement « le client a acheté un matelas RESSORTS » et S « le client est satisfait ». Compléter l'arbre pondéré décrivant la situation.

L'arbre comporte deux branches initiales $P(R) = 0,2$ et $P(\bar{R}) = 0,8$, puis sur la branche R : $P_R(S) = 0,9$ et $P_R(\bar{S}) = 0,1$; sur la branche $\bar{R}$: $P_{\bar{R}}(S) = x$ et $P_{\bar{R}}(\bar{S}) = 1 - x$, où x désigne la probabilité d'être satisfait sachant que le matelas n'est pas de type RESSORTS.

Partie A — 2. Montrer que $x = 0,8$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée à l'évènement S : $P(S) = P(R \cap S) + P(\bar{R} \cap S)$.

Or $P(R \cap S) = P(R) \times P_R(S) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$ et $P(\bar{R} \cap S) = P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(S) = 0,8x$.

Comme $P(S) = 0,82$, on obtient l'équation $0,18 + 0,8x = 0,82$, soit $0,8x = 0,64$, d'où $x = 0,8$.

Partie A — 3. Un client s'avère satisfait de son achat. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS (résultat arrondi au centième) ?

Il s'agit de calculer $P_S(R) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{0,18}{0,82} = \frac{9}{41} \approx \mathbf{0,22}$.

Partie B — 1.a On interroge 5 clients au hasard et X compte le nombre de clients satisfaits parmi eux. On admet que X suit une loi binomiale : donner ses paramètres.

Chaque client interrogé est soumis à une épreuve à deux issues (satisfait ou non, avec probabilité 0,82 de succès), les 5 tirages étant indépendants : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,82$.

Partie B — 1.b Déterminer la probabilité qu'au maximum trois des cinq clients soient satisfaits (résultat arrondi au millième).

À la calculatrice : $P(X \leq 3) \approx 0,222$.

Partie B — 2.a Soit n un entier naturel non nul. On interroge maintenant n clients, ce choix étant assimilable à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits. Montrer que $p_n = 0,82^n$.

Chaque client est satisfait de façon indépendante avec la probabilité 0,82. La probabilité que les n clients le soient tous est donc le produit de n facteurs égaux à 0,82, c'est-à-dire $p_n = 0,82^n$.

Partie B — 2.b Déterminer les entiers naturels n tels que $p_n < 0,01$, puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

On résout dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0,82^n < 0,01$. En passant au logarithme népérien (croissant) : $n \ln(0,82) < \ln(0,01)$.

Comme $\ln(0,82) < 0$, l'inégalité change de sens en divisant : $n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,82)} \approx 23,2$.

Le plus petit entier convenable est donc $n = 24$: dès que l'on interroge au moins 24 clients, la probabilité qu'ils soient tous satisfaits devient inférieure à 1 %.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 2)

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère le point $A(1; 1; 0)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, ainsi que la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Déterminer une représentation paramétrique de (d) .

Un point $M(x; y; z)$ appartient à (d) si et seulement si $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ pour un certain réel t , ce qui

donne la représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 4y + 2z + 1 = 0$. Justifier que la droite (d) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un point B de coordonnées $(1; -1; 1)$.

En substituant les coordonnées paramétriques de (d) dans l'équation de $\mathcal{P}$: $1 + 4(1 + 2t) + 2(-t) + 1 = 0$, soit $1 + 4 + 8t - 2t + 1 = 0$, c'est-à-dire $6t + 6 = 0$, d'où $t = -1$.

En reportant $t = -1$ dans la représentation paramétrique de (d) : $x = 1$, $y = 1 - 2 = -1$, $z = 1$. Le système admet donc une unique solution, ce qui montre que (d) et $\mathcal{P}$ sont sécants, au point B(1 ; -1 ; 1).

3.a On considère le point C(1 ; -1 ; -1). Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ont la même première et la même deuxième coordonnée mais des troisièmes coordonnées différentes ($1 \neq -1$) : ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et définissent bien un plan (ABC).

3.b Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

On calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 0 + 0 \times (-2) + 0 \times 1 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 0 + 0 \times (-2) + 0 \times (-1) = 0$. Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il lui est normal.

3.c Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Le plan (ABC) admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal, donc une équation de la forme $x + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$. Comme A(1 ; 1 ; 0) appartient au plan : $1 + d = 0$, soit $d = -1$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $x - 1 = 0$.

4.a Justifier que le triangle ABC est isocèle en A.

On a $AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 0^2 + (-2)^2 + 1^2 = 5$ et $AC^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2 = 5$. Donc $AB^2 = AC^2$, c'est-à-dire $AB = AC$: le triangle ABC est isocèle en A.

4.b Soit H le milieu du segment [BC]. Calculer la longueur AH puis l'aire du triangle ABC.

Les coordonnées de H sont la moyenne de celles de B et C : $H \left(\frac{1+1}{2} ; \frac{-1-1}{2} ; \frac{1-1}{2} \right)$, soit H(1 ; -1 ; 0).

On obtient $AH^2 = (1-1)^2 + (-1-1)^2 + (0-0)^2 = 4$, d'où $AH = 2$.

Le triangle ABC étant isocèle en A, la médiane issue de A est aussi la hauteur relative au côté [BC], donc $\mathcal{A}(\text{ABC}) = \frac{\text{BC} \times \text{AH}}{2}$. Or $\text{BC}^2 = (1-1)^2 + (-1+1)^2 + (-1-1)^2 = 4$, d'où $\text{BC} = 2$.

Donc, la réponse est $\mathcal{A}(\text{ABC}) = \frac{2 \times 2}{2} = 2$ unité d'aire.

5.a Soit D le point de coordonnées (0 ; -1 ; 1). Montrer que la droite (BD) est une hauteur de la pyramide ABCD.

On calcule $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BD} = -\vec{n}$. Comme $\vec{n}$ est normal au plan (ABC), $\overrightarrow{BD}$ l'est aussi : la droite (BD), orthogonale au plan de base (ABC) et passant par le sommet D, est donc bien une hauteur de la pyramide ABCD.

5.b En déduire le volume de la pyramide ABCD (on rappelle que le volume d'une pyramide vaut $V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée).

On prend pour base le triangle (ABC), d'aire $\mathcal{A}(\text{ABC}) = 2$, et pour hauteur la longueur BD.

$\text{BD}^2 = \|\overrightarrow{BD}\|^2 = (-1)^2 + 0^2 + 0^2 = 1$, donc $\text{BD} = 1$.

Donc, la réponse est $V(\text{ABCD}) = \frac{1}{3} \times 2 \times 1 = \frac{2}{3}$ unité de volume.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 2)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^x$. Le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = -\frac{73}{100}$ est : **a. 0 — **b.** 1 — **c.** 2 — **d.** une infinité.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, avec $f'(x) = 2e^x + 2xe^x = 2e^x(1+x)$, du signe de $1+x$.

f est donc strictement décroissante sur $] -\infty ; -1]$ et strictement croissante sur $[-1 ; +\infty[$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et $f(-1) = -2e^{-1} \approx -0,736$.

Sur $] -\infty ; -1]$, f est continue et strictement décroissante de 0 (limite, exclue) à $f(-1) \approx -0,736$: comme $-0,736 < -0,73 < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure une unique solution sur cet intervalle.

Sur $[-1 ; +\infty[$, f est continue et strictement croissante de $f(-1) \approx -0,736$ à $+\infty$: comme $-0,736 < -0,73 < +\infty$, on obtient de même une unique solution sur cet intervalle.

Donc, la réponse est **c** : l'équation admet exactement 2 solutions sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x+1}{e^x}$. La limite de g en $-\infty$ est :
****a.** $-\infty$ — **b.** $+\infty$ — **c.** 0 — **d.** elle n'existe pas.**

On écrit $g(x) = (x+1) \times \frac{1}{e^x}$.

Quand $x \rightarrow -\infty$: $x+1 \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{e^x} = e^{-x} \rightarrow +\infty$.

Donc, la réponse est **a** : par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (4x-16)e^{2x}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_h$. On peut affirmer que : **a. h est convexe sur $\mathbb{R}$ — **b.** $\mathcal{C}_h$ a un point d'inflexion en $x = 3$ — **c.** h est concave sur $\mathbb{R}$ — **d.** $\mathcal{C}_h$ a un point d'inflexion en $x = 3,5$.**

h est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont. On calcule $h'(x) = 4e^{2x} + 2(4x-16)e^{2x} = e^{2x}(8x-28)$.

En dérivant à nouveau : $h''(x) = 2e^{2x}(8x-28) + 8e^{2x} = e^{2x}(16x-56+8) = e^{2x}(16x-48) = 16e^{2x}(x-3)$.

Comme $e^{2x} > 0$ pour tout réel x , le signe de $h''(x)$ est celui de $x-3$: h'' s'annule en changeant de signe en $x = 3$, donc la courbe $\mathcal{C}_h$ admet un unique point d'inflexion, d'abscisse $x = 3$.

Donc, la réponse est **b**.

4. On considère la fonction k définie sur $]0 ; +\infty[$ par $k(x) = 3 \ln(x) - x$, de courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé, et T la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x = e$. Une équation de T est : **a. $y = (3-e)x$ — **b.** $y = \left(\frac{3-e}{e}\right)x$ — **c.** $y = \left(\frac{3}{e} - 1\right)x + 1$ — **d.** $y = (e-1)x + 1$.**

k est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ avec $k'(x) = \frac{3}{x} - 1$. On a $k(e) = 3 \ln(e) - e = 3 - e$ et $k'(e) = \frac{3}{e} - 1 = \frac{3-e}{e}$.

L'équation de T s'écrit $y = k(e) + k'(e)(x-e) = (3-e) + \frac{3-e}{e}(x-e) = \frac{3-e}{e}x - (3-e) + (3-e) = \frac{3-e}{e}x$.

Donc, la réponse est **b** (la droite T passe par l'origine).

5. On considère l'équation $[\ln(x)]^2 + 10 \ln(x) + 21 = 0$, d'inconnue $x \in]0 ; +\infty[$. Le nombre de solutions de cette équation est : **a. 0 — **b.** 1 — **c.** 2 — **d.** une infinité.**

On pose $X = \ln(x)$: l'équation devient $X^2 + 10X + 21 = 0$, un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 10^2 - 4 \times 21 = 100 - 84 = 16 = 4^2 > 0$, qui admet donc deux racines réelles distinctes.

Ces racines sont $X_1 = \frac{-10-4}{2} = -7$ et $X_2 = \frac{-10+4}{2} = -3$.

Chaque valeur de X correspond à une unique valeur de $x = e^X$ (la fonction exponentielle étant une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0 ; +\infty[$), donc $x_1 = e^{-7}$ et $x_2 = e^{-3}$ sont les deux solutions distinctes de l'équation initiale.

Donc, la réponse est **c**.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 1)

1. On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8 \ln(x)$. Déterminer la limite de f en 0.

Quand $x \rightarrow 0$ avec $x > 0$, $x^2 \rightarrow 0$ et $\ln(x) \rightarrow -\infty$, donc $-8 \ln(x) \rightarrow +\infty$: par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

2. En utilisant l'écriture $f(x) = x^2 \left(1 - 8 \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$ pour $x > 0$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (a fortiori, puisque $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$ et que $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$), donc $1 - 8 \frac{\ln(x)}{x^2} \rightarrow 1$.

Comme $x^2 \rightarrow +\infty$, par produit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Montrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et $f'(x) = 2x - 8 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2}{x} - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x} = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$.

4. Étudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations complet (en précisant la valeur exacte du minimum).

On factorise : $f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$. Sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$ et $x+2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $(x-2)$.

$f'(x) < 0$ sur $]0 ; 2[$ et $f'(x) > 0$ sur $]2 ; +\infty[$: f est donc strictement décroissante sur $]0 ; 2]$ puis strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.

f admet donc un minimum en $x = 2$, qui vaut $f(2) = 2^2 - 8 \ln(2) = 4 - 8 \ln(2)$.

Le tableau de variations part de $+\infty$ en 0, décroît jusqu'au minimum $4 - 8 \ln(2)$ en $x = 2$, puis croît vers $+\infty$.

5. Démontrer que, sur $]0 ; 2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α (sans chercher sa valeur).

Numériquement, $4 - 8 \ln(2) \approx -1,545 < 0$: le minimum de f est strictement négatif, donc f s'annule bien quelque part sur $]0 ; 2]$.

f est dérivable donc continue sur $]0 ; 2]$, et strictement décroissante sur cet intervalle. Elle prend une valeur qui tend vers $+\infty$ en 0 et vaut $4 - 8 \ln(2) < 0$ en 2, donc elle change de signe une seule fois.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à une fonction continue et strictement monotone, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; 2]$.

6. On admet que, sur $[2 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β . En déduire le signe de f sur $]0 ; +\infty[$.

Puisque f est strictement décroissante sur $]0 ; 2]$ et s'annule en α , elle est positive avant α et négative entre α et 2. Puisque f est strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$ et s'annule en β , elle reste négative entre 2 et β puis positive après β . Donc, la réponse est : $f(x) > 0$ sur $]0 ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, $f(x) < 0$ sur $] \alpha ; \beta[$, $f(\beta) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $] \beta ; +\infty[$.

7. Pour tout réel k , on définit g_k sur $]0 ; +\infty[$ par $g_k(x) = x^2 - 8 \ln(x) + k$. Déterminer, à l'aide du tableau de variations de f , la plus petite valeur de k pour laquelle g_k reste positive sur $]0 ; +\infty[$.

On remarque que $g_k(x) = f(x) + k$ pour tout x : g_k a donc les mêmes variations que f , translatées de k .

Le minimum de g_k sur $]0 ; +\infty[$ vaut donc $4 - 8 \ln(2) + k$, atteint en $x = 2$ comme pour f .

g_k est positive ou nulle sur tout l'intervalle si et seulement si ce minimum est positif ou nul : $4 - 8 \ln(2) + k \geq 0 \iff k \geq 8 \ln(2) - 4$.

Donc, la réponse est : la plus petite valeur qui convient est $k = 8 \ln(2) - 4$.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 1)

Partie A — 1. Une entreprise modélise le nombre de questions (en centaines) posées chaque mois sur sa FAQ par la suite (u_n) définie par $u_1 = 3$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3$ (90 % des questions du mois précédent sont conservées, et 130 nouvelles questions s'ajoutent). Calculer u_2 et u_3 , et interpréter.

$$u_2 = 0,9 \times u_1 + 1,3 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 2,7 + 1,3 = 4 \text{ et } u_3 = 0,9 \times u_2 + 1,3 = 0,9 \times 4 + 1,3 = 3,6 + 1,3 = 4,9.$$

Comme u_n représente un nombre de questions en centaines, on peut estimer à **400 questions le 2^e mois** et à **490 questions le 3^e mois**.

Partie A — 2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$.

Initialisation. Pour $n = 1$: $13 - \frac{100}{9} \times 0,9^1 = 13 - \frac{90}{9} = 13 - 10 = 3 = u_1$. La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité. Supposons que, pour un entier $n \geq 1$, $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$. Alors $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3 = 0,9 \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n \right) + 1,3 = 11,7 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} + 1,3 = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1}$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire à partir de ce rang : d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$.

Partie A — 3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout $n \geq 1$: $u_{n+1} - u_n = \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} \right) - \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n \right) = \frac{100}{9} \times 0,9^n \times (1 - 0,9) = \frac{100}{9} \times 0,9^n \times 0,1$. Cette quantité est strictement positive car $0,9^n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$: la suite (u_n) est croissante.

Partie A — 4. Le script Python ci-dessous renvoie le plus petit rang n tel que u_n dépasse un seuil 'p' donné. Recopier ce script.

- def seuil(p) :
- n = 1
- u = 3
- while u <= p :
- n = n + 1
- u = 0.9 * u + 1.3
- return n

Partie A — 4 (suite). Déterminer la valeur renvoyée par 'seuil(8.5)' et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

'seuil(8.5)' renvoie le plus petit rang n tel que $u_n > 8,5$. On résout : $u_n > 8,5 \iff 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n > 8,5 \iff \frac{100}{9} \times 0,9^n < 4,5 \iff 0,9^n < \frac{4,5 \times 9}{100} = 0,405$.

Par stricte décroissance de $\ln$: $n \ln(0,9) < \ln(0,405)$, et comme $\ln(0,9) < 0$, cela équivaut à $n > \frac{\ln(0,405)}{\ln(0,9)}$.

Or $\frac{\ln(0,405)}{\ln(0,9)} \approx 8,58$, donc le plus petit entier n qui convient est 9. Donc, la réponse est : 'seuil(8.5)' renvoie **9**, ce qui signifie que c'est le 9^e mois où le nombre de questions dépasse 850.

Partie B — 1. Une seconde modélisation utilise la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = 9 - 6e^{-0,19(n-1)}$. Donner les valeurs de v_1 et v_2 arrondies au centième.

$$v_1 = 9 - 6e^0 = 9 - 6 = 3 \text{ et } v_2 = 9 - 6e^{-0,19} \approx 9 - 6 \times 0,8270 \approx 9 - 4,962 \approx 4,04.$$

Partie B — 2. Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$.

$$v_n > 8,5 \iff 9 - 6e^{-0,19(n-1)} > 8,5 \iff 6e^{-0,19(n-1)} < 0,5 \iff e^{-0,19(n-1)} < \frac{0,5}{6}.$$

Par stricte croissance de $\ln$: $-0,19(n-1) < \ln\left(\frac{0,5}{6}\right)$, soit $n-1 > -\frac{1}{0,19} \ln\left(\frac{0,5}{6}\right)$ (le sens s'inverse car on divise par $-0,19 < 0$), donc $n > 1 - \frac{1}{0,19} \ln\left(\frac{0,5}{6}\right)$.

Or $1 - \frac{1}{0,19} \ln\left(\frac{0,5}{6}\right) \approx 14,08$, donc le plus petit entier n qui convient est $n = 15$.

Partie C — 1. L'entreprise change la présentation de son site dès que plus de 850 questions figurent sur la FAQ. Laquelle des deux modélisations conduit à ce seuil le plus tôt ?

D'après la question précédente sur (u_n) , le seuil $u_n > 8,5$ est atteint dès le 9^e mois.

D'après la question sur (v_n) , le seuil $v_n > 8,5$ n'est atteint qu'au 15^e mois.

Donc, la réponse est : c'est la première modélisation, avec la suite (u_n) , qui conduit à modifier la présentation du site le plus tôt.

Partie C — 2. Pour quelle modélisation le nombre de questions à long terme est-il le plus grand ?

Pour (u_n) : $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$, et comme $-1 < 0,9 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 13$: à long terme, la première modélisation prévoit 1300 questions.

Pour (v_n) : $v_n = 9 - 6e^{-0,19(n-1)}$, et comme $-0,19(n-1) \rightarrow -\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, on a $e^{-0,19(n-1)} \rightarrow 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 9$: la seconde modélisation prévoit 900 questions à long terme.

Donc, la réponse est : c'est la première modélisation, avec la suite (u_n) , qui prévoit le plus grand nombre de questions à long terme.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 1)

1. On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1, muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Donner les coordonnées des points E, C et G dans ce repère.

En suivant les arêtes du cube depuis A : E $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et G $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: c'est un vecteur directeur de la droite (EC), qui passe par E(0 ; 0 ; 1).

Donc, la réponse est : (EC) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

Les points G, B, D ne sont pas alignés, donc (GBD) est un plan, dirigé par exemple par $\overrightarrow{GB} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{GB} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) = 0 - 1 + 1 = 0, \text{ donc } \overrightarrow{EC} \perp \overrightarrow{GB}.$$

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + (-1) \times 0 = -1 + 1 + 0 = 0, \text{ donc } \overrightarrow{EC} \perp \overrightarrow{BD}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (GBD), donc la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

4.a Justifier qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est $x + y - z - 1 = 0$.

Comme (EC) est orthogonale à (GBD), tout vecteur directeur de (EC) est un vecteur normal à (GBD); en particulier $\overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient.

Le plan (GBD) a donc une équation de la forme $x + y - z + d = 0$. En écrivant que B(1 ; 0 ; 0) appartient à ce plan : $1 + 0 - 0 + d = 0$, donc $d = -1$.

Donc, la réponse est : le plan (GBD) a pour équation $x + y - z - 1 = 0$.

4.b Montrer que le point I, intersection de (EC) et (GBD), a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

Les coordonnées de I vérifient à la fois la représentation paramétrique de (EC) et l'équation de (GBD) : $x = t, y = t, z = 1 - t$ et $x + y - z - 1 = 0$.

$$\text{En substituant : } t + t - (1 - t) - 1 = 0 \iff 3t - 2 = 0 \iff t = \frac{2}{3}.$$

Donc, la réponse est : $I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, car $x_I = t = \frac{2}{3}$, $y_I = t = \frac{2}{3}$ et $z_I = 1 - t = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

4.c En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

La droite (EC) étant orthogonale au plan (GBD) et le coupant en I, la distance de E au plan (GBD) est la longueur EI.

$$EI^2 = \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

$$EI = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \text{ Donc, la réponse est : la distance de E au plan (GBD) vaut } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

5.a Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.

Les segments [BD], [DG] et [GB] sont chacun la diagonale d'une face du cube (respectivement ABCD, CDHG et BCGF), qui sont trois carrés de même côté 1, donc superposables. Leurs diagonales ont donc toutes la même longueur $\sqrt{2}$: le triangle BDG, ayant ses trois côtés égaux, est équilatéral.

5.b Calculer l'aire du triangle BDG, en utilisant le point J milieu de [BD].

Dans un triangle équilatéral, la médiane issue d'un sommet est aussi la hauteur : [GJ] est donc la hauteur issue de G, et l'aire du triangle vaut $\mathcal{A} = \frac{BD \times GJ}{2}$.

$B(1; 0; 0)$ et $D(0; 1; 0)$ donnent $J\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$, milieu de [BD].

$$GJ^2 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (0 - 1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}, \text{ donc } GJ = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

[BD] est la diagonale d'un carré de côté 1, donc $BD = \sqrt{2}$.

$$\text{Donc, la réponse est : } \mathcal{A} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6. Justifier que le volume du tétraèdre EGBD est égal à $\frac{1}{3}$.

En prenant le triangle BDG comme base, d'aire $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et EI comme hauteur associée (E est le sommet opposé, et EI est la distance de E au plan de la base), le volume vaut $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times EI = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 3}{6} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$. Donc, la réponse est : le volume du tétraèdre EGBD vaut $\frac{1}{3}$.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 2)

Partie A — 1. Des biologistes suivent une population d'insectes qui compte 100 000 individus au départ. En laboratoire, sans prédateur, cette population augmente de 60 % chaque mois. On modélise le nombre d'insectes, en millions, au bout de n mois par une suite (u_n) avec $u_0 = 0,1$. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.

Augmenter de 60 % chaque mois revient à multiplier l'effectif par $1 + \frac{60}{100} = 1,6$ d'un mois sur l'autre : la suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 1,6$ et de premier terme $u_0 = 0,1$.

Or le terme général d'une suite géométrique est $u_n = u_0 \times q^n$. Donc, la réponse est $u_n = 0,1 \times 1,6^n$ pour tout entier naturel n .

Partie A — 2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Comme $1,6 > 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,6^n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1 \times 1,6^n = +\infty$.

Partie A — 3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.

$$u_n > 0,4 \iff 0,1 \times 1,6^n > 0,4 \iff 1,6^n > 4.$$

En passant au logarithme népérien, qui est strictement croissant : $1,6^n > 4 \iff n \ln(1,6) > \ln(4) \iff n > \frac{\ln(4)}{\ln(1,6)}$ (l'inégalité garde son sens car $\ln(1,6) > 0$).

Or $\frac{\ln(4)}{\ln(1,6)} \approx 2,946$. Donc, la réponse est $n = 3$.

Partie A — 4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel (qui impose de ne pas dépasser 400 000 insectes) sera-t-il préservé ?

Comme $u_3 > 0,4$, le nombre d'insectes dépasse 400 000 dès le 3e mois selon ce modèle : l'équilibre du milieu naturel n'est donc pas préservé.

Partie B — 1. Un second modèle, tenant compte des contraintes du milieu, définit une suite (v_n) par $v_0 = 0,1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2$ (nombre d'insectes en millions). Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.

$v_1 = 1,6 \times v_0 - 1,6 \times v_0^2 = 1,6 \times 0,1 - 1,6 \times 0,01 = 0,16 - 0,016 = 0,144$. Donc, la réponse est 144 000 insectes.

Partie B — 2.a On considère la fonction f définie sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$.

Résoudre l'équation $f(x) = x$.

$$f(x) = x \iff 1,6x - 1,6x^2 = x \iff 0,6x - 1,6x^2 = 0 \iff x(0,6 - 1,6x) = 0.$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul, donc $x = 0$ ou $0,6 - 1,6x = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{0,6}{1,6} = \frac{3}{8}$.

Ces deux valeurs appartiennent bien à $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$. Donc, la réponse est : l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions, 0 et $\frac{3}{8}$.

Partie B — 2.b Montrer que f est croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

$$f'(x) = 1,6 - 1,6 \times 2x = 1,6(1 - 2x).$$

Pour $x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, on a $x \leq \frac{1}{2}$, donc $2x \leq 1$ et donc $1 - 2x \geq 0$, d'où $f'(x) \geq 0$.

Donc, la réponse est : f est croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

Partie B — 3.a Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

Initialisation : $v_0 = 0,1$ et $v_1 = 0,144$ (question précédente), donc $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \frac{1}{2}$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ pour un entier n donné. Comme f est croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ (question 2.b), on peut appliquer f aux trois membres de l'encadrement : $f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\text{Or } f(0) = 0, f(v_n) = v_{n+1}, f(v_{n+1}) = v_{n+2} \text{ et } f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,6 \times \frac{1}{2} - 1,6 \times \frac{1}{4} = 0,8 - 0,4 = 0,4.$$

On obtient donc $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 0,4$, et comme $0,4 \leq \frac{1}{2}$, cela entraîne $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq \frac{1}{2}$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

Partie B — 3.b Montrer que la suite (v_n) est convergente.

D'après la question précédente, pour tout n , $v_n \leq v_{n+1}$: la suite (v_n) est croissante.

Toujours d'après la question précédente, pour tout n , $v_n \leq \frac{1}{2}$: la suite (v_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

Une suite croissante et majorée converge, d'après le théorème de la convergence monotone. Donc, la réponse est : (v_n) converge.

Partie B — 3.c On note ℓ la limite de (v_n) , solution de $f(x) = x$. Déterminer la valeur de ℓ et conclure sur la préservation de l'équilibre du milieu naturel.

La suite (v_n) est croissante de limite ℓ , donc tous ses termes sont inférieurs ou égaux à ℓ ; en particulier $v_1 \leq \ell$, soit $0,144 \leq \ell$, donc $\ell \neq 0$.

Comme ℓ est solution de $f(x) = x$, elle vaut donc nécessairement $\frac{3}{8}$ (l'autre solution possible étant 0, exclue). Donc $\ell = \frac{3}{8} = 0,375$.

Pour tout n , $v_n \leq \ell = 0,375$, donc le nombre d'insectes restera toujours inférieur à 375 000, valeur qui ne dépasse jamais le seuil de 400 000. Donc, la réponse est : selon ce second modèle, l'équilibre du milieu naturel sera préservé.

Partie B — 4.a On donne la fonction Python ci-dessous, qui simule l'évolution de (v_n) à partir de $v_0 = 0,1$ tant que $v < a$.

• def seuil(a) :	• v = 0.1
• n = 0	•
• while v < a :	•
• v = 1.6*v - 1.6*v*v	•
• n = n + 1	•
• return n	•

Partie B — 4.b Qu'observe-t-on si l'on exécute 'seuil(0.4)' ?

La fonction 'seuil(a)' renvoie le premier rang n à partir duquel $v_n \geq a$. Or on a montré que $v_n \leq 0,375$ pour tout n : il n'existe donc aucun rang n pour lequel $v_n \geq 0,4$. Donc, la réponse est : le programme ne s'arrête jamais (boucle infinie).

Partie B — 4.c Déterminer la valeur renvoyée par 'seuil(0.35)' et interpréter ce résultat.

À la calculatrice, en itérant $v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2$ à partir de $v_0 = 0,1$, on obtient $v_5 \approx 0,338 < 0,35$ et $v_6 \approx 0,358 \geq 0,35$.

Donc, la réponse est : 'seuil(0.35)' renvoie **6**, ce qui signifie que c'est au bout du 6e mois que le nombre d'insectes dépasse pour la première fois 350 000, selon ce second modèle.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 2)

1.a Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, le plan $\mathcal{P}_1$ a pour équation cartésienne $2x + y - z + 2 = 0$. Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}_1$ à $\mathcal{P}_1$.

Les coefficients de x , y et z dans l'équation cartésienne d'un plan donnent directement les coordonnées d'un vecteur normal à ce plan. Donc, la réponse est $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.b Le plan $\mathcal{P}_2$ passe par $B(1; 1; 2)$ et admet pour vecteur normal $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sachant que deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre, montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 2 - 1 - 1 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont donc orthogonaux. Donc, la réponse est : les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

2.a Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$.

Le plan $\mathcal{P}_2$ admet $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal, donc son équation cartésienne est de la forme $x - y + z + d = 0$, où d est une constante réelle à déterminer.

Le point $B(1; 1; 2)$ appartient à $\mathcal{P}_2$, donc ses coordonnées vérifient l'équation : $1 - 1 + 2 + d = 0$, soit $d = -2$.

Donc, la réponse est : $\mathcal{P}_2$ a pour équation cartésienne $x - y + z - 2 = 0$.

2.b On note Δ la droite de représentation paramétrique $x = 0$, $y = -2 + t$, $z = t$ (avec $t \in \mathbb{R}$). Montrer que Δ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Les points de l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont les triplets $(x; y; z)$ vérifiant simultanément $2x + y - z + 2 = 0$ et $x - y + z - 2 = 0$.

En additionnant les deux équations, les termes en y et z s'éliminent partiellement : $(2x + y - z + 2) + (x - y + z - 2) = 3x = 0$, donc $x = 0$.

En reportant $x = 0$ dans la deuxième équation : $0 - y + z - 2 = 0$, soit $y = z - 2$. En posant $z = t$ (réel quelconque), on obtient $x = 0$, $y = -2 + t$, $z = t$, ce qui est exactement la représentation paramétrique de Δ .

Donc, la réponse est : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Delta$.

3.a On considère le point $A(1 ; 1 ; 1)$, qui n'appartient ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$, et H le projeté orthogonal de A sur Δ . Les points de Δ sont notés $M_t(0 ; -2 + t ; t)$. Montrer que, pour tout réel t , $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

$$\begin{aligned} AM_t^2 &= (0 - 1)^2 + (-2 + t - 1)^2 + (t - 1)^2 = (-1)^2 + (t - 3)^2 + (t - 1)^2 \\ &= 1 + (t^2 - 6t + 9) + (t^2 - 2t + 1) = 2t^2 - 8t + 11. \end{aligned}$$

Une longueur étant positive, $AM_t = \sqrt{AM_t^2}$. Donc, la réponse est $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

3.b En déduire que $AH = \sqrt{3}$.

Le point H , projeté orthogonal de A sur Δ , est le point de Δ le plus proche de A : la longueur AH est donc le minimum des longueurs AM_t pour t décrivant $\mathbb{R}$, ce qui revient à minimiser $2t^2 - 8t + 11$.

Cette expression est un trinôme du second degré de coefficient dominant $a = 2 > 0$: son minimum est atteint en $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \times 2} = 2$.

Ce minimum vaut $2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 11 = 8 - 16 + 11 = 3$. Donc, la réponse est $AH = \sqrt{3}$.

4.a On note $\mathcal{D}_1$ la droite orthogonale à $\mathcal{P}_1$ passant par A , et H_1 le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}_1$. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_1$.

La droite $\mathcal{D}_1$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$, donc le vecteur normal $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{P}_1$ dirige $\mathcal{D}_1$; celle-ci passe de plus par $A(1 ; 1 ; 1)$.

Donc, la réponse est : $\mathcal{D}_1$ a pour représentation paramétrique $x = 1 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = 1 - t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

4.b En déduire que H_1 a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{5}{3}\right)$.

Le point H_1 est l'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{P}_1$: ses coordonnées vérifient à la fois la représentation paramétrique de $\mathcal{D}_1$ et l'équation de $\mathcal{P}_1$.

En reportant $x = 1 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = 1 - t$ dans $2x + y - z + 2 = 0$: $2(1 + 2t) + (1 + t) - (1 - t) + 2 = 0$, soit $2 + 4t + 1 + t - 1 + t + 2 = 0$, c'est-à-dire $6t + 4 = 0$, donc $t = -\frac{2}{3}$.

On en déduit $x = 1 + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$, $y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ et $z = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

Donc, la réponse est : $H_1 \left(-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}_2$; on admet que $H_2 \left(\frac{4}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3} \right)$ et que $H(0 ; 0 ; 2)$. Montrer que le quadrilatère AH_1HH_2 est un rectangle.

$$\text{Les coordonnées du vecteur } \overrightarrow{AH_1} \text{ sont } \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} - 1 \\ \frac{1}{3} - 1 \\ \frac{5}{3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Les coordonnées du vecteur } \overrightarrow{H_2H} \text{ sont } \begin{pmatrix} 0 - \frac{4}{3} \\ 0 - \frac{2}{3} \\ 2 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AH_1}$ et $\overrightarrow{H_2H}$ étant égaux, le quadrilatère AH_1HH_2 est un parallélogramme.

La droite (AH_1) est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ (car incluse dans $\mathcal{D}_1$), et H_1 appartient à $\mathcal{P}_1$; donc (AH_1) est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}_1$ passant par H_1 , en particulier à la droite (H_1H) , puisque H appartient à $\Delta \subset \mathcal{P}_1$.

Le parallélogramme AH_1HH_2 possède donc un angle droit en H_1 . Donc, la réponse est : AH_1HH_2 est un rectangle.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 2)

1.a On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

Quand $x \rightarrow -\infty$, $-x \rightarrow +\infty$ donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$ (limite usuelle de l'exponentielle), donc $1 + e^{-x} \rightarrow +\infty$.

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$. Donc, la réponse est $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

1.b Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$ donc $1 + e^{-x} \rightarrow 1$, et $\lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$.

Donc, la réponse est $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Graphiquement, cela signifie que la courbe $\mathcal{C}$ de f admet l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) pour asymptote horizontale en $+\infty$.

1.c On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}$.

f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = 1 + e^{-x}$ et $u'(x) = -e^{-x}$; sa dérivée est donc $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

En multipliant numérateur et dénominateur par e^x : $f'(x) = \frac{-e^{-x} \times e^x}{(1 + e^{-x}) \times e^x} = \frac{-1}{e^x + 1}$.

Donc, la réponse est $f'(x) = \frac{-1}{1+e^x}$.

1.d Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $1 + e^x > 0$ et $f'(x) = \frac{-1}{1+e^x} < 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Avec les limites établies aux questions précédentes ($+\infty$ en $-\infty$ et 0 en $+\infty$), on obtient le tableau : $f'(x)$ est négatif sur $\mathbb{R}$, et f décroît strictement de $+\infty$ (en $-\infty$) vers 0 (en $+\infty$), sans jamais atteindre 0 .

2.a On note T_0 la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 . Déterminer une équation de T_0 .

La tangente en un point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$; ici $a = 0$.

$$f(0) = \ln(1 + e^0) = \ln(2) \text{ et } f'(0) = \frac{-1}{1+e^0} = -\frac{1}{2}.$$

Donc, la réponse est : T_0 a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

2.b Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{-1}{1+e^x} ; \text{ en dérivant à nouveau, avec } u(x) = -1 \text{ (constante) et } v(x) = 1 + e^x : f''(x) = \frac{-v'(x) \times (-1)}{v(x)^2} \times (-1), \text{ plus simplement } f''(x) = \frac{0 - (-1) \times e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

Pour tout réel x , $e^x > 0$ et $(1 + e^x)^2 > 0$, donc $f''(x) > 0$. Donc, la réponse est : f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2.c En déduire que, pour tout réel x , $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

Comme f est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier au-dessus de T_0 . Donc, la réponse est : pour tout réel x , $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

3.a Pour un réel $a \neq 0$, on note $M_a(-a ; f(-a))$ et $N_a(a ; f(a))$ deux points de $\mathcal{C}$. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) - f(-x) = -x$.

$$f(x) - f(-x) = \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^x) = \ln\left(\frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x}\right) \text{ (propriété } \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)).$$

$$\text{En factorisant le numérateur par } e^{-x} : 1 + e^{-x} = e^{-x}(e^x + 1), \text{ donc } \frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}(1 + e^x)}{1 + e^x} = e^{-x}.$$

$$\text{Donc } f(x) - f(-x) = \ln(e^{-x}) = -x.$$

3.b En déduire que les droites T_0 et $(M_a N_a)$ sont parallèles.

Le coefficient directeur de la droite $(M_a N_a)$ est $\frac{y_{N_a} - y_{M_a}}{x_{N_a} - x_{M_a}} = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)}$.

D'après la question précédente appliquée en $x = a$, $f(a) - f(-a) = -a$, donc ce coefficient vaut $\frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$.

Or T_0 a pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ (question 2.a). Les deux droites ayant le même coefficient directeur, donc, la réponse est : T_0 et $(M_a N_a)$ sont parallèles.

Bac Terminale 2023 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

1. On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1, muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$, et K le milieu de $[HG]$. Justifier que les points C, F et K définissent un plan.

Dans ce repère : $A(0 ; 0 ; 0)$, $D(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 1 ; 0)$, $E(0 ; 0 ; 1)$.

Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ donne $C(1 ; 1 ; 0)$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donne $F(0 ; 1 ; 1)$, et $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donnent $H(1 ; 0 ; 1)$ et $G(1 ; 1 ; 1)$.

K est le milieu de $[HG]$ donc $K\left(1 ; \frac{1}{2} ; 1\right)$.

On a $\overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CK} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (aucun coefficient ne convertit l'un en l'autre).

Donc les points C, F et K ne sont pas alignés : ils définissent bien un plan.

2.a Donner, sans justification, les longueurs KG, GF et GC.

$KG = \frac{1}{2}$, $GF = 1$ et $GC = 1$ (déplacements le long des arêtes ou des diagonales de faces du cube d'arête 1).

2.b Calculer l'aire du triangle FGC.

Le triangle FGC est rectangle en G (deux arêtes du cube perpendiculaires), donc son aire vaut $\mathcal{A} = \frac{GF \times GC}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ unité d'aire.

2.c Calculer le volume du tétraèdre FGCK, sachant que le volume d'un tétraèdre vaut $V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée.

En prenant pour base le triangle FGC (aire $\frac{1}{2}$) et pour hauteur $KG = \frac{1}{2}$ (K étant sur la droite (GH) , perpendiculaire au plan (FGC)) : $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ unité de volume.

3.a On pose $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (CFK).

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{CF} = 1 \times (-1) + 2 \times 0 + 1 \times 1 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{CF}.$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{CK} = 1 \times 0 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times 1 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{CK}.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CFK) : c'est donc un vecteur normal à ce plan.

3.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (CFK) est $x + 2y + z - 3 = 0$.

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient au plan (CFK) si et seulement si $\overrightarrow{CM} \cdot \vec{n} = 0$, avec $\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$
(car $C(1 ; 1 ; 0)$).

$$\overrightarrow{CM} \cdot \vec{n} = 0 \iff (x-1) + 2(y-1) + z = 0 \iff x + 2y + z - 3 = 0.$$

Donc, la réponse est : le plan (CFK) a pour équation cartésienne $x + 2y + z - 3 = 0$.

4. On note Δ la droite passant par G et orthogonale au plan (CFK). Démontrer qu'une représentation paramétrique de Δ est $x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + t$ (avec $t \in \mathbb{R}$).

Δ étant orthogonale au plan (CFK), elle admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur, et elle passe par $G(1 ; 1 ; 1)$.

$$M(x ; y ; z) \in \Delta \iff \overrightarrow{GM} = t\vec{n} \text{ pour un réel } t, \text{ c'est-à-dire } x-1 = t, y-1 = 2t, z-1 = t.$$

Donc, la réponse est : Δ a pour représentation paramétrique $x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + t, t \in \mathbb{R}$.

5.a Soit L le point d'intersection de Δ et du plan (CFK). Déterminer les coordonnées de L.

Les coordonnées de L vérifient à la fois le système paramétrique de Δ et l'équation du plan (CFK) :
 $(1+t) + 2(1+2t) + (1+t) - 3 = 0$.

$$\text{Cela donne } 1+t+2+4t+1+t-3=0, \text{ soit } 6t+1=0, \text{ donc } t = -\frac{1}{6}.$$

$$\text{On en tire } x = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, y = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}, z = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} : L \left(\frac{5}{6} ; \frac{2}{3} ; \frac{5}{6} \right).$$

5.b En déduire que $LG = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

$$LG = \sqrt{(x_G - x_L)^2 + (y_G - y_L)^2 + (z_G - z_L)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2}.$$

$$= \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{6}{36}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Donc, la réponse est : $LG = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

6. En utilisant la question précédente, déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle CFK.

Le tétraèdre FGCK admet aussi pour base le triangle CFK, d'aire $\mathcal{B}$, et pour hauteur associée LG (puisque $(GL) \perp (CFK)$) : son volume vaut donc $\frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times LG$.

Ce volume valant $\frac{1}{12}$ (question 2.c) : $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{18} \mathcal{B}$.

$$\text{D'où } \mathcal{B} = \frac{18}{12\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Donc, la réponse est : l'aire du triangle CFK vaut $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

Bac Terminale 2023 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

1. Soit f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x e^{-x}$, de courbe $\mathcal{C}_f$. En remarquant que $f(x) = \frac{x}{e^x}$, démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ et donner son équation.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Donc, la réponse est : $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses).

2. Démontrer que, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$.

f est un produit de fonctions dérivables : $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$.

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$, avec les valeurs aux bornes et la valeur exacte de l'extremum.

Pour tout x , $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $(1 - x)$: $f'(x) > 0$ sur $[0 ; 1[$, $f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$ sur $]1 ; +\infty[$.

f est donc strictement croissante sur $[0 ; 1]$ puis strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$, avec $f(0) = 0$, $f(1) = e^{-1}$ (maximum) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (question 1).

Tableau : x varie de 0 à 1 à $+\infty$; f croît de 0 à e^{-1} puis décroît de e^{-1} à 0.

4. Déterminer, sur $[0 ; +\infty[$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{367}{1000}$.

On a $e^{-1} \approx 0,368 > 0,367$.

Sur $[0 ; 1]$, f est continue et strictement croissante, allant de 0 à $e^{-1} > 0,367$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,367$ y admet une unique solution.

Sur $[1 ; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, allant de $e^{-1} > 0,367$ à 0 : elle y admet aussi une unique solution.

Donc, la réponse est : l'équation $f(x) = \frac{367}{1000}$ admet exactement **deux solutions** sur $[0 ; +\infty[$.

5. On admet que, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $f''(x) = e^{-x}(x - 2)$. Étudier la convexité de f sur $[0 ; +\infty[$.

Pour tout x , $e^{-x} > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $(x - 2)$: négatif sur $[0 ; 2[$, nul en 2, positif sur $]2 ; +\infty[$.

Donc, la réponse est : f est concave sur $[0 ; 2]$ et convexe sur $[2 ; +\infty[$; la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

6.a Pour $a \in [0 ; +\infty[$, soit A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a et T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A. Démontrer que T_a a pour équation réduite $y = [(1 - a)e^{-a}]x + a^2e^{-a}$.

La tangente en A a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, soit $y = (1 - a)e^{-a}(x - a) + ae^{-a}$.

En développant : $y = (1 - a)e^{-a}x - a(1 - a)e^{-a} + ae^{-a} = (1 - a)e^{-a}x - ae^{-a} + a^2e^{-a} + ae^{-a}$.

Donc, la réponse est : T_a a pour équation $y = [(1 - a)e^{-a}]x + a^2e^{-a}$.

6.b T_a coupe l'axe des ordonnées en H_a , d'ordonnée notée $g(a)$. En déduire l'expression de $g(a)$.

L'ordonnée de H_a s'obtient en prenant $x = 0$ dans l'équation de T_a : $g(a) = [(1 - a)e^{-a}] \times 0 + a^2e^{-a} = a^2e^{-a}$.

6.c Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

On étudie la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2e^{-x}$: $g'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \times (-e^{-x}) = -x(x - 2)e^{-x}$.

Pour $x > 0$, $e^{-x} > 0$ et $-x < 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $-(x - 2)$: positif sur $[0 ; 2[$, nul en 2, négatif sur $]2 ; +\infty[$.

g est donc croissante puis décroissante sur $[0 ; +\infty[$: elle admet un maximum unique en $x = 2$.

Or $x = 2$ est exactement l'abscisse du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ (question 5). Donc, la réponse est : $g(a)$ est maximum lorsque A est le point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 1)

1.a. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère la droite d_1 passant par $H(2; 3; 0)$ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et la droite d_2 de représentation paramétrique $x = 2k - 3, y = k, z = 5$ ($k \in \mathbb{R}$). Donner un vecteur directeur $\vec{v}$ de d_2 .

Les coefficients de k dans les coordonnées de d_2 fournissent un vecteur directeur : $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (obtenu en prenant $k = 0$ puis $k = 1$, ce qui donne les points $(-3; 0; 5)$ et $(-1; 1; 5)$, de vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$).

1.b. Montrer que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont clairement pas colinéaires (il n'existe pas de réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, car la troisième coordonnée de $\vec{v}$ est nulle alors que celle de $\vec{u}$ ne l'est pas). Donc, la réponse est que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

1.c. Montrer que d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

Une représentation paramétrique de d_1 est $x = 2 + t, y = 3 - t, z = t$ ($t \in \mathbb{R}$). Un point commun à d_1 et d_2 vérifierait $2 + t = 2k - 3, 3 - t = k$ et $t = 5$.

La troisième équation donne $t = 5$, la deuxième donne $k = 3 - 5 = -2$. En reportant dans la première : $2 + 5 = 7$ d'une part, et $2 \times (-2) - 3 = -7$ d'autre part : $7 \neq -7$, contradiction.

Donc, la réponse est que d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

1.d. Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ?

Deux droites non parallèles et non sécantes ne peuvent pas être coplanaires. Donc, la réponse est que d_1 et d_2 sont non coplanaires.

2.a. Vérifier que le vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

On calcule les produits scalaires : $\vec{w} \cdot \vec{u} = -1 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 1 = -1 - 2 + 3 = 0$ et $\vec{w} \cdot \vec{v} = -1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$. Donc, la réponse est que $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

2.b. Soit P le plan passant par H et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{w}$; on admet que P a pour équation cartésienne $5x + 4y - z - 22 = 0$. Montrer que P coupe d_2 au point $M(3 ; 3 ; 5)$.

Un point de d_2 (de coordonnées $x = 2k - 3$, $y = k$, $z = 5$) appartient à P si $5(2k - 3) + 4k - 5 - 22 = 0$, soit $10k - 15 + 4k - 27 = 0$, c'est-à-dire $14k = 42$ donc $k = 3$.

Pour $k = 3$, on obtient $x = 2 \times 3 - 3 = 3$, $y = 3$, $z = 5$. Donc, la réponse est que le point d'intersection est bien $M(3 ; 3 ; 5)$.

3.a. Soit Δ la droite de vecteur directeur $\vec{w}$ passant par M , de représentation paramétrique $x = -r + 3$, $y = 2r + 3$, $z = 3r + 5$ ($r \in \mathbb{R}$). Justifier que Δ et d_1 sont perpendiculaires en un point L dont on donnera les coordonnées.

Les vecteurs directeurs $\vec{w}$ et $\vec{u}$ de Δ et d_1 sont orthogonaux (question 2.a), donc si ces deux droites se coupent, elles sont perpendiculaires.

Un point commun vérifierait (avec la représentation $x = 2 + t$, $y = 3 - t$, $z = t$ de d_1) : $2 + t = -r + 3$, $3 - t = 2r + 3$, $t = 3r + 5$.

En reportant $t = 3r + 5$ dans la deuxième équation : $3 - (3r + 5) = 2r + 3 \iff -3r - 2 = 2r + 3 \iff -5 = 5r \iff r = -1$, d'où $t = 3 \times (-1) + 5 = 2$.

On vérifie la première équation : $2 + 2 = 4$ et $-(-1) + 3 = 4$: l'égalité est vérifiée, donc les droites se coupent bien.

En remplaçant $t = 2$ dans les coordonnées de d_1 , on obtient le point d'intersection $L(4 ; 1 ; 2)$. Donc, la réponse est que Δ et d_1 sont perpendiculaires au point $L(4 ; 1 ; 2)$.

3.b. Expliquer pourquoi Δ résout le problème posé (trouver une droite perpendiculaire commune à d_1 et d_2).

La droite Δ passe par M , point d'intersection avec d_2 , avec un vecteur directeur $\vec{w}$ orthogonal à celui de d_2 : Δ est donc perpendiculaire à d_2 . Elle passe aussi par L , point d'intersection avec d_1 , avec $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$: Δ est donc aussi perpendiculaire à d_1 . Donc, la réponse est que Δ est bien la perpendiculaire commune à d_1 et d_2 recherchée.

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 1)

1. Affirmation : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$ est convexe. Vrai ou faux ?

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = e^x - 1$ puis $f''(x) = e^x$. Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , f'' est positive sur $\mathbb{R}$. Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie** : f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Affirmation : l'équation $(2e^x - 6)(e^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution réelle. Vrai ou faux ?

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul : $2e^x - 6 = 0$ ou $e^x + 2 = 0$.

Comme $e^x > 0$ pour tout x , on a $e^x + 2 > 2 > 0$: cette équation n'a donc aucune solution.

L'autre équation donne $2e^x = 6 \iff e^x = 3 \iff x = \ln(3)$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle, cette solution est unique).

Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie**.

3. Affirmation : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = 0$. Vrai ou faux ?

On factorise par le terme dominant de chaque membre : $\frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = \frac{e^{2x}(1 - e^{-2x})}{e^x(1 - xe^{-x})} = e^x \times \frac{1 - e^{-2x}}{1 - xe^{-x}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$ donc le numérateur de la fraction tend vers 1 ; et $xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc le dénominateur tend aussi vers 1.

Le quotient tend donc vers 1, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = +\infty$.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** (la limite vaut $+\infty$, pas 0).

4. Affirmation : avec $f(x) = (6x + 5)e^{3x}$ et $F(x) = (2x + 1)e^{3x} + 4$ sur $\mathbb{R}$, F est la primitive de f qui vaut 5 en $x = 0$. Vrai ou faux ?

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables : $F'(x) = 2e^{3x} + 3(2x + 1)e^{3x} = e^{3x}(2 + 6x + 3) = (6x + 5)e^{3x} = f(x)$.

De plus $F(0) = (2 \times 0 + 1)e^0 + 4 = 1 + 4 = 5$.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie** : F est bien la primitive de f sur $\mathbb{R}$ valant 5 en 0.

5. On considère une fonction Python 'mystere(L)' qui parcourt une liste L, cumule la somme S de ses éléments, puis renvoie S divisée par la longueur de L (la moyenne des éléments). Affirmation : 'mystere([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5])' renvoie 50. Vrai ou faux ?

La somme des dix éléments de la liste vaut $1 + 9 + 9 + 5 + 0 + 3 + 6 + 12 + 0 + 5 = 50$, et la fonction renvoie cette somme divisée par la longueur de la liste (ici 10), soit $\frac{50}{10} = 5$. Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** (le résultat renvoyé vaut 5, pas 50).

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 2)

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère le point $A(1; -1; -1)$, le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $5x + 2y + 4z = 17$ et le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $10x + 14y + 3z = 19$. Justifier que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ est $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$ est $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$. Si ces vecteurs étaient colinéaires, on aurait $\frac{10}{5} = \frac{14}{2} = \frac{3}{4}$, or $\frac{10}{5} = 2$ et $\frac{14}{2} = 7$: les rapports diffèrent, donc $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires. Donc, la réponse est que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique $x = 1 + 2t$, $y = -t$, $z = 3 - 2t$ (avec $t \in \mathbb{R}$). Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles (question précédente), donc ils sont sécants selon une droite. Vérifions que tout point de $\mathcal{D}$ appartient à cette droite d'intersection.

Pour tout réel t , en notant M le point de paramètre t : $5(1 + 2t) + 2(-t) + 4(3 - 2t) = 5 + 10t - 2t + 12 - 8t = 17$, donc $M \in \mathcal{P}_1$.

De même : $10(1 + 2t) + 14(-t) + 3(3 - 2t) = 10 + 20t - 14t + 9 - 6t = 19$, donc $M \in \mathcal{P}_2$.

Tout point de $\mathcal{D}$ appartient donc à la fois à $\mathcal{P}_1$ et à $\mathcal{P}_2$: $\mathcal{D}$ est bien la droite d'intersection de ces deux plans.

3.a Vérifier que A n'appartient pas à $\mathcal{P}_1$.

$5 \times 1 + 2 \times (-1) + 4 \times (-1) = 5 - 2 - 4 = -1$, et $-1 \neq 17$, donc, la réponse est que A n'appartient pas à $\mathcal{P}_1$.

3.b Justifier que A n'appartient pas à $\mathcal{D}$.

A appartiendrait à $\mathcal{D}$ s'il existait un réel t tel que $1 = 1 + 2t$, $-1 = -t$ et $-1 = 3 - 2t$, soit $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$ simultanément. Ces trois valeurs sont incompatibles, le système n'a pas de solution : donc, la réponse est que A n'appartient pas à $\mathcal{D}$.

4.a Pour tout réel t , on note M le point de $\mathcal{D}$ de coordonnées $(1 + 2t; -t; 3 - 2t)$ et $f(t) = AM^2$. Montrer que $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.

$$f(t) = (1 + 2t - 1)^2 + (-t - (-1))^2 + (3 - 2t - (-1))^2 = (2t)^2 + (1 - t)^2 + (4 - 2t)^2.$$

En développant : $4t^2 + (1 - 2t + t^2) + (16 - 16t + 4t^2) = 9t^2 - 18t + 17$. Donc, la réponse est $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.

4.b Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées (3 ; -1 ; 1).

La distance AM est minimale exactement quand $f(t) = AM^2$ est minimale, car la fonction racine carrée est croissante.

f est un polynôme du second degré de coefficient dominant $9 > 0$: il admet un minimum en $t = -\frac{-18}{2 \times 9} = \frac{18}{18} = 1$.

Pour $t = 1$, le point de $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $(1 + 2 ; -1 ; 3 - 2) = (3 ; -1 ; 1)$. Donc, la réponse est que AM est minimale pour $M(3 ; -1 ; 1)$.

5. On note H le point de coordonnées (3 ; -1 ; 1). Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ -1 - (-1) \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Un vecteur directeur de } \mathcal{D}, \text{ lu sur sa représentation paramétrique, est } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le repère étant orthonormé, on calcule le produit scalaire par les coordonnées : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AH} = 2 \times 2 + (-1) \times 0 + (-2) \times 2 = 4 + 0 - 4 = 0$.

Le produit scalaire est nul, donc les droites (AH) et $\mathcal{D}$ sont orthogonales. De plus, H appartient à $\mathcal{D}$ (c'est le point de paramètre $t = 1$) et H appartient aussi à (AH) : les deux droites sont donc sécantes en H. Étant orthogonales et sécantes, elles sont **perpendiculaires**.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 1)**1.a L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne J(2 ; 0 ; 1), K(1 ; 2 ; 1) et L(-2 ; -2 ; -2). Montrer que le triangle JKL est rectangle en J.**

$$\overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JL} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{JL} = (-1) \times (-4) + 2 \times (-2) + 0 \times (-3) = 4 - 4 + 0 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont orthogonaux, donc **le triangle JKL est rectangle en J**.

1.b Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle JKL (en cm²).

$$JK = \|\overrightarrow{JK}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5} \text{ et } JL = \|\overrightarrow{JL}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}.$$

$$\text{Le triangle étant rectangle en J, son aire vaut } \mathcal{A} = \frac{JK \times JL}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{145}}{2} \text{ cm}^2.$$

1.c Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle géométrique $\widehat{JKL}$.

Le triangle JKL étant rectangle en J, on utilise SOH-CAH-TOA dans le triangle rectangle JKL :

$$\tan(\widehat{JKL}) = \frac{JL}{JK} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Donc, } \widehat{JKL} = \arctan\left(\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}\right) \approx 67,5^\circ.$$

2.a Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ est normal au plan (JKL).

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{JK} = 6 \times (-1) + 3 \times 2 + (-10) \times 0 = -6 + 6 + 0 = 0.$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{JL} = 6 \times (-4) + 3 \times (-2) + (-10) \times (-3) = -24 - 6 + 30 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (JKL), donc $\vec{n}$ est normal au plan (JKL).

2.b En déduire une équation cartésienne du plan (JKL).

Le plan (JKL), de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$, a une équation de la forme $6x + 3y - 10z + d = 0$.

Comme J(2 ; 0 ; 1) appartient au plan : $6 \times 2 + 3 \times 0 - 10 \times 1 + d = 0 \iff 12 - 10 + d = 0 \iff d = -2$.

Donc, une équation cartésienne du plan (JKL) est $6x + 3y - 10z - 2 = 0$.

3.a On note T le point de coordonnées (10 ; 9 ; -6). Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (JKL) et passant par T.

La droite Δ , orthogonale au plan (JKL), admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur ; elle passe par

$$T(10 ; 9 ; -6). \text{ Une représentation paramétrique est donc : } \begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = 9 + 3t \\ z = -6 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3.b Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de T sur le plan (JKL).

H est l'unique point d'intersection de Δ et du plan (JKL). On remplace les coordonnées paramétriques dans l'équation du plan : $6(10 + 6t) + 3(9 + 3t) - 10(-6 - 10t) - 2 = 0$.

En développant : $60 + 36t + 27 + 9t + 60 + 100t - 2 = 0 \iff 145t + 145 = 0 \iff t = -1$.

En remplaçant $t = -1$: $x = 10 + 6 \times (-1) = 4$, $y = 9 + 3 \times (-1) = 6$, $z = -6 - 10 \times (-1) = 4$.

Donc, **H a pour coordonnées (4 ; 6 ; 4)**.

3.c Sachant que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante, calculer la valeur exacte du volume du tétraèdre JKLT (en cm^3).

On prend pour base le triangle JKL, d'aire $\mathcal{B} = \frac{\sqrt{145}}{2} \text{ cm}^2$ (question 1.b), et pour hauteur la longueur TH, puisque H est le projeté orthogonal de T sur le plan (JKL).

$$\overrightarrow{TH} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}, \text{ donc } TH = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 10^2} = \sqrt{145}.$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{145}}{2} \times \sqrt{145} = \frac{145}{6}.$$

Donc, le volume du tétraèdre JKLT vaut $\frac{145}{6} \text{ cm}^3$.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 2)

Partie A — 1. Soit p la fonction définie sur $[-3 ; 4]$ par $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$. Étudier les variations de p sur $[-3 ; 4]$.

p est dérivable sur $[-3 ; 4]$, avec $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$, un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$.

Comme $\Delta < 0$ et que le coefficient dominant (3) est positif, $p'(x) > 0$ pour tout x de $[-3 ; 4]$: **p est strictement croissante sur $[-3 ; 4]$.**

Partie A — 2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet, sur $[-3 ; 4]$, une unique solution notée α .

$p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$. p est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[-3 ; 4]$, à valeurs entre -68 et 37 ; comme 0 appartient à cet intervalle, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une **unique solution** α dans $[-3 ; 4]$.

Partie A — 3. Donner une valeur approchée de α au dixième près.

À la calculatrice, $p(-0,2) \approx -0,13 < 0$ et $p(-0,1) \approx 0,47 > 0$: donc, $\alpha \approx -0,2$ au dixième près.

Partie A — 4. Donner le tableau de signes de p sur $[-3 ; 4]$.

p étant strictement croissante et s'annulant uniquement en $\alpha \approx -0,2$: $p(x) < 0$ sur $[-3 ; \alpha[$, $p(\alpha) = 0$, et $p(x) > 0$ sur $] \alpha ; 4]$.

Partie B — 1.a Soit f la fonction définie sur $[-3 ; 4]$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$, de courbe $\mathcal{C}_f$. Déterminer $f'(x)$.

f est dérivable sur $[-3 ; 4]$ (car $1+x^2 \neq 0$), et par la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - e^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1+x^2)^2} = \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2}.$$

Partie B — 1.b Justifier que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

$$f'(x) = 0 \iff (x-1)^2 e^x = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \text{ (car } e^x \neq 0) \iff x = 1.$$

Donc, $f'(1) = 0$: la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est horizontale, d'équation $y = f(1) = \frac{e}{2}$.

Partie B — 2.a Des concepteurs utilisent $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan, en estimant que le profil assure de bonnes sensations s'il possède au moins deux points d'inflexion. D'après le graphique fourni, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ?

Graphiquement, la courbe $\mathcal{C}_f$ semble convexe sur $[-3 ; 0]$, concave sur $[0 ; 1]$, puis de nouveau convexe sur $[1 ; 4]$: elle change donc deux fois de convexité, aux abscisses 0 et 1. Le toboggan semble assurer de bonnes sensations.

Partie B — 2.b On admet que, pour tout x de $[-3 ; 4]$, $f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$, où p est la fonction de la partie A. Confirmer, en justifiant, si le toboggan assure de bonnes sensations.

Sur $[-3 ; 4]$, $(1+x^2)^3 > 0$ et $e^x > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $p(x)(x-1)$.

D'après le tableau de signes de p (partie A, question 4) : $p(x) < 0$ sur $[-3 ; \alpha[$ et $p(x) > 0$ sur $] \alpha ; 4]$; par ailleurs $x-1 < 0$ sur $[-3 ; 1[$ et $x-1 > 0$ sur $]1 ; 4]$.

En croisant les signes : $p(x)(x-1)$ est positif sur $[-3 ; \alpha[$, négatif sur $] \alpha ; 1[$, puis positif sur $]1 ; 4]$: f'' change donc bien de signe en $x = \alpha$ et en $x = 1$.

$\mathcal{C}_f$ admet donc bien **deux points d'inflexion** (aux abscisses α et 1) : le toboggan assure de bonnes sensations, ce qui confirme la lecture graphique.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 2)

1.a Une salle d'exposition est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH, muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associé aux dimensions de la pièce, avec A(6 ; 0 ; 2), R(6 ; 3 ; 4) et T(3 ; 0 ; 4). Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.

$$\overrightarrow{AR} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AT} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$AR = \sqrt{0^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{ et } AT = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Comme $AR = AT$, le triangle ART est isocèle en A.

1.b Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT}$.

$$\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = 0 \times (-3) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 0 + 0 + 4 = 4.$$

1.c En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.

$$\text{D'après la formule du produit scalaire : } \overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = AR \times AT \times \cos(\widehat{RAT}), \text{ donc } \cos(\widehat{RAT}) = \frac{4}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}} = \frac{4}{13}.$$

$$\text{Donc, } \widehat{RAT} = \arccos\left(\frac{4}{13}\right) \approx 72,1^\circ.$$

2.a Justifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ART).

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AR} = 2 \times 0 + (-2) \times 3 + 3 \times 2 = 0 - 6 + 6 = 0.$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AT} = 2 \times (-3) + (-2) \times 0 + 3 \times 2 = -6 + 0 + 6 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$, deux vecteurs non colinéaires du plan (ART) : donc, $\vec{n}$ est normal au plan (ART).

2.b En déduire une équation cartésienne du plan (ART).

$$\text{Le plan (ART), de vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ a une équation de la forme } 2x - 2y + 3z + d = 0.$$

$$\text{Comme A(6 ; 0 ; 2) appartient au plan : } 2 \times 6 - 2 \times 0 + 3 \times 2 + d = 0 \iff 12 + 6 + d = 0 \iff d = -18.$$

$$\text{Donc, une équation cartésienne du plan (ART) est } 2x - 2y + 3z - 18 = 0.$$

3.a Un rayon laser orthogonal au plan (ART) est émis du point S de coordonnées $\left(3 ; \frac{5}{2} ; 0\right)$. Justifier que le système $x = 3 + 2k$, $y = \frac{5}{2} - 2k$, $z = 3k$ ($k \in \mathbb{R}$) est une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ART) passant par S.

La droite Δ , orthogonale au plan (ART), admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur ; elle passe par $S \left(3 ; \frac{5}{2} ; 0\right)$. Une représentation paramétrique de Δ est donc $x = 3 + 2k$, $y = \frac{5}{2} - 2k$, $z = 0 + 3k$, soit $x = 3 + 2k$, $y = \frac{5}{2} - 2k$, $z = 3k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

3.b Soit L le point d'intersection de Δ et du plan (ART). Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5 ; \frac{1}{2} ; 3\right)$.

On remplace les coordonnées paramétriques dans l'équation du plan (ART) : $2(3+2k) - 2\left(\frac{5}{2} - 2k\right) + 3 \times 3k - 18 = 0$.

En développant : $6 + 4k - 5 + 4k + 9k - 18 = 0 \iff 17k - 17 = 0 \iff k = 1$.

En remplaçant $k = 1$: $x = 3 + 2 = 5$, $y = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$, $z = 3$.

Donc, **L a pour coordonnées $\left(5 ; \frac{1}{2} ; 3\right)$.**

4.a Un rail est représenté par le segment [DK], où K est le milieu de [EH] et D(0 ; 8 ; 0). Montrer que, pour tout réel t de $[0 ; 1]$, le point N de coordonnées $(0 ; 8 - 4t ; 4t)$ appartient au segment [DK].

Avec E(0 ; 0 ; 4) et H(0 ; 8 ; 4), le milieu K de [EH] a pour coordonnées (0 ; 4 ; 4).

$\overrightarrow{DK} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DN} \begin{pmatrix} 0 \\ -4t \\ 4t \end{pmatrix}$: on remarque que $\overrightarrow{DN} = t \times \overrightarrow{DK}$, donc D, N et K sont alignés.

Comme $t \in [0 ; 1]$, le point N se situe entre D (obtenu pour $t = 0$) et K (obtenu pour $t = 1$) : **N appartient donc bien au segment [DK].**

4.b Calculer les coordonnées exactes du point N pour lesquelles les rayons laser représentés par [SL] et [SN] sont perpendiculaires.

$\overrightarrow{SL} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SN} \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{11}{2} - 4t \\ 4t \end{pmatrix}$.

Les segments [SL] et [SN] sont perpendiculaires si, et seulement si, $\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SN} = 0$: $2 \times (-3) + (-2) \times \left(\frac{11}{2} - 4t\right) + 3 \times 4t = 0$.

En développant : $-6 - 11 + 8t + 12t = 0 \iff 20t - 17 = 0 \iff t = \frac{17}{20}$.

En remplaçant dans les coordonnées de N : $x = 0$, $y = 8 - 4 \times \frac{17}{20} = \frac{23}{5}$, $z = 4 \times \frac{17}{20} = \frac{17}{5}$.

Donc, **N a pour coordonnées** $\left(0 ; \frac{23}{5} ; \frac{17}{5}\right)$.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 2)

1. Le réel $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ **est égal à : a.** $1 - \frac{1}{2}\ln(3)$; **b.** $\frac{1}{2}\ln(3)$; **c.** $3\ln(3) + \frac{1}{2}$; **d.** $-\frac{1}{2}\ln(3)$.

$$a = \ln(3^2) + \ln(\sqrt{3}) - \ln(3) - \ln(3^2) = 2\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(3) - 2\ln(3) = -\frac{1}{2}\ln(3).$$

Réponse d.

2. On considère l'équation (E) : $\ln(x) + \ln(x-10) = \ln(3) + \ln(7)$, d'inconnue réelle x. a. 3 est solution ; b. $5 - \sqrt{46}$ est solution ; c. (E) admet une unique solution réelle ; d. (E) admet deux solutions réelles.

Le domaine de définition impose $x > 0$ et $x > 10$, donc $x \in]10 ; +\infty[$.

Sur ce domaine, $(E) \iff \ln(x(x-10)) = \ln(21) \iff x(x-10) = 21 \iff x^2 - 10x - 21 = 0$, un trinôme de discriminant $\Delta = 100 + 84 = 184 = 4 \times 46$, donc $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{46}$.

Les racines sont $x_1 = 5 - \sqrt{46}$ et $x_2 = 5 + \sqrt{46}$. Comme $\sqrt{46} > 5$ (car $46 > 25$), $x_1 < 0$ n'appartient pas au domaine, tandis que $x_2 > 10$ appartient au domaine.

L'équation (E) admet donc une unique solution réelle, $5 + \sqrt{46}$. **Réponse c.**

3. Soit f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2(-1 + \ln(x))$. a. $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$; b. f est croissante sur $]0 ; +\infty[$; c. $f'(\sqrt{e})$ est différent de 0 ; d. la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}e$ est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, avec $f'(x) = 2x(-1 + \ln(x)) + x^2 \times \frac{1}{x} = -2x + 2x\ln(x) + x = x(2\ln(x) - 1)$.

$f'(x) = 0 \iff 2\ln(x) - 1 = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$: la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$ est donc horizontale, d'équation $y = f(\sqrt{e})$.

$$f(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^2(-1 + \ln(\sqrt{e})) = e\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e.$$

Donc, la tangente au point d'abscisse $\sqrt{e}$ a bien pour équation $y = -\frac{1}{2}e$. **Réponse d.**

4. Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons. La probabilité de tirer exactement 2 jetons jaunes, arrondie au millièm, est : a. 0,683 ; b. 0,346 ; c. 0,230 ; d. 0,165.

Les tirages étant successifs, indépendants et avec remise, la variable X comptant le nombre de jetons jaunes obtenus suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$.

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \approx 0,346. \text{ Réponse b.}$$

5. Dans les mêmes conditions (sac de 20 jetons jaunes, 30 bleus, 5 tirages avec remise), la probabilité de tirer au moins un jeton jaune, arrondie au millièm, est : a. 0,078 ; b. 0,259 ; c. 0,337 ; d. 0,922.

$$X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{2}{5}\right). P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^5 \approx 0,922.$$

Réponse d.

6. Toujours dans les mêmes conditions, si on répète l'expérience un très grand nombre de fois, le nombre moyen de jetons jaunes obtenus est égal à : a. 0,4 ; b. 1,2 ; c. 2 ; d. 2,5.

L'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ vaut $E(X) = np$. Ici, $E(X) = 5 \times \frac{2}{5} = 2$.

Réponse c.

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 1)

1. ABCDEFGH est un cube. Dans le repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $E(0; 0; 3)$, et on considère les points $P(0; 0; 1)$, $Q(0; 2; 3)$ et $R(1; 0; 3)$. Placer les points P, Q et R sur la figure du cube.

P est sur l'arête [AE] (à un tiers de A en partant vers E), Q est sur la face (DHGC)... plus précisément Q se place à partir de E en avançant de 2 selon $\vec{j}$ et en montant de 3 selon $\vec{k}$ à partir de A, et R se place à 1 selon $\vec{i}$ et 3 selon $\vec{k}$: les trois points sont sur les faces du cube, respectivement sur l'arête [AE] pour P, et sur les faces supérieures pour Q et R (voir figure en annexe du sujet).

2. Montrer que le triangle PQR est isocèle en R.

$$\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$RP^2 = \|\overrightarrow{RP}\|^2 = (-1)^2 + 0^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5 \text{ et } RQ^2 = \|\overrightarrow{RQ}\|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 0^2 = 1 + 4 = 5.$$

Donc $RP = RQ = \sqrt{5}$: le triangle PQR est isocèle en R.

3. Justifier que les points P, Q et R définissent un plan.

Les coordonnées de $\overrightarrow{RP} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RQ} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles (par exemple $0 \times 0 \neq (-2) \times 2$), donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : **les points P, Q et R ne sont pas alignés et définissent donc un plan.**

4.a Montrer que le vecteur $\vec{u}(2 ; 1 ; -1)$ est normal au plan (PQR).

En posant $\overrightarrow{PR} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (deux vecteurs non colinéaires du plan (PQR)) : $\overrightarrow{PR} \cdot \vec{u} = 1 \times 2 + 0 \times 1 + 2 \times (-1) = 2 + 0 - 2 = 0$.

$$\overrightarrow{QR} \cdot \vec{u} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + 0 \times (-1) = 2 - 2 + 0 = 0.$$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQR), donc $\vec{u}(2 ; 1 ; -1)$ est **normal au plan (PQR).**

4.b En déduire une équation cartésienne du plan (PQR).

Le plan (PQR) admet $\vec{u}(2 ; 1 ; -1)$ pour vecteur normal, donc une équation de la forme $2x + y - z = d$. Comme $P(0 ; 0 ; 1) \in (\text{PQR})$, on a $2 \times 0 + 0 - 1 = d$, soit $d = -1$. Donc, la réponse est que le plan (PQR) a pour équation cartésienne $2x + y - z = -1$.

4.c Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point E et orthogonale au plan (PQR).

La droite (d) est orthogonale au plan (PQR), donc dirigée par le vecteur normal $\vec{u}(2 ; 1 ; -1)$.

Comme elle passe par $E(0 ; 0 ; 3)$, une représentation paramétrique de (d) est :
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases},$$

$t \in \mathbb{R}$.

4.d Montrer que le point $L\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{8}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR).

Le projeté orthogonal de E sur (PQR) est l'unique point appartenant à la fois à la droite (d) et au plan (PQR). Il suffit donc de résoudre le système formé par la représentation paramétrique de (d) et l'équation de (PQR).

En substituant $x = 2t$, $y = t$, $z = 3 - t$ dans $2x + y - z = -1$: $2(2t) + t - (3 - t) = -1 \iff 4t + t - 3 + t = -1 \iff 6t = 2 \iff t = \frac{1}{3}$.

On obtient alors $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ et $z = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$, ce qui correspond bien aux coordonnées de L.
Donc, la réponse est que **L est le projeté orthogonal de E sur le plan (PQR).**

4.e Déterminer la distance entre le point E et le plan (PQR).

$$\overrightarrow{EL} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - 0 \\ \frac{1}{3} - 0 \\ \frac{8}{3} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$EL^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

La distance de E au plan (PQR) est $EL = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

5. En choisissant le triangle EQR comme base, montrer que le volume du tétraèdre EPQR est $\frac{2}{3}$ (on rappelle que le volume d'un tétraèdre est $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur correspondante}$).

$\overrightarrow{EQ} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ER} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux (leur produit scalaire vaut 0) : le triangle EQR est rectangle

en E, d'aire $\mathcal{A}(\text{EQR}) = \frac{EQ \times ER}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$.

En prenant EQR comme base, la hauteur correspondante est la distance du point P au plan (EQR),

c'est-à-dire $PE : \overrightarrow{PE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $PE = 2$ (P et E ont même abscisse et ordonnée, seule l'altitude diffère).

Donc $V(\text{EPQR}) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{EQR}) \times PE = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 = \frac{2}{3}$.

6. À l'aide des deux questions précédentes, trouver l'aire du triangle PQR.

Le volume du tétraèdre EPQR peut aussi s'exprimer avec (PQR) comme base et EL comme hauteur correspondante : $V(\text{EPQR}) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{PQR}) \times EL$.

On a donc $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{PQR}) \times \frac{\sqrt{6}}{3} \iff \mathcal{A}(\text{PQR}) = \frac{2 \times 3}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

Donc, la réponse est que l'aire du triangle PQR est $\sqrt{6}$ (en unités d'aire).

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points $A(1; 3)$ et $B(3; 5)$, et on donne ci-dessus la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f ainsi que la tangente (AB) à $\mathcal{C}_f$ au point A. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

L'ordonnée du point A donne $f(1) = 3$. Le nombre dérivé $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente (AB) en A : $f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$.

Partie A — 2.a On admet que f est définie par $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où a et b sont des réels positifs. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

Comme $a \geq 0$ et $x^2 \geq 0$ pour tout réel x , on a $ax^2 + 1 \geq 1 > 0$: f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \frac{2ax}{ax^2 + 1}$ (dérivée de $\ln(u)$ égale à $\frac{u'}{u}$, avec $u(x) = ax^2 + 1$ et $u'(x) = 2ax$).

Partie A — 2.b Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Les résultats de la question 1 donnent le système
$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(a + 1) + b = 3 \\ \frac{2a}{a + 1} = 1 \end{cases}.$$

La deuxième équation donne $2a = a + 1 \iff a = 1$. En reportant dans la première : $\ln(1 + 1) + b = 3 \iff b = 3 - \ln 2$.

Donc, la réponse est $a = 1$ et $b = 3 - \ln 2$, ce qui donne, sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$.

Partie B — 1. On admet désormais que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$. Montrer que f est une fonction paire.

Pour tout réel x , $f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) + 3 - \ln 2 = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2 = f(x)$. Donc, f est une fonction paire (sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

Partie B — 2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$, et par composition avec la fonction $\ln$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

f étant paire, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B — 3. Déterminer l'expression de $f'(x)$, étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations complet (limites en $\pm\infty$ et valeur exacte du minimum).

Comme $x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x , f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Le dénominateur $x^2 + 1$ étant strictement positif, $f'(x)$ est du signe de $2x$: $f'(x) < 0$ sur $] -\infty ; 0[$ et $f'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$, avec $f'(0) = 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, avec un minimum en $x = 0$ valant $f(0) = \ln(1) + 3 - \ln 2 = 3 - \ln 2$.

Tableau de variations : f décroît de $+\infty$ (limite en $-\infty$) jusqu'au minimum $3 - \ln 2$ atteint en $x = 0$, puis croît de $3 - \ln 2$ jusqu'à $+\infty$ (limite en $+\infty$).

Partie B — 4. À l'aide du tableau de variations de f , donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet exactement deux solutions.

D'après le tableau de variations, f décroît strictement puis croît strictement de part et d'autre du minimum $3 - \ln 2$, avec pour limites $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Donc, la réponse est que l'équation $f(x) = k$ admet exactement deux solutions si et seulement si $k > 3 - \ln 2$.

Partie B — 5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

$$f(x) = 3 + \ln 2 \iff \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2 = 3 + \ln 2 \iff \ln(x^2 + 1) = 2 \ln 2 \iff \ln(x^2 + 1) = \ln 4.$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante, cette égalité équivaut à $x^2 + 1 = 4$, soit $x^2 = 3$, soit $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

Donc, la réponse est que l'ensemble des solutions est $S = \{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$.

Partie C — 1. On rappelle que $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$ sur $\mathbb{R}$. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Par lecture graphique de la courbe, la convexité de $\mathcal{C}_f$ semble changer aux points d'abscisses -1 et 1 : on peut conjecturer l'existence de **deux points d'inflexion, d'abscisses -1 et 1** .

Partie C — 2. Montrer que, pour tout réel x , $f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$.

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (numérateur $2x$, dénominateur $x^2 + 1$ ne s'annulant jamais), donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Avec } \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}, u(x) = 2x, u'(x) = 2, v(x) = x^2 + 1, v'(x) = 2x : f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Partie C — 3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Le dénominateur $(x^2 + 1)^2$ est toujours strictement positif, donc $f''(x)$ est du signe de $1 - x^2$, qui s'annule en $x = -1$ et $x = 1$, et est positif entre les deux racines, soit sur $] -1 ; 1[$.

f est convexe lorsque $f''(x) \geq 0$. Donc, la réponse est que **f est convexe sur l'intervalle $[-1 ; 1]$** , ce qui confirme la conjecture graphique de la question 1 (changements de convexité en $x = -1$ et $x = 1$).

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 2)

1.a Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(-3 ; 1 ; 3)$, $B(2 ; 2 ; 3)$, $C(1 ; 7 ; -1)$, $D(-4 ; 6 ; -1)$ et $K(-3 ; 14 ; 14)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

On calcule chaque vecteur en soustrayant les coordonnées de l'origine à celles de l'extrémité :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - (-3) \\ 2 - 1 \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De même, } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 1 - (-4) \\ 7 - 6 \\ -1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Enfin, } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -4 - (-3) \\ 6 - 1 \\ -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc, la réponse est } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1.b Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

D'après la question précédente, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme.

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5 \times (-1) + 1 \times 5 + 0 \times (-4) = -5 + 5 + 0 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont donc orthogonaux : le parallélogramme ABCD possède deux côtés consécutifs perpendiculaires.

Donc, la réponse est que ABCD est un rectangle.

1.c Calculer l'aire du rectangle ABCD.

On calcule les longueurs des côtés à l'aide des normes des vecteurs : $AB^2 = 5^2 + 1^2 + 0^2 = 26$, donc $AB = \sqrt{26}$.

De même, $AD^2 = (-1)^2 + 5^2 + (-4)^2 = 1 + 25 + 16 = 42$, donc $AD = \sqrt{42}$.

L'aire du rectangle ABCD vaut $AB \times AD = \sqrt{26} \times \sqrt{42} = \sqrt{26 \times 42} = \sqrt{1092}$.

En factorisant, $1092 = 4 \times 273$, donc $\sqrt{1092} = 2\sqrt{273}$.

Donc, la réponse est $\mathcal{A}(\text{ABCD}) = 2\sqrt{273}$ (unité d'aire).

2.a Justifier que les points A, B et D définissent un plan.

D'après la question 1.a, les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ ne sont clairement pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles), donc les points A, B et D ne sont pas alignés. Donc, la réponse est qu'ils définissent bien un plan.

2.b Montrer que le vecteur $\vec{n}(-2 ; 10 ; 13)$ est un vecteur normal au plan (ABD).

On calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 \times 5 + 10 \times 1 + 13 \times 0 = -10 + 10 + 0 = 0$.

On calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = -2 \times (-1) + 10 \times 5 + 13 \times (-4) = 2 + 50 - 52 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD), $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Donc, la réponse est que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABD).

2.c En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).

Le plan (ABD) admet $\vec{n}(-2 ; 10 ; 13)$ pour vecteur normal, donc il a une équation de la forme $-2x + 10y + 13z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Le point $B(2 ; 2 ; 3)$ appartient au plan (ABD), donc ses coordonnées vérifient cette équation : $-2 \times 2 + 10 \times 2 + 13 \times 3 = d$, soit $-4 + 20 + 39 = d$, donc $d = 55$.

Donc, la réponse est que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $-2x + 10y + 13z = 55$.

3.a Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ABD) et qui passe par le point K(-3 ; 14 ; 14).

La droite Δ , orthogonale au plan (ABD), admet le vecteur normal $\vec{n}(-2 ; 10 ; 13)$ comme vecteur directeur, et elle passe par le point K.

Donc, la réponse est $\Delta : \begin{cases} x = -2t - 3 \\ y = 10t + 14 \\ z = 13t + 14 \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

3.b Déterminer les coordonnées du point I, projeté orthogonal du point K sur le plan (ABD).

Le point I, projeté orthogonal de K sur le plan (ABD), est l'unique point d'intersection de la droite Δ (perpendiculaire au plan et passant par K) avec ce plan.

On remplace les coordonnées paramétriques de Δ dans l'équation du plan (ABD) : $-2(-2t - 3) + 10(10t + 14) + 13(13t + 14) = 55$.

Cela donne $4t + 6 + 100t + 140 + 169t + 182 = 55$, soit $273t + 328 = 55$, donc $273t = -273$, d'où $t = -1$.

En reportant $t = -1$ dans le système paramétrique : $x = -2 \times (-1) - 3 = 2 - 3 = -1$, $y = 10 \times (-1) + 14 = 4$ et $z = 13 \times (-1) + 14 = 1$.

Donc, la réponse est $I(-1 ; 4 ; 1)$.

3.c Montrer que la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD et de sommet K vaut $\sqrt{273}$.

ABCD est un rectangle (question 1.b), donc le point D appartient bien au plan (ABD). La hauteur de la pyramide KABCD, relative à la base ABCD, est donc la longueur KI, où I est le projeté orthogonal de K sur ce plan.

$$\overrightarrow{KI} \begin{pmatrix} -1 - (-3) \\ 4 - 14 \\ 1 - 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -13 \end{pmatrix}, \text{ donc } KI^2 = 2^2 + (-10)^2 + (-13)^2 = 4 + 100 + 169 = 273.$$

Donc, la réponse est $KI = \sqrt{273}$.

4. Calculer le volume V de la pyramide KABCD. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.

On applique la formule avec l'aire de la base ABCD (question 1.c) et la hauteur KI (question 3.c) : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{ABCD}) \times KI = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{273} \times \sqrt{273}$.

Or $\sqrt{273} \times \sqrt{273} = 273$, donc $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 273 = \frac{546}{3} = 182$.

Donc, la réponse est $V = 182$ (unité de volume).

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 2)

Partie A — 1. Sur un graphique (non reproduit ici) sont tracées les courbes représentatives $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'une fonction f et de sa dérivée f' , toutes deux définies sur $]3 ; +\infty[$: $\mathcal{C}_1$ part de $-\infty$ au voisinage de 3 et croît ensuite jusqu'à $+\infty$; $\mathcal{C}_2$ part de valeurs élevées au voisinage de 3 et décroît en restant positive. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente, en justifiant.

Si $\mathcal{C}_1$ représentait la dérivée f' , celle-ci serait toujours négative puis positive selon la lecture du graphique ; or la fonction représentée par $\mathcal{C}_2$ n'est pas décroissante puis croissante : elle est toujours décroissante. Il y a donc une contradiction.

$\mathcal{C}_2$ reste positive sur tout l'intervalle $]3 ; +\infty[$, ce qui est cohérent avec une fonction f strictement croissante sur cet intervalle (comme le montre $\mathcal{C}_1$) : une fonction croissante a une dérivée positive.

Donc, la réponse est que $\mathcal{C}_2$ représente la fonction dérivée f' , et $\mathcal{C}_1$ représente la fonction f .

Partie A — 2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.

Par lecture graphique de la courbe $\mathcal{C}_1$, on lit approximativement $f(5,6) \approx 3$. Donc, la réponse est que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution proche de $x = 5,6$.

Partie A — 3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f .

La courbe $\mathcal{C}_1$ « tourne le dos » à l'axe des abscisses de façon décroissante sur tout l'intervalle observé : elle est située sous chacune de ses tangentes. Donc, la réponse est que la fonction f semble concave sur $]3 ; +\infty[$.

Partie B — 1. Justifier que la quantité $\ln(x^2 - x - 6)$ est bien définie pour les valeurs de x de l'intervalle $I =]3 ; +\infty[$.

Le trinôme $x^2 - x - 6$ a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2$.

Ses racines sont donc $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$.

Un trinôme du second degré est du signe de son coefficient dominant (ici positif, $a = 1$) à l'extérieur de ses racines, et du signe opposé entre ses racines : $x^2 - x - 6 > 0$ pour $x \in]-\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[$.

Donc, la réponse est que $x^2 - x - 6 > 0$ sur $I =]3 ; +\infty[$, et donc $\ln(x^2 - x - 6)$ y est bien défini.

Partie B — 2. On admet que $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ sur I . Calculer les limites de f aux deux bornes de I , puis en déduire une équation d'une asymptote à la courbe de f .

Limite en $+\infty$: pour $x > 3$, on factorise $x^2 - x - 6 = x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right) = 1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x - 6 = +\infty$, puis par composition avec la fonction logarithme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en 3 : en écrivant $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, on a $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x+2)(x-3) = 5 \times 0^+ = 0^+$, donc par composition avec la fonction logarithme, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$.

Donc, la réponse est que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .

Partie B — 3.a Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$.

La fonction $x \mapsto x^2 - x - 6$ est dérivable et strictement positive sur I (question B.1), donc $f = \ln(x^2 - x - 6)$ est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables, et $f'(x) = \frac{(x^2 - x - 6)'}{x^2 - x - 6} = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$.

Donc, la réponse est $f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$.

Partie B — 3.b Étudier le sens de variation de f sur I , puis dresser son tableau de variations en y faisant figurer les limites aux bornes de I .

Sur I , le dénominateur $x^2 - x - 6$ est strictement positif (question B.1), donc $f'(x)$ est du signe du numérateur $2x - 1$.

Pour tout $x > 3$, on a $2x - 1 > 2 \times 3 - 1 = 5 > 0$, donc $f'(x) > 0$ sur tout l'intervalle I .

Donc, la réponse est que f est strictement croissante sur I , de $-\infty$ (limite en 3) à $+\infty$ (limite en $+\infty$).

Partie B — 4.a Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5 ; 6[$.

La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur I , donc en particulier sur $]5 ; 6[$.

$$f(5) = \ln(5^2 - 5 - 6) = \ln(14) \approx 2,64 < 3 \text{ et } f(6) = \ln(6^2 - 6 - 6) = \ln(24) \approx 3,18 > 3.$$

Comme 3 est une valeur intermédiaire entre $f(5)$ et $f(6)$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur $]5 ; 6[$.

Donc, la réponse est que l'équation $f(x) = 3$ admet bien une unique solution $\alpha \in]5 ; 6[$.

Partie B — 4.b Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.

La calculatrice donne $f(5,63) \approx 2,999 < 3$ et $f(5,64) \approx 3,004 > 3$.

Donc, la réponse est $5,63 < \alpha < 5,64$.

Partie B — 5.a Justifier que $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.

La fonction $f' = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$ est un quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas : elle est donc dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, $f''(x) = \frac{2 \times (x^2 - x - 6) - (2x - 1) \times (2x - 1)}{(x^2 - x - 6)^2}$.

On développe le numérateur : $2(x^2 - x - 6) - (2x - 1)^2 = 2x^2 - 2x - 12 - (4x^2 - 4x + 1) = 2x^2 - 2x - 12 - 4x^2 + 4x - 1 = -2x^2 + 2x - 13$.

Donc, la réponse est $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.

Partie B — 5.b Étudier la convexité de f sur I .

Le dénominateur $(x^2 - x - 6)^2$ est strictement positif sur I , donc $f''(x)$ est du signe du numérateur $-2x^2 + 2x - 13$.

Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times (-13) = 4 - 104 = -100 < 0$: il n'a donc pas de racine réelle et garde un signe constant, celui de son coefficient dominant $a = -2 < 0$: il est donc strictement négatif pour tout réel x .

Donc, la réponse est que $f''(x) < 0$ pour tout $x \in I$: la fonction f est concave sur I .

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 2)

1.a On étudie le développement d'une bactérie, qui a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et 0,7 de se diviser en deux bactéries filles, ces probabilités étant les mêmes à chaque génération. On note p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie, avec $p_0 = 0,3$ et $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$ pour tout entier naturel n . Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 , et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.

$$p_1 = 0,3 + 0,7 \times p_0^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,3^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,09 = 0,3 + 0,063 = 0,363.$$

$$p_2 = 0,3 + 0,7 \times p_1^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,363^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,131769 = 0,3 + 0,0922383 = 0,3922383.$$

Donc, la réponse est $p_1 = 0,363$ et $p_2 = 0,3922383$: p_1 est la probabilité d'obtenir au plus une descendance (c'est-à-dire de mourir sans descendance, ou de se diviser puis que les deux bactéries filles meurent sans descendance), et p_2 celle d'obtenir au plus deux descendances.

1.b Sachant que $p_{10} \approx 0,42802018$ (valeur fournie par une feuille de calcul), quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?

L'évènement « obtenir au moins 11 descendances » est l'évènement contraire de « obtenir au plus 10 descendances », de probabilité p_{10} .

La probabilité cherchée vaut donc $1 - p_{10} \approx 1 - 0,42802018 \approx 0,57198$.

Donc, la réponse est environ 0,572 (à 10^{-3} près).

1.c En observant que les valeurs successives de p_n (fournies par une feuille de calcul) augmentent progressivement de 0,3 vers une valeur proche de 0,4285, formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n) .

Au vu de ces valeurs, la suite (p_n) semble croissante, et semble converger vers une limite proche de 0,4285 (les derniers termes calculés se rapprochant de plus en plus les uns des autres autour de cette valeur).

2.a Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n , $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

Initialisation : on a $p_0 = 0,3$ et $p_1 = 0,363$ (question 1.a), donc $0 \leq 0,3 \leq 0,363 \leq 0,5$, c'est-à-dire $0 \leq p_0 \leq p_1 \leq 0,5$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

La fonction carré étant croissante sur $[0 ; +\infty[$, on en déduit $0 \leq p_n^2 \leq p_{n+1}^2 \leq 0,5^2$, puis en multipliant chaque membre par $0,7 > 0$: $0 \leq 0,7p_n^2 \leq 0,7p_{n+1}^2 \leq 0,7 \times 0,25$.

En ajoutant 0,3 à chaque membre : $0,3 \leq 0,3 + 0,7p_n^2 \leq 0,3 + 0,7p_{n+1}^2 \leq 0,3 + 0,175$, c'est-à-dire $0,3 \leq p_{n+1} \leq p_{n+2} \leq 0,475$.

Comme $0 \leq 0,3$ et $0,475 \leq 0,5$, on obtient $0 \leq p_{n+1} \leq p_{n+2} \leq 0,5$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

2.b Justifier que la suite (p_n) est convergente.

D'après la question précédente, la suite (p_n) est croissante (car $p_n \leq p_{n+1}$ pour tout n) et majorée par 0,5. Donc, la réponse est que, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (p_n) est convergente.

3.a On note L la limite de la suite (p_n) . Justifier que L est solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.

Comme (p_n) converge vers L , la suite (p_{n+1}) converge aussi vers L (suite extraite en décalant les indices).

En passant à la limite dans la relation de récurrence $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$ (la fonction carré étant continue), on obtient $L = 0,3 + 0,7L^2$, soit $0,7L^2 - L + 0,3 = 0$.

Donc, la réponse est que L est bien solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.

3.b Déterminer la limite de la suite (p_n) .

Le discriminant de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$ vaut $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 0,7 \times 0,3 = 1 - 0,84 = 0,16 = 0,4^2 > 0$: l'équation admet donc deux solutions distinctes.

$$x_1 = \frac{1 + 0,4}{2 \times 0,7} = \frac{1,4}{1,4} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{1 - 0,4}{2 \times 0,7} = \frac{0,6}{1,4} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}.$$

D'après la question 2.a, la suite (p_n) est majorée par 0,5, donc sa limite L vérifie $L \leq 0,5$: la solution $x_1 = 1$ est donc à exclure.

Donc, la réponse est $L = \frac{3}{7}$ (soit environ 0,4286, cohérent avec la conjecture de la question 1.c).

4. La fonction Python ci-dessous doit renvoyer, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite (p_n) : ‘def suite(n) :’ puis, en corps de fonction, une ligne d’initialisation de ‘p’, une ligne ‘s=[p]’, une boucle ‘for i in range(...)’ contenant une ligne de mise à jour de ‘p’ et une ligne ‘s.append(p)’, puis ‘return(s)’. Recopier cette fonction en complétant les lignes d’initialisation, de boucle et de mise à jour.

- def suite(n) :
- p = 0.3
- s = [p]
- for i in range(n - 1) :
- p = 0.3 + 0.7 * p2
- s.append(p)
- return(s)

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + x^2)$. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2022$: **a. n'a aucune solution ; b. a exactement une solution ; c. a exactement deux solutions ; d. a une infinité de solutions.**

$$f(x) = 2022 \iff \ln(1 + x^2) = 2022 \iff 1 + x^2 = e^{2022} \iff x^2 = e^{2022} - 1.$$

Le réel $e^{2022} - 1$ est strictement positif, donc cette dernière équation a exactement deux solutions opposées : $x = \sqrt{e^{2022} - 1}$ et $x = -\sqrt{e^{2022} - 1}$.

Donc, la réponse est **c.**

2. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x \ln(x) - x^2$, de courbe représentative $\mathcal{C}_g$. a. g est convexe sur $]0 ; +\infty[$; b. g est concave sur $]0 ; +\infty[$; c. $\mathcal{C}_g$ a exactement un point d'inflexion sur $]0 ; +\infty[$; d. $\mathcal{C}_g$ a exactement deux points d'inflexion sur $]0 ; +\infty[$.

g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables, avec $g'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 2x = \ln(x) - 2x + 1$.

g' est à son tour dérivable sur $]0 ; +\infty[$, avec $g''(x) = \frac{1}{x} - 2$.

$g''(x) = 0 \iff \frac{1}{x} = 2 \iff x = \frac{1}{2}$. De plus, $g''(x) = \frac{1-2x}{x}$ change de signe en $x = \frac{1}{2}$ (positif avant, négatif après, car $x > 0$).

g'' s'annule en changeant de signe une seule fois sur $]0 ; +\infty[$, donc $\mathcal{C}_g$ admet exactement un point d'inflexion, d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Donc, la réponse est **c**.

3. On considère la fonction f définie sur $] -1 ; 1[$ par $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Une primitive de f sur $] -1 ; 1[$ est la fonction : a. $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$; b. $g(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$; c. $g(x) = \frac{x^2}{2 \left(x - \frac{x^3}{3}\right)}$;

d. $g(x) = \frac{x^2}{2} \ln(1-x^2)$.

Testons la fonction g de la réponse a, définie par $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$ sur $] -1 ; 1[$.

En posant $u(x) = 1-x^2$, dérivable et strictement positive sur $] -1 ; 1[$, on a $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(u(x))$, donc $g'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} = f(x)$.

La fonction g de la réponse a est donc bien une primitive de f sur $] -1 ; 1[$.

Donc, la réponse est **a**.

4. La fonction $x \mapsto \ln(-x^2 - x + 6)$ est définie sur : a. $] -3 ; 2[$; b. $] -\infty ; 6]$; c. $]0 ; +\infty[$; d. $]2 ; +\infty[$.

Cette fonction est définie exactement là où $-x^2 - x + 6 > 0$, c'est-à-dire là où $x^2 + x - 6 < 0$.

Le trinôme $x^2 + x - 6$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$, donc deux racines réelles $x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$.

Un trinôme du second degré de coefficient dominant positif est strictement négatif strictement entre ses deux racines : $x^2 + x - 6 < 0 \iff x \in] -3 ; 2[$.

La fonction est donc définie sur $] -3 ; 2[$, ce qui correspond à la réponse a.

5. On considère la fonction f définie sur $]0,5 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x - 1)$. Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est : a. $y = 4x - 7$; b. $y = 2x - 4$; c. $y = -3(x - 1) + 4$; d. $y = 2x - 1$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$.

$$f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 3\ln(2 \times 1 - 1) = 1 - 4 + 3\ln(1) = -3 + 0 = -3.$$

$$f \text{ est dérivable sur }]0,5 ; +\infty[, \text{ avec } f'(x) = 2x - 4 + 3 \times \frac{2}{2x - 1} = 2x - 4 + \frac{6}{2x - 1}, \text{ donc } f'(1) = 2 - 4 + \frac{6}{1} = -2 + 6 = 4.$$

$$\text{Une équation de la tangente est donc } y = -3 + 4(x - 1) \iff y = 4x - 4 - 3 \iff y = 4x - 7.$$

Donc, la réponse est a.

6. L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x + 3) < 2\ln(x + 1)$ est : a. $S =] - \infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$; b. $S =]1 ; +\infty[$; c. $S = \emptyset$; d. $S =] - 1 ; 1[$.

Pour que les deux logarithmes soient définis, il faut $x + 3 > 0$ et $x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -3$ et $x > -1$: l'inéquation n'a donc de sens que sur $] - 1 ; +\infty[$.

Sur cet intervalle, $2\ln(x + 1) = \ln((x + 1)^2)$, et $\ln$ étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$: $\ln(x + 3) < \ln((x + 1)^2) \iff x + 3 < (x + 1)^2$.

$$x + 3 < x^2 + 2x + 1 \iff 0 < x^2 + x - 2.$$

Le trinôme $x^2 + x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc deux racines $x_1 = \frac{-1 - 3}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$; il est strictement positif à l'extérieur de ses racines, donc sur $] - \infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$.

En tenant compte de la condition $x > -1$ posée au début, l'ensemble des solutions est finalement $S =]1 ; +\infty[$, soit la réponse b.

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

1.a Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne $A(2 ; 0 ; 3)$, $B(0 ; 2 ; 1)$, $C(-1 ; -1 ; 2)$ et $D(3 ; -3 ; -1)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles : $\frac{-2}{-3} \neq \frac{2}{-1}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

1.b Calculer les longueurs AB et AC.

$$AB^2 = (-2)^2 + 2^2 + (-2)^2 = 4 + 4 + 4 = 12, \text{ donc } AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$AC^2 = (-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 9 + 1 + 1 = 11, \text{ donc } AC = \sqrt{11}.$$

1.c À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$, puis une valeur approchée de sa mesure au dixième de degré.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \times (-3) + 2 \times (-1) + (-2) \times (-1) = 6 - 2 + 2 = 6.$$

$$\text{Or, par définition du produit scalaire, } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

$$\text{Donc } 6 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{11} \times \cos(\widehat{BAC}) \iff \cos(\widehat{BAC}) = \frac{6}{2\sqrt{33}} = \frac{3}{\sqrt{33}}.$$

La calculatrice donne alors $\widehat{BAC} \approx 58,5^\circ$ au dixième de degré près.

2.a Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).

Un point $M(x; y; z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, puisque $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

$$\text{Avec } \overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix}, \text{ cette condition s'écrit } -2(x+1) + 2(y+1) - 2(z-2) = 0.$$

$$\text{En divisant par } -2 : (x+1) - (y+1) + (z-2) = 0 \iff x - y + z - 2 = 0.$$

Une équation du plan $\mathcal{P}$ est donc $x - y + z - 2 = 0$.

2.b Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

La droite (AB) passe par A(2; 0; 3) et admet $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, ou plus simplement le vecteur colinéaire

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ comme vecteur directeur.}$$

$$\text{Une représentation paramétrique de (AB) est donc : } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2.c En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathcal{P}$.

Les coordonnées de E vérifient à la fois l'équation de $\mathcal{P}$ et la représentation paramétrique de (AB).

On remplace x, y, z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation de $\mathcal{P}$:

$$(2 - t) - t + (3 - t) - 2 = 0 \iff 3 - 3t = 0 \iff t = 1.$$

En remplaçant $t = 1$ dans la représentation paramétrique : $x = 2 - 1 = 1, y = 1, z = 3 - 1 = 2$.

Donc, **E a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).**

2.d Calculer l'aire du triangle ABC.

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } BC^2 = (-1)^2 + (-3)^2 + 1^2 = 1 + 9 + 1 = 11, \text{ d'où } BC = \sqrt{11}.$$

Comme $AC = BC = \sqrt{11}$, le triangle ABC est isocèle en C. Puisque E est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), le segment [CE] est donc la hauteur issue de C dans ce triangle isocèle.

$$\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } CE^2 = 2^2 + 2^2 + 0^2 = 8, \text{ d'où } CE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{L'aire du triangle ABC vaut donc } \mathcal{A}(\text{ABC}) = \frac{AB \times CE}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}.$$

3.a Soit le point F(1 ; -1 ; 3). Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.

Les points A, B, C, F sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Le système à résoudre, en utilisant les deux premières coordonnées, est } \begin{cases} -1 = -2\alpha - 3\beta \\ -1 = 2\alpha - \beta \end{cases}.$$

De la deuxième équation, $\beta = 2\alpha + 1$. En reportant dans la première : $-1 = -2\alpha - 3(2\alpha + 1) = -2\alpha - 6\alpha - 3 = -8\alpha - 3$, d'où $8\alpha = -2$, soit $\alpha = -\frac{1}{4}$, puis $\beta = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{1}{2}$.

On vérifie avec la troisième coordonnée : $\alpha \times (-2) + \beta \times (-1) = -\frac{1}{4} \times (-2) + \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, ce qui correspond bien à la troisième coordonnée de $\overrightarrow{AF}$, qui vaut 0.

Donc $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$: les points A, B, C et F sont coplanaires.

3.b Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

$$\overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ (puisque } D(3; -3; -1) \text{ et } F(1; -1; 3)).$$

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-2) + (-2) \times 2 + (-4) \times (-2) = -4 - 4 + 8 = 0.$$

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-3) + (-2) \times (-1) + (-4) \times (-1) = -6 + 2 + 4 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), donc il est orthogonal à ce plan : la droite (FD) est bien orthogonale au plan (ABC).

3.c Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multipliée par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Prenons pour base le triangle ABC, d'aire $\mathcal{A}(ABC) = 2\sqrt{6}$ (question 2.d). Comme (FD) est orthogonale au plan (ABC) et que F appartient à ce plan (question 3.a), la longueur FD est la hauteur du tétraèdre relative à cette base.

$$FD^2 = 2^2 + (-2)^2 + (-4)^2 = 4 + 4 + 16 = 24, \text{ donc } FD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Le volume du tétraèdre ABCD est donc } \mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABC) \times FD = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} = \frac{4 \times 6}{3} = 8.$$

Donc, le volume du tétraèdre ABCD vaut **8** (en unités de volume).

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

Partie A — 1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x$. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\text{En } -\infty : \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty, \text{ donc par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty.$$

$$\text{En } +\infty : \text{ pour } x \neq 0, \text{ on écrit } h(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right). \text{ Par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \\ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty.$$

$$\text{Par produit de limites (avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

Partie A — 2. Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, avec $h'(x) = e^x - 1$.

$h'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$, et de même $h'(x) < 0 \iff x < 0$, puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

h est donc strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ puis strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, avec un minimum en $x = 0$ valant $h(0) = e^0 - 0 = 1$.

Tableau de variation : h décroît de $+\infty$ à $h(0) = 1$ sur $] -\infty ; 0]$, puis croît de 1 à $+\infty$ sur $[0 ; +\infty[$.

Partie A — 3. En déduire que, si a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$, alors $h(a) - h(b) < 0$.

D'après la question précédente, h est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Si $0 < a < b$, alors par stricte croissance de h sur cet intervalle, $h(a) < h(b)$, ce qui équivaut à $h(a) - h(b) < 0$.

Partie B — 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$.

Comme $f' = f$ pour la fonction exponentielle, $f(0) = f'(0) = e^0 = 1$.

Donc, une équation de T est $y = 1 + 1 \times x$, soit $y = x + 1$.

Partie B — 2. On s'intéresse à l'écart, au voisinage de 0, entre T et $\mathcal{C}_f$, aux points d'abscisse $\frac{1}{n}$ (avec n entier naturel non nul). Cet écart est la différence des ordonnées des points de T et $\mathcal{C}_f$ de même abscisse. On pose, pour tout entier naturel non nul n , $u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ donc par composition, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^0 = 1.$$

Donc, par somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 - 0 - 1 = 0$.

Partie B — 3.a Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , $u_{n+1} - u_n = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$, où h est la fonction de la partie A.

$$u_{n+1} - u_n = \left[\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} - 1 \right] - \left[\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1 \right].$$

En développant, les termes constants -1 et $+1$ s'éliminent : $u_{n+1} - u_n = \exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} - \exp\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}$.

En regroupant : $u_{n+1} - u_n = \left[\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} \right] - \left[\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right] = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$, puisque $h(x) = e^x - x$.

Partie B — 3.b En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Pour tout entier naturel non nul n , on a $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.

D'après la question 3 de la partie A (avec $a = \frac{1}{n+1}$ et $b = \frac{1}{n}$), on a donc $h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right) < 0$.

D'après la question précédente, cela signifie que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel non nul n : la suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Partie B — 4. Un tableau de valeurs approchées à 10^{-9} près donne : $u_1 \approx 0,718281828$; $u_2 \approx 0,148721271$; $u_3 \approx 0,062279092$; $u_4 \approx 0,034025417$; $u_5 \approx 0,021402758$; $u_6 \approx 0,014693746$; $u_7 \approx 0,010707852$; $u_8 \approx 0,008148453$; $u_9 \approx 0,006407958$; $u_{10} \approx 0,005170918$. Donner la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$ semble être inférieur à 10^{-2} .

La suite (u_n) étant strictement décroissante (question 3.b), on cherche dans le tableau le premier terme strictement inférieur à $10^{-2} = 0,01$.

On lit $u_7 \approx 0,010707852 > 0,01$, tandis que $u_8 \approx 0,008148453 < 0,01$.

Donc, la plus petite valeur de n pour laquelle l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$ semble inférieur à 10^{-2} est $n = 8$.

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) + 1$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$. Déterminer la limite de f en 0, puis sa limite en $+\infty$.

On sait, par croissances comparées, que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$. Donc, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 + 1 = 1$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$; par limite de produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty$, puis par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2.a On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, de dérivée f' . Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 1 + \ln(x)$.

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme d'un produit de fonctions dérivables ($x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$) et d'une constante. En utilisant la formule de dérivation d'un produit, pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

2.b En déduire le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$, en y faisant figurer la valeur exacte de l'extremum et les limites.

$f'(x) \geq 0 \iff \ln(x) + 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq e^{-1}$ (la fonction exponentielle étant strictement croissante).

Donc, $f'(x) < 0$ sur $]0 ; e^{-1}[$ et $f'(x) > 0$ sur $]e^{-1} ; +\infty[$: la fonction f est donc strictement décroissante sur $]0 ; e^{-1}[$, puis strictement croissante sur $[e^{-1} ; +\infty[$.

La fonction f admet donc un minimum en $x = e^{-1}$, valant $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) + 1 = e^{-1} \times (-1) + 1 = 1 - e^{-1}$.

Le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$ est donc : f décroît de 1 (limite en 0, non atteinte) jusqu'au minimum $1 - e^{-1}$ atteint en $x = e^{-1}$, puis croît de $1 - e^{-1}$ jusqu'à $+\infty$ (limite en $+\infty$).

2.c Justifier que, pour tout $x \in]0 ; 1[$, on a $f(x) \in]0 ; 1[$.

D'après le tableau de variation précédent, sur l'intervalle $]0 ; 1[$, la fonction f prend ses valeurs entre son minimum $1 - e^{-1}$ et sa valeur en 1 (non atteinte sur l'intervalle ouvert) : $f(1) = 1 \times \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1$.

Ainsi, pour tout x de $]0 ; 1[$, on a $1 - e^{-1} \leq f(x) < 1$.

Or $e^{-1} < 1$ donc $1 - e^{-1} > 0$: on a donc bien $f(x) \in]0 ; 1[$ pour tout $x \in]0 ; 1[$.

3.a Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

On calcule $f'(1) = \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1$ et $f(1) = 1$ (calculé à la question précédente).

Donc, une équation de (T) est $y = 1 \times (x - 1) + 1 = x - 1 + 1 = x$, c'est-à-dire $y = x$.

3.b Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction f' , définie par $f'(x) = \ln(x) + 1$, est elle-même dérivable sur $]0 ; +\infty[$, de dérivée $f''(x) = \frac{1}{x}$.

Or $\frac{1}{x} > 0$ pour tout x de $]0 ; +\infty[$, donc $f''(x) > 0$ sur cet intervalle : la fonction f est donc strictement convexe sur $]0 ; +\infty[$.

3.c En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \geq x$.

La fonction f est convexe sur $]0 ; +\infty[$, donc sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier au-dessus de (T), d'équation $y = x$.

Donc, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \geq x$.

4.a On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 \in]0 ; 1[$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 1$.

Initialisation : par hypothèse, $u_0 \in]0 ; 1[$, soit $0 < u_0 < 1$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit n un entier naturel fixé, et supposons que $0 < u_n < 1$. D'après la question 2.c, comme $u_n \in]0 ; 1[$, on a $f(u_n) \in]0 ; 1[$, c'est-à-dire $0 < u_{n+1} < 1$: la propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire ; donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 1$.

4.b En utilisant le résultat de la question 3.c, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

D'après la question 3.c, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \geq x$. Comme, d'après la question précédente, $u_n > 0$ pour tout entier naturel n , on peut appliquer cette inégalité à $x = u_n$: $f(u_n) \geq u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$.

La suite (u_n) est donc croissante.

4.c En déduire que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante (question précédente) et majorée par 1 (d'après la question 4.a). Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

Partie A — 1.a Un patient absorbe un comprimé de médicament. On modélise la quantité de médicament présente dans son sang, en mg, par la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(t) = 3te^{-0,5t+1}$, où t est le temps écoulé en heures depuis la prise du comprimé. On admet que f est dérivable sur $[0 ; 10]$. Montrer que, pour tout t de $[0 ; 10]$, $f'(t) = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$.

En écrivant $f = uv$ avec $u(t) = 3t$ et $v(t) = e^{-0,5t+1}$, on a $u'(t) = 3$ et $v'(t) = -0,5e^{-0,5t+1}$. Donc $f'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) = 3e^{-0,5t+1} + 3t \times (-0,5)e^{-0,5t+1} = (3 - 1,5t)e^{-0,5t+1} = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$.

Partie A — 1.b En déduire le tableau de variations de f sur $[0 ; 10]$.

Pour tout t de $[0 ; 10]$, $e^{-0,5t+1} > 0$, donc $f'(t)$ est du signe de $-0,5t + 1$.

Or $-0,5t + 1 \geq 0 \iff t \leq 2$. Donc $f'(t) \geq 0$ sur $[0 ; 2]$ et $f'(t) \leq 0$ sur $[2 ; 10]$.

On calcule $f(0) = 0$, $f(2) = 6e^0 = 6$ et $f(10) = 30e^{-4} \approx 0,55$.

Donc f est strictement croissante sur $[0 ; 2]$, puis strictement décroissante sur $[2 ; 10]$, avec un maximum de 6 atteint en $t = 2$.

Partie A — 1.c Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament est-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité maximale ?

D'après le tableau de variations, le maximum de f est atteint en $t = 2$, et $f(2) = 6$. Donc, la quantité de médicament est maximale au bout de 2 heures, et elle vaut alors 6 mg.

Partie A — 2.a Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur $[0 ; 2]$, notée α , dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près. On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur $[2 ; 10]$, notée β , avec $\beta \approx 3,46$.

Sur $[0 ; 2]$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante, à valeurs entre $f(0) = 0$ et $f(2) = 6$.

Comme $5 \in [0 ; 6]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution α dans $[0 ; 2]$.

À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 1,02$.

Partie A — 2.b Le traitement est efficace lorsque la quantité de médicament est supérieure ou égale à 5 mg. Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament avec ce protocole.

D'après le tableau de variations de f (croissante puis décroissante, avec $f(\alpha) = f(\beta) = 5$), on a $f(t) \geq 5$ pour $t \in [\alpha ; \beta]$. La durée d'efficacité est donc $\beta - \alpha \approx 3,46 - 1,02 = 2,44$ heures, soit $2,44 \times 60 \approx 146,3$ minutes. Donc, la durée d'efficacité du médicament est d'environ 146 minutes (à la minute près).

Partie B — 1. On injecte au patient une dose initiale de 2 mg puis, chaque heure, une dose de 1,8 mg. Chaque heure écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 % par rapport à la quantité présente juste après l'injection. On modélise par la suite (u_n) , où u_n est la quantité de médicament (en mg) juste après l'injection de la n -ième heure, avec $u_0 = 2$. Calculer u_1 .

Au bout d'une heure, il reste 70 % de la quantité u_0 , puis on réinjecte 1,8 mg. Donc $u_1 = 0,7 \times u_0 + 1,8 = 0,7 \times 2 + 1,8 = 3,2$. Donc, $u_1 = 3,2$ mg.

Partie B — 2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

Entre l'instant n et l'instant $n + 1$, la quantité de médicament diminue de 30 %, donc il n'en reste que 70 % de u_n , c'est-à-dire $0,7u_n$. On ajoute ensuite la nouvelle injection de 1,8 mg. Donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

Partie B — 3.a Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$, donc $u_0 \leq u_1 < 6$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq u_{n+1} < 6$. Comme la fonction $x \mapsto 0,7x + 1,8$ est croissante (coefficient 0,7 positif), on peut appliquer cette fonction aux trois membres de l'inégalité : $0,7u_n + 1,8 \leq 0,7u_{n+1} + 1,8 < 0,7 \times 6 + 1,8$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$ (car $0,7 \times 6 + 1,8 = 6$). La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

Partie B — 3.b En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante (car $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n) et majorée par 6. Donc, d'après le théorème de convergence monotone, **la suite (u_n) converge vers une limite finie ℓ .**

Partie B — 3.c Déterminer la valeur de ℓ . Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

La suite (u_n) converge vers ℓ , et $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$ pour tout n . Par unicité de la limite, ℓ vérifie $\ell = 0,7\ell + 1,8$.

$$\ell = 0,7\ell + 1,8 \iff 0,3\ell = 1,8 \iff \ell = 6.$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$: à long terme, la quantité de médicament présente dans le sang du patient juste après chaque injection se stabilise **autour de 6 mg**.

Partie B — 4.a On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 6 - u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique de raison 0,7, et préciser son premier terme.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - (0,7u_n + 1,8) = 4,2 - 0,7u_n = 0,7(6 - u_n) = 0,7v_n$ (car $0,7 \times 6 = 4,2$). Donc, (v_n) est géométrique de raison $q = 0,7$, de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = 4$.

Partie B — 4.b Déterminer l'expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .

Comme (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 4$ et de raison 0,7, on a $v_n = 4 \times 0,7^n$ pour tout entier naturel n . Or $v_n = 6 - u_n$, donc $u_n = 6 - v_n = 6 - 4 \times 0,7^n$.

Partie B — 4.c Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente est supérieure ou égale à 5,5 mg. Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées.

On résout $u_n \geq 5,5 : 6 - 4 \times 0,7^n \geq 5,5 \iff -4 \times 0,7^n \geq -0,5 \iff 0,7^n \leq 0,125 = \frac{1}{8}$ (en divisant par -4 , ce qui change le sens de l'inégalité).

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[: 0,7^n \leq \frac{1}{8} \iff \ln(0,7^n) \leq \ln\left(\frac{1}{8}\right) \iff n \times \ln(0,7) \leq -\ln(8)$.

Comme $\ln(0,7) < 0$, on divise par $\ln(0,7)$ en changeant le sens de l'inégalité : $n \geq \frac{-\ln(8)}{\ln(0,7)}$.

À la calculatrice, $\frac{-\ln(8)}{\ln(0,7)} \approx 5,83$, donc la plus petite valeur entière de n qui convient est $n = 6$.

Cela signifie que c'est à partir de l'injection u_6 que la quantité de médicament atteint 5,5 mg. Les injections réalisées sont donc celles correspondant à $u_0, u_1, \dots, u_6$, soit **7 injections au total**.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

1.a Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $A(-1 ; 1 ; 3)$

et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
 On admet que A n'appartient pas à $\mathcal{D}$. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$.

En lisant les coefficients de t dans la représentation paramétrique, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1.b Montrer que le point $B(-1 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

B appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que
$$\begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ 3 = 2 - t \\ 0 = 2 + 2t \end{cases}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\begin{cases} 2t = -2 \\ -t = 1 \\ 2t = -2 \end{cases}, \text{ ce qui donne } t = -1 \text{ dans chacune des trois équations. Cette valeur commune } t = -1$$

existe bien, donc **B appartient à la droite $\mathcal{D}$.**

1.c Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.

Avec $A(-1 ; 1 ; 3)$ et $B(-1 ; 3 ; 0)$, on a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \times 2 + 2 \times (-1) + (-3) \times 2 = 0 - 2 - 6 = -8$.

2.a On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A et orthogonal à $\mathcal{D}$, et H le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$ (H est donc le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$). Montrer que $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $2x - y + 2z - 3 = 0$.

Le plan $\mathcal{P}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$, donc le vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{D}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc de la forme $2x - y + 2z + d = 0$. Comme $A(-1 ; 1 ; 3)$ appartient à $\mathcal{P}$: $2 \times (-1) - 1 + 2 \times 3 + d = 0 \iff -2 - 1 + 6 + d = 0 \iff d = -3$. Donc, $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $2x - y + 2z - 3 = 0$.

2.b En déduire que H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$.

H est l'unique point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$. On substitue les coordonnées paramétriques de $\mathcal{D}$ dans l'équation de $\mathcal{P}$: $2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0$.

En développant : $2 + 4t - 2 + t + 4 + 4t - 3 = 0 \iff 9t + 1 = 0 \iff t = -\frac{1}{9}$.

En remplaçant dans la représentation paramétrique : $x = 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{9}$, $y = 2 - \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{19}{9}$, $z = 2 + 2 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{9}$.

Donc, H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$.

2.c Calculer la longueur AH (valeur exacte).

Avec $A(-1 ; 1 ; 3)$ et $H\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$, on a $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ \frac{10}{9} \\ -\frac{11}{9} \end{pmatrix}$. Donc $AH = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(-\frac{11}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{256 + 100 + 121}{81}} = \sqrt{\frac{477}{81}} = \frac{\sqrt{477}}{9}$. Comme $477 = 9 \times 53$, $\sqrt{477} = 3\sqrt{53}$, donc $AH = \frac{3\sqrt{53}}{9} = \frac{\sqrt{53}}{3}$.

3.a On souhaite retrouver les coordonnées de H, projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$, par une autre méthode. On rappelle que B appartient à $\mathcal{D}$ et que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

Les points H et B appartiennent tous deux à la droite $\mathcal{D}$, donc le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, tout comme $\vec{u}$. Deux vecteurs directeurs d'une même droite étant colinéaires, il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

3.b Montrer que $k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u}$.

Or A et H appartiennent au plan $\mathcal{P}$, orthogonal à $\mathcal{D}$ (donc à $\vec{u}$) : le vecteur $\overrightarrow{AH}$, contenu dans $\mathcal{P}$, est donc orthogonal à $\vec{u}$, d'où $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = (k\vec{u}) \cdot \vec{u} = k\|\vec{u}\|^2$, d'où, puisque $\vec{u} \neq \vec{0}$, $k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

3.c Calculer la valeur de k et retrouver les coordonnées de H.

On a $\|\vec{u}\|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 2^2 = 4 + 1 + 4 = 9$, et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = -8$ (question 1.c). Donc $k = \frac{-8}{9}$.

En notant $H(x ; y ; z)$, on a $\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} -1-x \\ 3-y \\ -z \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{HB} = k\vec{u} = -\frac{8}{9}\vec{u} = -\frac{8}{9} \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ \frac{8}{9} \\ -\frac{16}{9} \end{pmatrix}$.

En identifiant coordonnée par coordonnée : $-1-x = -\frac{16}{9} \iff x = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9}$; $3-y = \frac{8}{9} \iff y = 3 - \frac{8}{9} = \frac{19}{9}$; $-z = -\frac{16}{9} \iff z = \frac{16}{9}$.

On retrouve bien $H\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$, comme à la question 2.b.

4. On considère un point C du plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$. Calculer l'aire du triangle ACH. (Rappel : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée.)

Les points A, C et H appartiennent tous au plan $\mathcal{P}$: le triangle ACH est donc une base possible du tétraèdre ABCH, et la hauteur associée est la distance de B à ce plan, c'est-à-dire BH (puisque H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$, donc aussi sur toute perpendiculaire à $\mathcal{P}$... plus directement : BH est la longueur du segment [BH], avec $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$ orthogonal à $\mathcal{P}$).

D'après la question 3.c, $\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ \frac{8}{9} \\ -\frac{16}{9} \end{pmatrix}$, donc $BH = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{256 + 64 + 256}{81}} =$

$$\sqrt{\frac{576}{81}} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

On applique la formule du volume avec $\mathcal{B} = \text{Aire}(\text{ACH})$ et $h = BH : \frac{8}{9} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(\text{ACH}) \times \frac{8}{3}$, d'où

$$\text{Aire}(\text{ACH}) = \frac{3 \times \frac{8}{9}}{\frac{8}{3}} = \frac{\frac{24}{9}}{\frac{8}{3}} = \frac{24}{9} \times \frac{3}{8} = 1.$$

Donc, l'aire du triangle ACH vaut 1 unité d'aire.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte ; aucune justification n'est demandée sur la copie, mais nous la donnons ici. 1. La courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :
a. $x = -2$; b. $y = -1$; c. $y = -2$; d. $y = 0$.

Pour $x \neq 0$, en factorisant par x^2 au numérateur et au dénominateur : $f(x) = \frac{x^2(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \frac{-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{3}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow \frac{-2}{1} = -2$. La droite d'équation $y = -2$ est donc asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$. **Réponse c.**

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{x^2}$. La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par : a. $F(x) = \frac{x^2}{2} e^{x^2}$; b. $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$; c. $F(x) = (1 + 2x^2) e^{x^2}$; d. $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}$.

On remarque que $f(x) = x e^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2}$, qui est de la forme $\frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$. Les primitives de $u' e^u$ sont les fonctions $e^u + k$ ($k \in \mathbb{R}$), donc les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2} e^{x^2} + k$. La condition $F(0) = 1$ donne $\frac{1}{2} \times e^0 + k = 1 \iff \frac{1}{2} + k = 1 \iff k = \frac{1}{2}$.
Donc $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}$. **Réponse d.**

3. On donne la représentation graphique de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$: la courbe de f' part de valeurs négatives en 0, croise l'axe des abscisses en $x = 2$, atteint un maximum aux alentours de $x = 3$, puis redescend en restant positive. On peut affirmer que la fonction f est : a. concave sur $]0 ; +\infty[$; b. convexe sur $]0 ; +\infty[$; c. convexe sur $[0 ; 2]$; d. convexe sur $[2 ; +\infty[$.

f est convexe sur un intervalle exactement lorsque sa dérivée f' y est croissante. D'après la représentation graphique, la courbe de f' est croissante de $x = 0$ jusqu'à son maximum (situé vers $x = 3$), donc en particulier sur tout l'intervalle $[0 ; 2]$, inclus dans $[0 ; 3]$. Donc f est convexe sur $[0 ; 2]$.

Réponse c.

4. Parmi les primitives de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$: a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$; b. toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$; c. certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$; d. toutes sont croissantes sur $] -\infty ; 0]$ et décroissantes sur $[0 ; +\infty[$.

Pour tout réel x , $e^{-x^2} > 0$, donc $f(x) = 3e^{-x^2} + 2 > 2 > 0$: la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Or, si F est une primitive de f , alors $F' = f$. Comme f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ tout entier, toute primitive F de f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. **Réponse a.**

5. La limite en $+\infty$ de f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2 \ln x}{3x^2 + 1}$ est égale à : a. $\frac{2}{3}$; b. $+\infty$; c. $-\infty$; d. 0.

On écrit $f(x) = \frac{2 \ln x}{3x^2 + 1} = \frac{2}{3} \times \frac{\frac{\ln x}{x^2}}{1 + \frac{1}{3x^2}}$ (en factorisant x^2 au dénominateur). Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right) = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{3} \times \frac{0}{1} = 0$. **Réponse d.**

6. L'équation $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$: a. trois solutions ; b. deux solutions ; c. une seule solution ; d. aucune solution.

On pose $X = e^x$ (avec $X > 0$ nécessairement). Comme $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$, l'équation devient $X^2 + X - 12 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 1 + 48 = 49 = 7^2$, donc les solutions sont $X = \frac{-1 - 7}{2} = -4$ et $X = \frac{-1 + 7}{2} = 3$. Comme $X = e^x > 0$, seule la solution $X = 3$ est acceptable, ce qui donne $e^x = 3 \iff x = \ln(3)$. L'équation admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}$. **Réponse c.**

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 2)

Partie A — Le coyote est un mammifère sauvage proche du loup vivant en Amérique du Nord. Dans l'Oklahoma, 70 % des coyotes sont porteurs d'une maladie appelée l'ehrlichiose. Un test de dépistage existe : si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas ; s'il n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas. On capture un coyote au hasard et on lui applique le test. On note M l'évènement « le coyote est malade » et T l'évènement « le test est positif ». 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

L'arbre part de la racine avec les branches M (probabilité 0,7) et $\overline{M}$ (probabilité 0,3).

Sous M : les branches T (probabilité 0,97) et $\overline{T}$ (probabilité 0,03).

Sous $\overline{M}$: les branches T (probabilité 0,05) et $\overline{T}$ (probabilité 0,95).

2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et ait un test positif.

D'après l'arbre pondéré, $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,7 \times 0,97 = 0,679$.

3. Démontrer que $P(T) = 0,694$.

D'après la formule des probabilités totales, comme M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers :
 $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$.

Or $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$.

Donc, $P(T) = 0,679 + 0,015 = 0,694$.

4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif. Calculer cette valeur, arrondie au millième.

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,679}{0,694} \approx 0,978 \text{ (arrondi au millième)}.$$

5.a Par analogie, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et la calculer, arrondie au millième.

La valeur prédictive négative du test est la probabilité que le coyote ne soit effectivement pas malade sachant que son test est négatif, c'est-à-dire $P_{\overline{T}}(\overline{M})$.

On calcule $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,694 = 0,306$ et $P(\overline{T} \cap \overline{M}) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,3 \times 0,95 = 0,285$.

$$\text{Donc, } P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{M})}{P(\overline{T})} = \frac{0,285}{0,306} \approx 0,931 \text{ (arrondi au millième)}.$$

5.b Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter le résultat.

Comme $0,978 > 0,931$, la valeur prédictive positive est supérieure à la valeur prédictive négative : un résultat positif au test permet donc de conclure à la maladie avec un peu plus de certitude (environ 2,2 % d'erreur) qu'un résultat négatif ne permet de conclure à l'absence de maladie (environ 6,9 % d'erreur).

Partie B — On admet désormais que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif vaut 0,694. 1.a On capture cinq coyotes au hasard, ce choix étant assimilé à un tirage avec remise ; X compte, parmi ces cinq coyotes, le nombre de ceux dont le test est positif. Quelle est la loi de X ? Justifier et préciser ses paramètres.

La capture des cinq coyotes correspond à la répétition de cinq épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (par assimilation à un tirage avec remise), chacune de paramètre de succès 0,694 (« le test est positif »). Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,694$, notée $X \sim \mathcal{B}(5 ; 0,694)$.

1.b Calculer la probabilité qu'un seul des cinq coyotes ait un test positif, arrondie au centième.

$$P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,694^1 \times (1 - 0,694)^4 \approx 0,03 \text{ (arrondi au centième).}$$

1.c Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre des cinq coyotes aient un test positif. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier.

Il s'agit de comparer $P(X \geq 4)$ à $\frac{1}{2}$, avec $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$.

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \times 0,694^4 \times 0,306^1 \approx 0,3549 \text{ et } P(X = 5) = \binom{5}{5} \times 0,694^5 \times 0,306^0 \approx 0,1610.$$

Donc, $P(X \geq 4) \approx 0,3549 + 0,1610 = 0,5159$, valeur strictement supérieure à 0,5.

L'affirmation du vétérinaire est donc **vraie**.

2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'au moins un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils en capturer pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ait un test positif soit supérieure à 0,99 ?

On note n le nombre de coyotes capturés et Y la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,694$ comptant le nombre de tests positifs parmi eux. On cherche le plus petit n tel que $P(Y \geq 1) > 0,99$.

Or $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,306^n$ (probabilité de l'évènement contraire, qu'aucun test ne soit positif).

On résout donc dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $1 - 0,306^n > 0,99 \iff 0,306^n < 0,01$.

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$: $\ln(0,306^n) < \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,306) < \ln(0,01)$.

Comme $\ln(0,306) < 0$, l'inégalité change de sens en divisant : $n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,306)} \approx 3,89$.

Donc, les vétérinaires doivent capturer au moins **4 coyotes**.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 2)

On considère un cube $ABCDEFGH$ et K le milieu du segment $[BC]$. L'espace est muni du repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, et on s'intéresse au tétraèdre $EFGK$. On rappelle que le volume d'un tétraèdre vaut $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base. **1. Donner les coordonnées des points E, F, G et K.**

Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, le cube $ABCDEFGH$ a pour sommets $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $F(1; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$ et $H(0; 1; 1)$; K , milieu de $[BC]$, a donc pour coordonnées $E(0; 0; 1)$, $F(1; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$ et $K\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$.

2. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK) .

D'après les coordonnées précédentes, $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EK} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = 2 \times 1 + (-2) \times 1 + 1 \times 0 = 2 - 2 + 0 = 0$, donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont orthogonaux.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{EK} = 2 \times 1 + (-2) \times \frac{1}{2} + 1 \times (-1) = 2 - 1 - 1 = 0$, donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont orthogonaux.

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGK) : $\vec{n}$ est donc orthogonal au plan (EGK) .

3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne $2x - 2y + z - 1 = 0$.

D'après la question précédente, $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EGK) , qui admet donc une équation cartésienne de la forme $2x - 2y + z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Comme $E(0; 0; 1)$ appartient au plan (EGK) : $2 \times 0 - 2 \times 0 + 1 + d = 0 \iff d = -1$.

Donc, une équation cartésienne du plan (EGK) est $2x - 2y + z - 1 = 0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) et passant par F.

La droite (d) , orthogonale au plan (EGK) , admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur ; elle passe par $F(1; 0; 1)$.

Donc, une représentation paramétrique de (d) est :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right)$.

L est l'unique point d'intersection de la droite (d) et du plan (EGK) . On remplace les coordonnées paramétriques de (d) dans l'équation du plan (EGK) : $2(1 + 2t) - 2(-2t) + (1 + t) - 1 = 0$.

En développant : $2 + 4t + 4t + 1 + t - 1 = 0 \iff 9t + 2 = 0 \iff t = -\frac{2}{9}$.

En remplaçant $t = -\frac{2}{9}$ dans les équations de (d) : $x = 1 + 2 \times \left(-\frac{2}{9}\right) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$; $y = -2 \times \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}$; $z = 1 + \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{7}{9}$.

Donc, L a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right)$.

6. Justifier que la longueur LF est égale à $\frac{2}{3}$.

Avec $L\left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right)$ et $F(1; 0; 1)$, on a $\overrightarrow{LF} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

Donc, $LF = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{4}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

7. Calculer l'aire du triangle EFG . En déduire que le volume du tétraèdre $EFGK$ est égal à $\frac{1}{6}$.

On a $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$: le triangle EFG est rectangle en F , avec $EF = 1$ et $FG = 1$.

Son aire vaut donc $\mathcal{A}(EFG) = \frac{EF \times FG}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.

Le triangle EFG est situé dans le plan d'équation $z = 1$ (contenant E , F et G) ; la hauteur du tétraèdre $EFGK$ relative à cette base est donc la distance de K , d'altitude $z = 0$, à ce plan, soit $h = 1$.

Donc, $\mathcal{V}(EFGK) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(EFG) \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$.

8. Dédurre des questions précédentes l'aire du triangle EGK.

Le volume du tétraèdre EFGK peut aussi se calculer en prenant pour base le triangle EGK et pour hauteur la longueur LF, puisque L est le projeté orthogonal de F sur le plan (EGK) : $\mathcal{V}(\text{EFGK}) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{EGK}) \times \text{LF}$.

D'après les questions précédentes, $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{EGK}) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \times \mathcal{A}(\text{EGK})$.

Donc, $\mathcal{A}(\text{EGK}) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{6} \times \frac{9}{2} = \frac{3}{4}$.

9. On considère les points P, milieu de [EG], M, milieu de [EK], et N, milieu de [GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.

D'après le théorème des milieux appliqué dans le triangle EGK, les côtés du triangle PMN mesurent chacun la moitié des côtés correspondants du triangle EGK.

L'aire du triangle PMN vaut donc $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ fois celle du triangle EGK : $\mathcal{A}(\text{PMN}) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$.

Les points P, M et N appartiennent tous les trois au plan (EGK) : la hauteur du tétraèdre FPMN relative à la base PMN est donc la même que celle du tétraèdre EFGK relative à la base EGK, à savoir $\text{LF} = \frac{2}{3}$.

Donc, $\mathcal{V}(\text{FPMN}) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{PMN}) \times \text{LF} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{24}$.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 2)

Pour les questions 1 à 3, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative de la dérivée f' est donnée : f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ et sa courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ (courbe positive avant, négative après). Question 1 : que peut-on affirmer sur f ? a. f admet un maximum en $-\frac{3}{2}$; b. f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$; c. f admet un minimum en $-\frac{1}{2}$; d. la courbe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse -1 .

Par lecture graphique, f' est positive sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ et négative sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$: f est donc croissante puis décroissante, avec un changement de sens de variation en $-\frac{1}{2}$.

f admet donc un maximum en $-\frac{1}{2}$. Donc, la réponse est **b**.

Question 2 : a. f est convexe sur $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[$; b. f est convexe sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$; c. la courbe de f n'admet pas de point d'inflexion; d. f est concave sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$.

Une fonction est convexe sur un intervalle lorsque sa dérivée y est croissante. Or, par lecture graphique, la courbe de f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$: f' est donc croissante sur $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[$.

f est donc convexe sur cet intervalle. Donc, la réponse est a.

Question 3 : la dérivée seconde f'' de f vérifie : a. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$; b. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in [-2 ; -1]$; c. $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$; d. $f''(-3) = 0$.

D'après la question précédente, f' est croissante sur $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[$ et, par lecture graphique, décroissante sur $\left]-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$: f' change donc de sens de variation en $-\frac{3}{2}$, où elle admet un maximum.

Comme f'' est la dérivée de f' , on a donc $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$. Donc, la réponse est c.

Question 4 : on considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n \leq w_n$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3$. a. la suite (v_n) converge; b. si (u_n) est croissante alors (v_n) est minorée par u_0 ; c. $1 \leq v_0 \leq 3$; d. la suite (v_n) diverge.

Si (u_n) est croissante, alors pour tout entier naturel n , $u_0 \leq u_n$. Or, par hypothèse, $u_n \leq v_n$ pour tout n , donc $u_0 \leq v_n$ pour tout entier naturel n .

La suite (v_n) est donc minorée par u_0 . Donc, la réponse est b.

(Les autres propositions sont fausses en général : le théorème des gendarmes ne s'applique ici que si u_n et w_n avaient la même limite, ce qui n'est pas le cas puisque $1 \neq 3$; on ne peut donc rien conclure sur la convergence de (v_n) , ni sur l'encadrement de v_0 en particulier.)

Question 5 : on considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$. a. la suite (u_n) diverge; b. la suite (u_n) converge; c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$; d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

L'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$, vraie pour tout entier naturel n non nul, signifie que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

De plus, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq 1$: la suite (u_n) est donc majorée par 1 à partir du rang 2, et donc bornée.

Une suite croissante et majorée converge, d'après le théorème de convergence monotone : (u_n) converge. On ne peut cependant pas déterminer sa limite exacte avec les seules informations

données (l'encadrement ne donne qu'une majoration, pas la valeur précise de la limite). Donc, la réponse est **b**.

Question 6 : on considère une suite réelle (u_n) telle que, pour tout entier naturel n , $n < u_n < n + 1$. **a.** il existe un entier naturel N tel que u_N est un entier ; **b.** la suite (u_n) est croissante ; **c.** la suite (u_n) est convergente ; **d.** la suite (u_n) n'a pas de limite.

Au rang n : $n < u_n < n + 1$. Au rang $n + 1$: $n + 1 < u_{n+1} < n + 2$.

En particulier, $u_n < n + 1 < u_{n+1}$, donc $u_n < u_{n+1}$ pour tout entier naturel n .

La suite (u_n) est donc croissante. Donc, la réponse est **b**.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

Partie 1 — Stéphanie s'entraîne au basket-ball. Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points, et parmi eux 60 % sont réussis ; les trois quarts restants sont des tirs à trois points, et parmi eux 35 % sont réussis. Elle réalise un tir ; on note D l'évènement « le tir choisi est un tir à deux points » et R l'évènement « le tir est réussi ». 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

L'arbre part de la racine avec les branches D (probabilité 0,25) et $\overline{D}$ (probabilité 0,75). Sur la branche D , les sous-branches sont R (probabilité 0,6) et $\overline{R}$ (probabilité 0,4). Sur la branche $\overline{D}$, les sous-branches sont R (probabilité 0,35) et $\overline{R}$ (probabilité 0,65).

2. Calculer la probabilité $P(\overline{D} \cap R)$.

D'après la lecture de l'arbre : $P(\overline{D} \cap R) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(R) = 0,75 \times 0,35 = \mathbf{0,2625}$.

3. Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir quelconque est égale à 0,4125.

On calcule de même $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,25 \times 0,6 = 0,15$.

Les évènements D et $\overline{D}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(R) = P(D \cap R) + P(\overline{D} \cap R) = 0,15 + 0,2625 = \mathbf{0,4125}$, ce qui est le résultat annoncé.

4. Sachant que Stéphanie a réussi son tir, calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points (arrondir au centième).

D'après la définition de la probabilité conditionnelle : $P_R(\overline{D}) = \frac{P(R \cap \overline{D})}{P(R)} = \frac{0,2625}{0,4125}$.

On obtient $P_R(\overline{D}) \approx 0,6364$, soit, arrondi au centième, **0,64**.

Partie 2 — Stéphanie réalise une série de 10 tirs à trois points, supposés indépendants ; on rappelle que la probabilité de réussir un tir à trois points vaut 0,35. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de tirs réussis. 1. Justifier que X suit une loi binomiale, et préciser ses paramètres.

Les 10 tirs sont indépendants et chacun n'a que deux issues possibles (réussi ou raté), avec la même probabilité de succès 0,35 à chaque tir : X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$.

2. Calculer l'espérance de X , et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour une loi binomiale, $E(X) = np = 10 \times 0,35 = 3,5$. Cela signifie que, si Stéphanie répète très souvent des séries de 10 tirs à trois points, elle réussira en moyenne 3,5 tirs par série.

3. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus sur cette série de 10 (arrondir au centième).

Rater 4 tirs ou plus sur 10, c'est en réussissant au plus $10 - 4 = 6$: l'évènement demandé correspond donc à $(X \leq 6)$.

À la calculatrice, avec X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$: $P(X \leq 6) \approx 0,97$.

4. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs sur cette série de 10 (arrondir au centième).

Rater au plus 4 tirs sur 10, c'est en réussissant au moins $10 - 4 = 6$: l'évènement demandé correspond donc à $(X \geq 6)$.

À la calculatrice : $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0,09$.

Partie 3 — Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points indépendants, avec n entier naturel non nul, la probabilité de réussir chaque tir restant égale à 0,35. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité qu'elle réussisse au moins un tir parmi les n soit supérieure ou égale à 0,99.

La probabilité de rater un tir donné vaut $1 - 0,35 = 0,65$. Comme les tirs sont indépendants, la probabilité de les rater tous les n vaut $0,65^n$.

La probabilité de réussir au moins un tir parmi les n est donc l'évènement contraire de « tout rater », de probabilité $1 - 0,65^n$.

On cherche le plus petit entier naturel non nul n tel que $1 - 0,65^n \geq 0,99$, c'est-à-dire $0,65^n \leq 0,01$.

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, cette inégalité équivaut à $\ln(0,65^n) \leq \ln(0,01)$, soit $n \ln(0,65) \leq \ln(0,01)$.

Comme $\ln(0,65) < 0$, diviser par $\ln(0,65)$ inverse le sens de l'inégalité : $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,65)}$.

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,65)} \approx 10,69$, donc le plus petit entier naturel qui convient est $n = 11$: Stéphanie doit prévoir une série d'au moins 11 tirs.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - x - 2$, deux fois dérivable sur cet intervalle, de dérivée f' , de dérivée seconde f'' , et de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère. **1.a Démontrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \ln(x)$.**

La fonction f est une somme de produits de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$, donc f est dérivable sur cet intervalle, et : $f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

1.b Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = e$.

On calcule $f(e) = e \ln(e) - e - 2 = e \times 1 - e - 2 = -2$ (car $\ln(e) = 1$), et $f'(e) = \ln(e) = 1$.

L'équation de la tangente en un point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, donc ici : $y = 1 \times (x - e) + (-2) = x - e - 2$.

Donc, la réponse est $T: y = x - e - 2$.

1.c Justifier que la fonction f est convexe sur $]0 ; +\infty[$.

D'après la question 1.a, $f'(x) = \ln(x)$, donc $f''(x) = \frac{1}{x}$.

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a $x > 0$, donc $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$: la fonction f est donc **convexe** sur cet intervalle.

1.d En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T .

Comme la fonction f est convexe sur $]0 ; +\infty[$, sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier au-dessus de la tangente T .

2.a Calculer la limite de f en 0.

On sait, par croissances comparées, que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$, et par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Par somme de limites : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 - 0 - 2 = -2$.

2.b Démontrer que la limite de f en $+\infty$ vaut $+\infty$.

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on peut factoriser : $f(x) = x [\ln(x) - 1] - 2$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x) - 1] = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc, par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x) - 1] = +\infty$.

Par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - 2 = +\infty$.

3. Dresser le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

D'après la question 1.a, $f'(x) = \ln(x)$. Or $\ln(x)$ est strictement négatif sur $]0 ; 1[$, nul en $x = 1$, et strictement positif sur $]1 ; +\infty[$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0 ; 1[$, puis strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$: elle admet un minimum en $x = 1$.

Ce minimum vaut $f(1) = 1 \times \ln(1) - 1 - 2 = 0 - 1 - 2 = -3$.

Le tableau de variations de f part donc de la limite -2 en 0 , décroît jusqu'au minimum -3 atteint en $x = 1$, puis croît vers $+\infty$.

4.a Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0 ; +\infty[$.

Sur $]0 ; 1[$, f est strictement décroissante et son maximum sur cet intervalle est $f(0^+) = -2$ (limite en 0) : donc $f(x) < 0$ pour tout x de $]0 ; 1[$, si bien que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $]1 ; +\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante, avec $f(1) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Comme 0 est compris entre -3 et $+\infty$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

Donc, la réponse est : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$, avec $\alpha \in]1 ; +\infty[$.

4.b Justifier que α appartient à l'intervalle $]4,3 ; 4,4[$.

On calcule $f(4,3) = 4,3 \ln(4,3) - 4,3 - 2 \approx -0,028 < 0$ et $f(4,4) = 4,4 \ln(4,4) - 4,4 - 2 \approx 0,119 > 0$.

Comme f est strictement croissante et continue sur $]1 ; +\infty[$, et que $f(4,3)$ et $f(4,4)$ sont de signes contraires, la valeur α qui annule f est encadrée par $4,3$ et $4,4$.

Donc, la réponse est $\alpha \in]4,3 ; 4,4[$.

4.c En déduire le signe de f sur $]0 ; +\infty[$.

D'après le tableau de variations de la question 3 et l'existence du seul zéro α de f (question 4.a), on peut conclure sur le signe de f .

Sur $]0 ; \alpha[$, $f(x) < 0$; en $x = \alpha$, $f(\alpha) = 0$; sur $] \alpha ; +\infty[$, $f(x) > 0$.

**5. On considère la fonction Python suivante, où l'on suppose le module `math` importé :
`def seuil(pas) : x=4.3 ; while x*log(x)-x-2 < 0 : x=x+pas ; return x`. Quelle valeur renvoie l'appel `seuil(0.01)`, et comment interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice ?**

- La fonction part de $x = 4,3$ et lui ajoute $0,01$ tant que $f(x)$ reste strictement négatif.
- Elle s'arrête dès que $f(x)$ devient positif ou nul, et renvoie alors cette valeur de x .
- En simulant ce programme pas à pas, on constate que $f(x)$ reste négatif jusqu'à $x = 4,31$ ($f(4,31) < 0$), puis devient positif dès $x = 4,32$ ($f(4,32) > 0$).
- L'appel `seuil(0.01)` renvoie donc la valeur $4,32$.
- Comme f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$ et que $f(4,31) < 0 < f(4,32)$, ceci fournit l'encadrement $4,31 < \alpha < 4,32$, c'est-à-dire un encadrement de α à $0,01$ près.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ surmonté d'une pyramide $EFGHS$, avec $DC = 6$ et $DA = DH = 4$. On pose $\vec{i} = \overrightarrow{DI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, $\vec{j} = \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}$, et l'on se place dans le repère orthonormé $(D ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On admet que $S(3 ; 2 ; 6)$. 1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.

D'après la géométrie du solide (arêtes parallèles aux vecteurs de base) : $B(6 ; 4 ; 0)$, $E(0 ; 4 ; 4)$, $F(6 ; 4 ; 4)$, $G(6 ; 0 ; 4)$.

2. Démontrer que le volume de la pyramide $EFGHS$ représente le septième du volume total de la maison. On rappelle que le volume d'une pyramide vaut $\frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}$.

La base $EFGH$ est un rectangle de côtés $EF = 6$ et $FG = 4$ (d'après les coordonnées de la question 1), donc d'aire $\mathcal{A}(EFGH) = 6 \times 4 = 24$.

Le sommet S a pour cote 6, tandis que le plan de la base $EFGH$ est à la cote 4 (coordonnées de E, F, G, H) : la hauteur de la pyramide vaut donc $6 - 4 = 2$.

Le volume de la pyramide vaut donc $V(EFGHS) = \frac{1}{3} \times 24 \times 2 = 16$.

Le parallélépipède $ABCDEFGH$ a pour arêtes 6, 4 et 4, donc pour volume $V(ABCDEFGH) = 6 \times 4 \times 4 = 96$.

Le volume total de la maison vaut donc $16 + 96 = 112$.

Enfin, $\frac{V(\text{EFGHS})}{V(\text{maison})} = \frac{16}{112} = \frac{1}{7}$, ce qui est le résultat attendu.

3.a Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS).

On calcule $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (car $F - E = (6, 4, 4) - (0, 4, 4)$) et $\overrightarrow{ES} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (car $S - E = (3, 2, 6) - (0, 4, 4)$).

On a $\overrightarrow{EF} \cdot \vec{n} = 6 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$, et $\overrightarrow{ES} \cdot \vec{n} = 3 \times 0 + (-2) \times 1 + 2 \times 1 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EFS) (les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{ES}$ ne sont manifestement pas proportionnelles) : $\vec{n}$ est donc **normal** au plan (EFS).

3.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.

Comme $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS), une équation cartésienne de ce plan est de la forme $0x + 1y + 1z + d = 0$, soit $y + z + d = 0$, où d est une constante réelle à déterminer.

Le point $E(0 ; 4 ; 4)$ appartient au plan (EFS), donc ses coordonnées vérifient l'équation : $4 + 4 + d = 0 \iff d = -8$.

L'équation cartésienne du plan (EFS) est donc $y + z - 8 = 0$, ce qui est le résultat attendu.

4.a On installe une antenne représentée par le segment $[PQ]$, avec P dans le plan (EFS), $Q(2 ; 3 ; 5,5)$, et la droite (PQ) dirigée par le vecteur $\vec{k}$. Justifier qu'une représentation paramétrique de (PQ) est $x = 2, y = 3, z = 5,5 + t$ ($t \in \mathbb{R}$).

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient à la droite (PQ), passant par Q et dirigée par $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{QM} = t\vec{k}$.

Cette égalité vectorielle équivaut à $x - 2 = 0$, $y - 3 = 0$ et $z - 5,5 = t$, c'est-à-dire à $x = 2$, $y = 3$ et $z = 5,5 + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Donc, la réponse est confirmée : $x = 2, y = 3, z = 5,5 + t$ ($t \in \mathbb{R}$) est bien une représentation paramétrique de (PQ).

4.b En déduire les coordonnées du point P.

Le point P appartient à la fois à la droite (PQ) et au plan (EFS) (d'équation $y + z - 8 = 0$). Ses coordonnées vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de (PQ) et l'équation du plan.

En substituant $y = 3$ et $z = 5,5 + t$ dans l'équation du plan : $3 + (5,5 + t) - 8 = 0 \iff t + 0,5 = 0 \iff t = -0,5$.

On obtient alors $x = 2$, $y = 3$, $z = 5,5 + (-0,5) = 5$.

Donc, la réponse est $P(2 ; 3 ; 5)$.

4.c En déduire la longueur PQ de l'antenne.

On calcule $PQ^2 = (2 - 2)^2 + (3 - 3)^2 + (5,5 - 5)^2 = 0 + 0 + 0,25 = 0,25$.

Donc $PQ = \sqrt{0,25} = 0,5$.

5. Un oiseau vole selon une trajectoire modélisée par la droite Δ de représentation paramétrique $x = -4 + 6s$, $y = 7 - 4s$, $z = 2 + 4s$ ($s \in \mathbb{R}$). Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ , puis dire si l'oiseau va percuter l'antenne représentée par le segment [PQ].

La droite (PQ) est dirigée par $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la droite Δ est dirigée par $\vec{\delta} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (les coordonnées de $\vec{k}$ nulles en x et y ne peuvent être proportionnelles à celles, non nulles, de $\vec{\delta}$) : les droites (PQ) et Δ ne sont donc pas parallèles.

Cherchons un éventuel point d'intersection en résolvant $x = 2 = -4 + 6s$, ce qui donne $6s = 6$, soit $s = 1$. On vérifie avec l'ordonnée : pour $s = 1$, $y = 7 - 4 \times 1 = 3$, ce qui correspond bien à $y = 3$ sur (PQ). Les droites sont donc sécantes.

Pour $s = 1$, la cote sur Δ vaut $z = 2 + 4 \times 1 = 6$. Sur (PQ), cette cote correspond à $5,5 + t = 6$, soit $t = 0,5$.

Le point d'intersection des deux droites a donc pour coordonnées $(2 ; 3 ; 6)$, et correspond au paramètre $t = 0,5$ sur la droite (PQ).

Or, d'après la représentation paramétrique de (PQ) et les points P et Q trouvés précédemment, le point P correspond à $t = -0,5$ et le point Q correspond à $t = 0$: le segment [PQ] correspond donc exactement aux valeurs de t comprises entre $-0,5$ et 0 .

Comme le paramètre $t = 0,5$ du point d'intersection n'appartient pas à cet intervalle $[-0,5 ; 0]$, le point d'intersection des deux droites n'appartient pas au segment [PQ].

Donc, la réponse est : l'oiseau ne va pas percuter l'antenne représentée par le segment [PQ] ; sa

trajectoire croise la droite (PQ) en un point situé au-delà de Q, à une demi-unité de distance au-dessus de l'extrémité Q de l'antenne.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 1)

1.a. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 6x + 4 \ln(x)$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

Quand x tend vers 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -6x = 0$, tandis que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} 4 \ln(x) = -\infty$.

Par somme de limites, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

1.b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Pour $x > 0$, on factorise : $x^2 - 6x = x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{6}{x}\right) = 1$, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, par produit de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right) = +\infty.$$

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \ln(x) = +\infty$, donc, par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2.a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et $f'(x) = 2x - 6 + \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$.

2.b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f .

Comme $x > 0$ sur l'intervalle d'étude, le signe de $f'(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ est celui du numérateur $2x^2 - 6x + 4$, c'est-à-dire celui de $x^2 - 3x + 2$ (même signe, car on divise par $2 > 0$).

Ce trinôme a pour racines évidentes 1 et 2 (leur somme vaut 3 et leur produit 2, ce qui correspond bien aux coefficients), donc $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Un trinôme du second degré de coefficient dominant positif est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur : $f'(x) < 0$ sur $]1 ; 2[$ et $f'(x) > 0$ sur $]0 ; 1[\cup]2 ; +\infty[$, avec $f'(1) = f'(2) = 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; 1]$, strictement décroissante sur $[1 ; 2]$, puis strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.

On calcule les valeurs aux bornes : $f(1) = 1 - 6 + 4 \ln(1) = 1 - 6 + 0 = -5$, et $f(2) = 4 - 12 + 4 \ln(2) = 4 \ln(2) - 8 \approx -5,23$.

Le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$ part donc de $-\infty$ (limite en 0), croît jusqu'à -5 en $x = 1$, décroît jusqu'à $4 \ln(2) - 8$ en $x = 2$, puis croît vers $+\infty$ (limite en $+\infty$).

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4 ; 5]$.

On calcule les images des bornes : $f(4) = 16 - 24 + 4 \ln(4) = -8 + 8 \ln(2) \approx -2,45$ et $f(5) = 25 - 30 + 4 \ln(5) = 4 \ln(5) - 5 \approx 1,44$.

Ainsi $f(4) < 0 < f(5)$. Or, d'après la question précédente, l'intervalle $[4 ; 5]$ est inclus dans $[2 ; +\infty[$, sur lequel f est continue (car dérivable) et strictement croissante.

Donc, d'après le théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[4 ; 5]$.

4.a. On admet que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}$. Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$ et préciser les coordonnées exactes des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Comme $x > 0$, le dénominateur x^2 est strictement positif, donc le signe de $f''(x)$ est celui du numérateur $2x^2 - 4$.

On résout $2x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$; seule la solution $x = \sqrt{2}$ appartient à $]0 ; +\infty[$.

Le trinôme $2x^2 - 4$ est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur, donc, restreint à $]0 ; +\infty[$: $f''(x) < 0$ sur $]0 ; \sqrt{2}[$ et $f''(x) > 0$ sur $]\sqrt{2} ; +\infty[$.

Donc f est concave sur $]0 ; \sqrt{2}]$ et convexe sur $[\sqrt{2} ; +\infty[$.

Comme f'' s'annule en $x = \sqrt{2}$ en changeant de signe, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion, d'abscisse $\sqrt{2}$.

Son ordonnée vaut $f(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \ln(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \times \frac{1}{2} \ln(2) = 2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln(2)$.

Donc, le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées exactes $(\sqrt{2} ; 2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln(2))$.

4.b. On note A le point de coordonnées $(\sqrt{2} ; f(\sqrt{2}))$. Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$ et M le point de coordonnées $(t ; f(t))$. En utilisant la question 4.a., indiquer, selon la valeur de t , les positions relatives du segment $[AM]$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Le segment $[AM]$ est une corde de la courbe $\mathcal{C}_f$ joignant le point d'inflexion A au point M.

Si $t \in]0 ; \sqrt{2}[$, les points A et M sont tous deux situés sur la partie de $\mathcal{C}_f$ où f est concave : une corde d'une courbe concave est toujours située en dessous de la courbe, donc le segment $[AM]$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$.

Si $t \in]\sqrt{2} ; +\infty[$, les points A et M sont tous deux situés sur la partie de $\mathcal{C}_f$ où f est convexe : une corde d'une courbe convexe est toujours située au-dessus de la courbe, donc le segment $[AM]$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 1)

1.a. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 e^x$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. Calculer u_1 puis u_2 (valeurs exactes puis approchées à 10^{-3} près).

$$u_1 = f(u_0) = f(-1) = (-1)^3 e^{-1} = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,368.$$

$$u_2 = f(u_1) = (-e^{-1})^3 \times e^{-e^{-1}} = -e^{-3} \times e^{-e^{-1}} = -e^{-3-e^{-1}} \approx -0,034.$$

1.b. Le code Python ci-dessous définit une fonction `fonc(n)` qui, partant de `u=-1`, applique `n` fois de suite l'instruction `u = u**3*exp(u)` avant de renvoyer `u`. Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc(2)`, arrondie à 10^{-3} près.

La boucle applique deux fois la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ à partir de $u_0 = -1$, donc `fonc(2)` renvoie la valeur de u_2 , soit environ **-0,034**.

2.a. Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) = x^2 e^x (x + 3)$.

La fonction $f(x) = x^3 e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. En dérivant ce produit, on obtient $f'(x) = 3x^2 \times e^x + x^3 \times e^x = x^2 e^x (3 + x)$, ce qui est bien le résultat annoncé.

2.b. Justifier le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (minimum en $x = -3$, limites 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$).

Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ et $e^x > 0$, donc le signe de $f'(x) = x^2 e^x (x + 3)$ est celui de $(x + 3)$, sauf en $x = 0$ où $f'(x) = 0$ car $x^2 = 0$.

On a $x + 3 < 0 \iff x < -3$: donc $f'(x) < 0$ sur $] -\infty ; -3[$, et f y est strictement décroissante.

On a $x + 3 > 0 \iff x > -3$: donc $f'(x) > 0$ sur $] -3 ; +\infty[$ (sauf au point isolé $x = 0$ où f' s'annule sans changer de signe), et f y est strictement croissante.

La fonction f admet donc un minimum en $x = -3$, qui vaut $f(-3) = (-3)^3 \times e^{-3} = -27e^{-3} = -\frac{27}{e^3} \approx -1,344$.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc, par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Ceci justifie bien le tableau de variations donné dans l'énoncé.

2.c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

Initialisation : on a $u_0 = -1$ et $u_1 = -e^{-1} \approx -0,368$. On vérifie bien $-1 \leq -1 \leq -0,368 \leq 0$, donc l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : supposons que, pour un entier naturel n fixé, on ait $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

D'après la question 2.b., la fonction f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$, donc en particulier sur $[-1 ; 0]$, qui contient tous les termes encadrés par hypothèse de récurrence.

En appliquant f , qui est croissante sur cet intervalle, à chaque membre de l'inégalité $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$, on obtient $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(0)$, c'est-à-dire $u_1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(0)$.

Or $f(0) = 0^3 \times e^0 = 0$ et $u_1 = -e^{-1} \approx -0,368 \geq -1$, donc on obtient bien $-1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0$: la relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et il est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

2.d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est donc croissante.

Toujours d'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq 0$, donc $u_n \leq 0$ (en particulier pour $u_0 = -1 \leq 0$) : la suite (u_n) est majorée par 0.

Donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) , croissante et majorée, est convergente vers une limite ℓ vérifiant $\ell \leq 0$.

2.e. On note ℓ la limite de (u_n) , solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer ℓ , sachant que l'équation $x^2e^x - 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $] -1 ; 0[$.

D'après la question 2.c., tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[-1 ; 0]$, donc $\ell \in [-1 ; 0]$.

On résout l'équation $f(x) = x$ sur cet intervalle : $x^3e^x = x \iff x^3e^x - x = 0 \iff x(x^2e^x - 1) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul, donc $x = 0$ ou $x^2e^x - 1 = 0$.

Or, par hypothèse, l'équation $x^2e^x - 1 = 0$ n'a pas de solution dans $] -1 ; 0[$, donc, sur l'intervalle $[-1 ; 0]$, la seule solution possible de $f(x) = x$ est $x = 0$ (qui appartient bien à $[-1 ; 0]$).

Donc, $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 1)

1. Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'un prisme EFIHGJ, de base triangulaire EIF isocèle en I, avec $AB=3$, $AD=2$, $AE=1$. On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{AD}$, $\vec{k} = \vec{AE}$. Donner les coordonnées du point G.

Dans ce repère, on a $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 1\vec{k}$, donc les coordonnées de G sont **G(3 ; 2 ; 1)**.

2. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (2 ; 0 ; -3) est normal au plan (EHI). Déterminer une équation cartésienne du plan (EHI).

Une équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(2 ; 0 ; -3)$ est de la forme $2x + 0y - 3z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Dans le repère choisi, on a $E(0 ; 0 ; 1)$ (puisque $\vec{AE} = \vec{k}$), et E appartient au plan (EHI), donc $2 \times 0 - 3 \times 1 = d$, soit $d = -3$.

Donc, une équation cartésienne du plan (EHI) est $2x - 3z = -3$.

3. Déterminer les coordonnées du point I.

Le triangle EIF est isocèle en I, donc le projeté orthogonal de I sur la droite (EF) est le milieu de [EF].

Or, dans le repère choisi, $E(0 ; 0 ; 1)$ et $F(3 ; 0 ; 1)$ (F ayant même ordonnée et cote que E, avec l'abscisse de B), donc le milieu de [EF] a pour abscisse $\frac{0+3}{2} = 1,5$ et pour ordonnée 0.

Le point I a donc la même abscisse (1,5) et la même ordonnée (0) que ce projeté, par symétrie du toit par rapport au plan d'équation $y = 0$ contenant A, B, E, F.

Il reste à déterminer la cote de I : puisque I appartient au plan (EHI) d'équation $2x - 3z = -3$, on a $2 \times 1,5 - 3z = -3 \iff 3 - 3z = -3 \iff 3z = 6 \iff z = 2$.

Donc, les coordonnées du point I sont **I(1,5 ; 0 ; 2)**.

4. Déterminer une mesure au degré près de l'angle $\widehat{EIF}$.

Avec $I(1,5 ; 0 ; 2)$, $E(0 ; 0 ; 1)$ et $F(3 ; 0 ; 1)$, on calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{IE}(-1,5 ; 0 ; -1)$ et $\vec{IF}(1,5 ; 0 ; -1)$.

On calcule les normes : $IE^2 = (-1,5)^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2,25 + 1 = 3,25 = \frac{13}{4}$, donc $IE = \frac{\sqrt{13}}{2}$; de même $IF = \frac{\sqrt{13}}{2}$ (le triangle EIF est bien isocèle en I).

On calcule le produit scalaire : $\vec{IE} \cdot \vec{IF} = (-1,5) \times 1,5 + 0 \times 0 + (-1) \times (-1) = -2,25 + 1 = -1,25$.

Or $\vec{IE} \cdot \vec{IF} = IE \times IF \times \cos(\widehat{EIF})$, donc $\cos(\widehat{EIF}) = \frac{-1,25}{\frac{\sqrt{13}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{-1,25}{\frac{13}{4}} = -\frac{5}{13}$.

La calculatrice donne alors $\widehat{EIF} = \arccos\left(-\frac{5}{13}\right) \approx 112,6^\circ$, soit **113°** au degré près.

5.a. On souhaite creuser une tranchée depuis un relais électrique R de coordonnées (6 ; -3 ; -1), assimilée à un segment de la droite Δ passant par R et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-3 ; 4 ; 1)$. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ .

Un point M(x ; y ; z) appartient à Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que $R\vec{M} = t\vec{u}$, ce qui donne la représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = -1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.b. On admet qu'une équation du plan (BFG) est $x = 3$. Soit K le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (BFG). Déterminer les coordonnées de K.

Le point K appartient à la fois à Δ et au plan (BFG), donc ses coordonnées vérifient à la fois la représentation paramétrique de Δ et l'équation $x = 3$.

En substituant $x = 6 - 3t$ dans $x = 3$, on obtient $6 - 3t = 3 \iff 3t = 3 \iff t = 1$.

On reporte $t = 1$ dans les deux autres équations : $y = -3 + 4 \times 1 = 1$ et $z = -1 + 1 = 0$.

Donc, les coordonnées du point K sont **K(3 ; 1 ; 0)**.

5.c. Le point K appartient-il à l'arête [BC] ?

Dans le repère choisi, B(3 ; 0 ; 0) et C(3 ; 2 ; 0) (C ayant même abscisse et cote que B, et l'ordonnée de D).

Le milieu de [BC] a pour coordonnées $\left(\frac{3+3}{2} ; \frac{0+2}{2} ; \frac{0+0}{2}\right) = (3 ; 1 ; 0)$, qui sont exactement les coordonnées de K.

Donc K est le milieu de [BC], et en particulier, K appartient bien à l'arête [BC] : la tranchée atteindra donc la maison au niveau de cette arête.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 1)

Dans un pays, 7 % de la population est atteinte d'une certaine maladie. Un test de dépistage a été mis au point : chez les personnes malades, le test est négatif dans 20 % des cas ; chez les personnes saines, le test est positif dans 1 % des cas. On choisit une personne au hasard dans la population et on la teste. On note M l'évènement « la personne est malade » et T l'évènement « le test est positif ». 1. Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$ (un arbre pondéré peut aider).

On construit un arbre pondéré à deux niveaux. Le premier niveau distingue M (probabilité $P(M) = 0,07$) et $\overline{M}$ (probabilité $P(\overline{M}) = 1 - 0,07 = 0,93$).

Chez les malades, le test est négatif dans 20 % des cas, donc positif dans les 80 % restants : $P_M(T) = 0,8$ et $P_M(\overline{T}) = 0,2$.

Chez les personnes saines, le test est positif dans 1 % des cas : $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,99$.

D'après la définition des probabilités conditionnelles sur une branche de l'arbre : $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = \mathbf{0,056}$.

2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie soit positif vaut 0,0653.

Les événements M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers (chaque personne est soit malade, soit saine). D'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$.

On calcule la seconde branche : $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093$.

D'où $P(T) = 0,056 + 0,0093 = \mathbf{0,0653}$, ce qui est le résultat annoncé.

3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?

$P_M(T)$ est la probabilité que le test soit positif sachant que la personne est malade : c'est une caractéristique technique du test, fixée à l'avance et connue avant tout dépistage.

$P_T(M)$ est la probabilité que la personne soit réellement malade sachant que son test est positif : c'est l'information qui intéresse un patient ou un médecin une fois le résultat du test obtenu.

Donc, la réponse est que, dans un contexte de dépistage, il est plus pertinent de connaître $P_T(M)$, qui répond directement à la question « ce test positif signifie-t-il vraiment que je suis malade ? ».

4. On considère que la personne choisie a eu un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? (arrondir au centième)

D'après la définition de la probabilité conditionnelle : $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,056}{0,0653}$.

Donc, la réponse est $P_T(M) \approx \mathbf{0,86}$ au centième près.

5.a On choisit, avec remise, 10 personnes au hasard dans la population, et X compte parmi elles le nombre de tests positifs. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .

Le tirage avec remise assure l'indépendance des 10 tirages, chacun ayant deux issues possibles (test positif ou non) avec la même probabilité de succès $p = P(T) = 0,0653$ à chaque tirage. Donc, la réponse est que X suit la **loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,0653$** .

5.b Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif (arrondir au centième).

D'après la formule de la loi binomiale : $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^8$.

Donc, la réponse est $P(X = 2) \approx 0,11$ au centième près.

6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif soit supérieure à 99 %.

Soit n le nombre de personnes testées et Y la variable aléatoire qui compte, parmi elles, le nombre de tests positifs. Le tirage avec remise assure que Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,0653$.

L'évènement contraire de « au moins un test positif » est « aucun test positif », c'est-à-dire $Y = 0$. On cherche donc le plus petit entier n tel que $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) \geq 0,99$.

Or $P(Y = 0) = (1 - 0,0653)^n = 0,9347^n$, donc l'inégalité devient $1 - 0,9347^n \geq 0,99 \iff 0,9347^n \leq 0,01$.

En appliquant le logarithme népérien, strictement croissant, des deux côtés : $n \ln(0,9347) \leq \ln(0,01)$. Comme $\ln(0,9347) < 0$, diviser par ce nombre inverse le sens de l'inégalité : $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9347)}$.

À la calculatrice, $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9347)} \approx 68,19$. Le plus petit entier n vérifiant cette inégalité est donc $n = 69$ (on vérifie qu'avec $n = 68$, $1 - 0,9347^{68} \approx 0,9899 < 0,99$, alors qu'avec $n = 69$, $1 - 0,9347^{69} \approx 0,9905 \geq 0,99$).

Donc, la réponse est qu'il faut tester au minimum **69 personnes**.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 1)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$. **1.a** Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 , sous forme de fractions irréductibles.

$$u_1 = \frac{u_0}{1 + u_0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$u_2 = \frac{u_1}{1 + u_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$u_3 = \frac{u_2}{1 + u_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}.$$

1.b Recopier et compléter les lignes 3 et 6 du script Python ci-dessous pour que ‘liste(k)’ prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des valeurs de u_0 à u_k .

- def liste(k) :
- L = []
- u = 1
- for i in range(0, k+1) :
- L.append(u)
- u = u / (1 + u)
- return L

2. On admet que, pour tout entier naturel n , u_n est strictement positif. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

$$\text{On étudie le signe de } u_{n+1} - u_n \text{ pour tout entier naturel } n : u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1 + u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(1 + u_n)}{1 + u_n} = \frac{u_n - u_n - u_n^2}{1 + u_n} = \frac{-u_n^2}{1 + u_n}.$$

Comme u_n est strictement positif pour tout n , on a $u_n^2 > 0$ et $1 + u_n > 0$, donc $\frac{-u_n^2}{1 + u_n} < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel n .

Donc, la réponse est que la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

La suite (u_n) est strictement décroissante (question précédente) et minorée par 0 (car u_n est strictement positif pour tout n , donc en particulier $u_n \geq 0$). Donc, la réponse est que, d'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) **converge** vers une limite réelle ℓ , avec $\ell \geq 0$.

4. Déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n) .

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+x}$. On a alors $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

La fonction f est continue sur $[0 ; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. La limite ℓ de la suite (u_n) vérifie donc l'égalité $f(\ell) = \ell$.

$$\text{On résout cette équation : } \frac{\ell}{1+\ell} = \ell \iff \ell = \ell(1+\ell) \iff \ell = \ell + \ell^2 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0.$$

Donc, la réponse est que la suite (u_n) converge vers **0**.

5.a Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .

D'après les premiers termes calculés à la question 1.a ($u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{3}$, $u_3 = \frac{1}{4}$), on peut conjecturer que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{n+1}$.

5.b Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

Notons P_n la proposition : $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Initialisation : pour $n = 0$, $\frac{1}{0+1} = 1 = u_0$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que P_n soit vraie pour un entier naturel n fixé, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{n+1}$. Montrons que P_{n+1} est alors vraie.

On a $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)+1}$: la relation est donc vraie au rang $n+1$, ce qui montre que P_{n+1} est vraie.

Comme P_0 est vraie, et que pour tout entier naturel n , P_n vraie entraîne P_{n+1} vraie, on peut conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 1)

L'espace est muni d'un repère orthonormal. On considère les points $A(2 ; -1 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; -3)$, $C(6 ; 6 ; 1)$, $E(1 ; 2 ; 4)$, et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1.a Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ à partir de celles de A, B et C : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1-2 \\ 0-(-1) \\ -3-0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6-2 \\ 6-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Leur produit scalaire vaut $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \times 4 + 1 \times 7 + (-3) \times 1 = -4 + 7 - 3 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc orthogonaux. Donc, la réponse est que le triangle ABC est bien rectangle en A.

1.b Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.

$$\text{On a } \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ (l'opposé de } \overrightarrow{AB} \text{) et } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 6-1 \\ 6-0 \\ 1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Leur produit scalaire vaut $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \times 5 + (-1) \times 6 + 3 \times 4 = 5 - 6 + 12 = 11$.

On calcule ensuite les normes : $BA = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$, et $BC = \sqrt{5^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 36 + 16} = \sqrt{77}$.

1.c En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$, arrondie au degré.

D'après la formule du produit scalaire avec les normes et le cosinus de l'angle formé : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$.

On remarque que $\sqrt{77} = \sqrt{11 \times 7} = \sqrt{11} \times \sqrt{7}$, donc l'égalité devient $11 = \sqrt{11} \times \sqrt{11} \times \sqrt{7} \times \cos(\widehat{ABC}) = 11\sqrt{7} \times \cos(\widehat{ABC})$.

On en déduit $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{1}{\sqrt{7}}$, d'où, à la calculatrice, $\widehat{ABC} \approx 68$ degrés (au degré près).

2.a Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC).

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, d'équation $2x - y - z + 4 = 0$, est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (les coefficients de x , y et z).

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires puisque ABC est un triangle (question 1.a), donc ils dirigent le plan (ABC).

On calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-1) + (-1) \times 1 + (-1) \times (-3) = -2 - 1 + 3 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 4 + (-1) \times 7 + (-1) \times 1 = 8 - 7 - 1 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : c'est un vecteur normal à ce plan, mais aussi au plan $\mathcal{P}$ par définition. Deux plans de même vecteur normal sont parallèles.

Donc, la réponse est que le plan $\mathcal{P}$ est bien **parallèle** au plan (ABC).

2.b En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Le plan (ABC), parallèle au plan $\mathcal{P}$ et admettant le même vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, a une équation cartésienne de la forme $2x - y - z + d = 0$, où d est une constante à déterminer.

Comme $A(2 ; -1 ; 0)$ appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient l'équation : $2 \times 2 - (-1) - 0 + d = 0 \iff 4 + 1 + d = 0 \iff d = -5$.

Donc, la réponse est que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x - y - z - 5 = 0$.

2.c Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.

La droite $\mathcal{D}$, orthogonale au plan (ABC), admet pour vecteur directeur le vecteur normal de ce plan, soit $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{EM} = t\vec{n}$ pour un certain réel t , avec $E(1 ; 2 ; 4)$, c'est-à-dire $x - 1 = 2t$, $y - 2 = -t$ et $z - 4 = -t$.

Donc, la réponse est que la droite $\mathcal{D}$ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

2.d Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4 ; \frac{1}{2} ; \frac{5}{2}\right)$.

Le point H, projeté orthogonal de E sur le plan (ABC), est l'unique point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ (orthogonale au plan et passant par E) avec le plan (ABC).

Ses coordonnées vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ et l'équation $2x - y - z - 5 = 0$ du plan (ABC). En substituant $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 4 - t$ dans cette équation : $2(1 + 2t) - (2 - t) - (4 - t) - 5 = 0$.

En développant : $2 + 4t - 2 + t - 4 + t - 5 = 0 \iff 6t - 9 = 0 \iff t = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

En remplaçant $t = \frac{3}{2}$ dans la représentation paramétrique : $x = 1 + 2 \times \frac{3}{2} = 4$, $y = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, $z = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Donc, la réponse est que H a bien pour coordonnées $\left(4 ; \frac{1}{2} ; \frac{5}{2}\right)$.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée. Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE vaut 16,5 unités de volume.

Le triangle ABC est rectangle en A (question 1.a), donc son aire vaut $\mathcal{B} = \frac{AB \times AC}{2}$, avec $AB = \sqrt{11}$ (calculée à la question 1.b) et $AC = \sqrt{4^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 49 + 1} = \sqrt{66}$.

On a donc $\mathcal{B} = \frac{\sqrt{11} \times \sqrt{66}}{2} = \frac{\sqrt{726}}{2}$. Comme $726 = 121 \times 6 = 11^2 \times 6$, on obtient $\sqrt{726} = 11\sqrt{6}$, d'où $\mathcal{B} = \frac{11\sqrt{6}}{2}$.

La droite (HE) est orthogonale au plan (ABC) par construction : la hauteur de la pyramide ABCE, associée à la base ABC, est donc la longueur HE.

On calcule $\overrightarrow{HE} \begin{pmatrix} 1-4 \\ 2-\frac{1}{2} \\ 4-\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, d'où $HE = \sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36+9+9}{4}} = \sqrt{\frac{54}{4}} = \frac{\sqrt{54}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Le volume de la pyramide ABCE vaut donc $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times HE = \frac{1}{3} \times \frac{11\sqrt{6}}{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{33 \times 6}{4} = \frac{33 \times 6}{12} = \frac{198}{12}$.

Donc, la réponse est que le volume de la pyramide ABCE vaut bien $\mathcal{V} = 16,5$ unités de volume.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 2)

1. QCM. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - x + 1$. Parmi quatre expressions proposées, indiquer celle de la fonction dérivée f' .

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x > 0$: $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

Donc, la réponse est $f'(x) = \ln(x)$.

2. On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 [1 - \ln(x)]$. Parmi quatre affirmations sur la limite de g en 0, indiquer la correcte.

En développant, $g(x) = x^2 - x^2 \ln(x)$. D'une part, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$.

D'autre part, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0$.

Par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 - 0 = 0$. Donc, la réponse est $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 0,9x^2 - 0,1x$. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , on factorise : $f(x) = x(x^2 - 0,9x - 0,1)$. Donc $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 - 0,9x - 0,1 = 0$.

Pour l'équation du second degré $x^2 - 0,9x - 0,1 = 0$, on remarque que $x = 1$ est une racine évidente, car $1^2 - 0,9 \times 1 - 0,1 = 1 - 0,9 - 0,1 = 0$.

Le produit des deux racines d'un trinôme $x^2 + bx + c$ vaut c : ici le produit des racines vaut $-0,1$, donc la seconde racine est $\frac{-0,1}{1} = -0,1$.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc exactement trois solutions réelles : $-0,1$, 0 et 1 . Donc, la réponse est **3 solutions**.

4. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, indiquer, parmi quatre expressions, celle d'une primitive K de k .

On teste la fonction K définie sur $\mathbb{R}$ par $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$. Comme H est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une primitive de h), K est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une constante par une composée de fonctions dérivables.

Pour tout réel x : $K'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times H'(2x) = H'(2x) = h(2x)$, car $H' = h$ (H étant une primitive de h).

Donc $K'(x) = h(2x) = k(x)$ pour tout réel x : K est bien une primitive de k sur $\mathbb{R}$. Donc, la réponse est $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$.

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. Indiquer, parmi quatre équations proposées, celle de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 .

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Pour tout réel x : $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x)e^x$.

On calcule $f(1) = 1 \times e^1 = e$ et $f'(1) = (1+1)e^1 = 2e$.

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2e(x-1) + e = 2ex - 2e + e = 2ex - e$.

Donc, la réponse est $y = 2ex - e$.

6. Indiquer, parmi quatre propositions, celle qui caractérise les entiers naturels n solutions de l'inéquation $(0,2)^n < 0,001$.

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, donc, pour tout entier naturel n : $(0,2)^n < 0,001 \iff \ln((0,2)^n) < \ln(0,001) \iff n \ln(0,2) < \ln(0,001)$.

Comme $0,2 < 1$, on a $\ln(0,2) < 0$, donc diviser par $\ln(0,2)$ inverse le sens de l'inégalité : $n \ln(0,2) < \ln(0,001) \iff n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)}$.

À la calculatrice, $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)} \approx 4,29$. Les entiers naturels strictement supérieurs à $4,29$ sont donc les entiers supérieurs ou égaux à 5 .

Donc, la réponse est : les entiers naturels n tels que $n \geq 5$.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 2)

1. Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'évolution de la population est modélisée par la suite (u_n) définie par $u_0 = 40$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,008u_n(200 - u_n)$, où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$. Donner une estimation du nombre d'oiseaux au début de l'année 2022.

L'année 2022 correspond à $2021 + 1$, donc le nombre d'oiseaux recherché est estimé par u_1 .

$$u_1 = 0,008 u_0(200 - u_0) = 0,008 \times 40 \times (200 - 40) = 0,008 \times 40 \times 160 = 51,2.$$

Donc, la réponse est qu'on estime la population à environ 51 oiseaux au début de l'année 2022.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$. Résoudre dans $[0 ; 100]$ l'équation $f(x) = x$.

$$\text{Pour } x \in [0 ; 100] : f(x) = x \iff 0,008x(200 - x) = x \iff 1,6x - 0,008x^2 = x \iff 0,008x^2 - 0,6x = 0.$$

$$\text{En factorisant : } 0,008x^2 - 0,6x = 0 \iff x(0,008x - 0,6) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 0,008x - 0,6 = 0.$$

$$\text{L'équation } 0,008x - 0,6 = 0 \text{ donne } x = \frac{0,6}{0,008} = 75, \text{ valeur bien comprise dans } [0 ; 100].$$

Donc, la réponse est que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions dans $[0 ; 100]$: 0 et 75.

3.a Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0 ; 100]$ et dresser son tableau de variations.

$$\text{Pour tout } x \text{ de } [0 ; 100], \text{ en développant : } f(x) = 0,008x(200 - x) = 1,6x - 0,008x^2 = -0,008x^2 + 1,6x.$$

f est donc une fonction polynôme du second degré, de coefficient dominant $-0,008 < 0$: sa courbe représentative est une parabole tournée vers le bas, dont le sommet a pour abscisse $x_S = -\frac{1,6}{2 \times (-0,008)} = \frac{1,6}{0,016} = 100$.

Une telle fonction est strictement croissante sur $]-\infty ; x_S]$ et strictement décroissante sur $[x_S ; +\infty[$. Comme $x_S = 100$ est la borne droite de $[0 ; 100]$, f est donc strictement croissante sur tout l'intervalle $[0 ; 100]$.

On calcule les valeurs aux bornes : $f(0) = 0,008 \times 0 \times 200 = 0$ et $f(100) = 0,008 \times 100 \times 100 = 80$. Le tableau de variations de f sur $[0 ; 100]$ montre donc une croissance stricte de 0 (en $x = 0$) à 80 (en $x = 100$).

3.b En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$.

Pour tout entier naturel n , notons P_n la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$ ».

Initialisation. On a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51,2$ (question 1), donc $0 \leq 40 \leq 51,2 \leq 100$: la propriété P_0 est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que P_n est vraie, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$. Les trois nombres 0 , u_n , u_{n+1} et 100 appartiennent à $[0 ; 100]$, et f est croissante sur cet intervalle (question 3.a), donc l'inégalité est conservée par f : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(100)$.

Or $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ (par définition de la suite) et $f(100) = 80$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 80$. Comme $80 \leq 100$, on en déduit $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 100$: la propriété P_{n+1} est vraie.

Conclusion. La propriété P_0 est vraie, et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$.

3.c En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est donc croissante.

De plus, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 100$: la suite (u_n) est donc majorée par 100.

Une suite croissante et majorée converge, donc, la réponse est que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ .

3.d Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

La suite (u_n) converge vers ℓ et est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est continue sur $[0 ; 100]$ (car f est une fonction polynôme) et où l'intervalle $[0 ; 100]$ contient tous les termes de la suite ainsi que sa limite ℓ (d'après la question 3.b).

D'après le théorème du point fixe, ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[0 ; 100]$, dont on a montré (question 2) qu'elle admet exactement deux solutions : 0 et 75.

Par ailleurs, la suite (u_n) est croissante à partir de $u_0 = 40$ (question 3.b), donc $\ell \geq 40$. Cela exclut la solution 0, donc $\ell = 75$.

Donc, la réponse est que la suite converge vers $\ell = 75$. Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que, selon ce modèle, la population d'oiseaux de la colonie se stabilise à long terme autour de 75 individus.

4. On considère l'algorithme Python suivant, où 'p' est un réel donné.

- | | |
|-----------------------------|--|
| • def seuil(p) : | • # fonction qui cherche l'année où le seuil p est dépassé |
| • n = 0 | • # compteur d'années écoulées depuis 2021 |
| • u = 40 | • # valeur initiale u0 |
| • while u < p : | • # tant que le seuil n'est pas atteint |
| • n = n + 1 | • # on avance d'une année |
| • u = 0.008 * u * (200 - u) | • # on applique la relation de récurrence |
| • return (n + 2021) | • # on renvoie l'année correspondante |

4. (suite) L'exécution de 'seuil(100)' ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi, à l'aide de la question 3.

La fonction 'seuil(p)' calcule successivement les termes de la suite (u_n) en partant de $u_0 = 40$, et s'arrête dès qu'un terme atteint ou dépasse la valeur 'p', en renvoyant alors l'année correspondante.

Or, d'après la question 3, la suite (u_n) est croissante et converge vers $\ell = 75$: tous ses termes restent donc strictement inférieurs à 75, et a fortiori strictement inférieurs à 100.

Ainsi, pour 'p = 100', la condition 'u < p' (c'est-à-dire $u_n < 100$) reste vraie pour toutes les valeurs successives de n : la boucle 'while' ne s'arrête donc jamais, et la fonction tourne indéfiniment sans jamais renvoyer de résultat.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 2)

Partie 1 (première méthode) — On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1, muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Le point I est le milieu du segment [EF], K le centre du carré ADHE et O le milieu du segment [AG]. On donne $I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 1\right)$ et $K\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$. Le but de l'exercice est de calculer, de deux manières différentes, la distance du point B au plan (AIG). 1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B et G.

Le repère étant $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et le cube ayant pour arête 1, on lit directement : A(0 ; 0 ; 0) (origine du repère), B(1 ; 0 ; 0) et G(1 ; 1 ; 1).

2. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).

Les points A, I, G ne sont pas alignés (I n'est ni sur (AG), ni confondu avec A ou G), donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ forment une base du plan (AIG).

On calcule les coordonnées : $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0,5-0 \\ 0,5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

Le repère étant orthonormé, on calcule les produits scalaires à l'aide des coordonnées : $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AI} = (-1) \times 0,5 + 0,5 \times 0 + 0,5 \times 1 = -0,5 + 0 + 0,5 = 0$.

De même, $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AG} = (-1) \times 1 + 0,5 \times 1 + 0,5 \times 1 = -1 + 0,5 + 0,5 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{BK}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AIG) : il est donc orthogonal à ce plan tout entier, donc la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).

3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est $2x - y - z = 0$.

D'après la question précédente, la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG), donc tout vecteur directeur de (BK) est un vecteur normal à (AIG). Le vecteur $\vec{n} = -2\overrightarrow{BK}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, est donc normal à (AIG).

Le plan (AIG) admet donc une équation cartésienne de la forme $2x - y - z + d = 0$, où d est un réel à déterminer.

Comme A(0 ; 0 ; 0) appartient au plan (AIG), ses coordonnées vérifient l'équation : $2 \times 0 - 0 - 0 + d = 0 \iff d = 0$.

Donc, la réponse est qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est bien $2x - y - z = 0$.

4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BK).

La droite (BK) passe par B(1 ; 0 ; 0) et est dirigée par $\overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

Donc, la réponse est que (BK) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0,5t \\ z = 0,5t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

5. En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées
 $L\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

On cherche la valeur du paramètre t pour laquelle le point de (BK) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$: d'après la représentation paramétrique, $1 - t = \frac{1}{3}$ donne $t = \frac{2}{3}$, et on vérifie que $0,5 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ pour les deux autres coordonnées. Le point L de coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ appartient donc bien à la droite (BK).

On vérifie aussi que L appartient au plan (AIG), d'équation $2x - y - z = 0$ (question 3) : $2 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$. Les coordonnées de L vérifient donc l'équation du plan.

Le point L appartient donc à la fois à la droite (BK) et au plan (AIG) : c'est le point d'intersection de cette droite et de ce plan. Comme (BK) est orthogonale à (AIG) (question 2), L est donc bien le projeté orthogonal de B sur le plan (AIG).

6. Déterminer la distance du point B au plan (AIG).

La distance de B au plan (AIG) est la distance BL, puisque L est le projeté orthogonal de B sur ce plan. Le repère étant orthonormé, on calcule cette distance à partir des coordonnées de B(1 ; 0 ; 0) et $L\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$:

$$BL = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Donc, la réponse est que la distance du point B au plan (AIG) vaut $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Partie 2 (deuxième méthode) — On rappelle que le volume V d'une pyramide vaut $V = \frac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée. 1.a Justifier que, dans le tétraèdre ABIG, [GF] est la hauteur relative à la base AIB.

Le triangle AIB est inclus dans le plan (ABF), qui est le plan contenant la face avant du cube ABFE (car A, I, B appartiennent tous trois à cette face, I étant le milieu de [EF]).

Comme ABCDEFGH est un cube, l'arête [GF] est perpendiculaire à la face ABFE, donc perpendiculaire au plan (AIB). Le segment [GF] joint le sommet G du tétraèdre au plan de la base AIB en formant un angle droit avec ce plan : c'est donc bien la hauteur du tétraèdre ABIG relative à la base AIB.

1.b En déduire le volume du tétraèdre ABIG.

Le triangle AIB a pour base $[AB]$, de longueur 1 (arête du cube), et pour hauteur associée la distance de I à la droite (AB) , qui vaut ici 1 (même longueur que l'arête $[AE]$, puisque I est le milieu de $[EF]$ à la même hauteur que E et F). Son aire est donc $b_{AIB} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.

La hauteur du tétraèdre relative à cette base est $h_{GF} = GF = 1$ (arête du cube).

Donc, la réponse est $V_{ABIG} = \frac{1}{3} \times b_{AIB} \times h_{GF} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$.

2. On admet que $AI = IG = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et que $AG = \sqrt{3}$. Démontrer que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

Le triangle AIG est isocèle en I (car $AI = IG$), donc la hauteur issue de I est aussi la médiane issue de I : elle passe par le milieu O du côté $[AG]$, qui est précisément le point défini dans l'énoncé comme le milieu de $[AG]$.

On calcule la longueur IO à l'aide des coordonnées : $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ et O, milieu de $[AG]$ avec $A(0; 0; 0)$ et $G(1; 1; 1)$, a pour coordonnées $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

$$IO = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'aire du triangle AIG, dont $[AG]$ est la base et $[IO]$ la hauteur associée, vaut donc $A_{AIG} = \frac{AG \times IO}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Donc, la réponse est que l'aire du triangle AIG est bien $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

3. En déduire la distance du point B au plan (AIG).

On peut aussi calculer le volume du tétraèdre ABIG en considérant le triangle AIG comme base : la hauteur associée est alors la distance h du point B au plan (AIG), c'est-à-dire la distance cherchée.

D'après les questions précédentes, $V_{ABIG} = \frac{1}{6}$ et $A_{AIG} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, donc : $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times A_{AIG} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{4} \times h$.

On en déduit $h = \frac{1}{6} \times \frac{3 \times 4}{\sqrt{6}} = \frac{12}{6\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Donc, la réponse est que l'on retrouve bien la distance du point B au plan (AIG) égale à $\frac{\sqrt{6}}{3}$, ce qui confirme le résultat obtenu par la première méthode.

Brevet 2021 — Nouvelle-Calédonie

- 1. Affirmation : « 50 % de 10 350 c'est 10 300 ». Vrai ou faux ?**

$\frac{50}{100} \times 10\,350 = \frac{10\,350}{2} = 5\,175$. Comme $5\,175 \neq 10\,300$, l'affirmation est fausse.

- 2. Affirmation : « $\frac{7}{3}$ est la forme irréductible de $\frac{42}{18}$ ». Vrai ou faux ?**

$\frac{42}{18} = \frac{7 \times 6}{3 \times 6} = \frac{7}{3}$, et 7 et 3 n'ont pas de diviseur commun autre que 1 : l'affirmation est vraie.

- 3. Affirmation : « l'équation $2x - 4 = -x + 5$ a pour solution 3 ». Vrai ou faux ?**

En ajoutant $x + 4$ à chaque membre : $2x - 4 + x + 4 = -x + 5 + x + 4$, soit $3x = 9$, d'où $x = 3$.

L'affirmation est vraie.

- 4. Affirmation : « l'arrondi à l'unité du volume d'une boule de diamètre 21,6 cm est 42 213 cm³ ». On rappelle que le volume d'une boule de rayon R est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Vrai ou faux ?**

Le rayon est $R = \frac{21,6}{2} = 10,8$ cm, donc $V = \frac{4}{3}\pi \times 10,8^3 \approx 5\,276,67$ cm³, soit **5 277 cm³** à l'unité près.

Comme $5\,277 \neq 42\,213$, l'affirmation est fausse.

- 5. Dans un triangle BND rectangle en B, avec BD = 4 cm et BN = 12 cm, affirmation : « l'angle $\widehat{DNB}$ arrondi à l'unité vaut 18° ». Vrai ou faux ?**

Dans le triangle BND rectangle en B, [BD] est le côté opposé à l'angle $\widehat{DNB}$ et [BN] le côté adjacent : d'après SOH-CAH-TOA, $\tan \widehat{DNB} = \frac{BD}{BN} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

La calculatrice donne $\widehat{DNB} \approx 18,4^\circ$, soit **18°** à l'unité près : l'affirmation est vraie.

- 6. Un cadenas à 3 chiffres doit avoir ses deux premiers chiffres choisis parmi 1, 2 et 3 (un chiffre peut se répéter) et son dernier chiffre est 6. Affirmation : « on peut composer 6 codes différents ». Vrai ou faux ?**

Il y a 3 choix possibles pour le premier chiffre et 3 choix possibles pour le deuxième chiffre (le dernier chiffre étant fixé à 6), soit $3 \times 3 = 9$ codes différents.

Comme $9 \neq 6$, l'affirmation est fausse.

Bac Terminale 2021 — Métropole, Mayotte, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

Partie I — Cécile sort des gâteaux du congélateur, où ils étaient à -19°C , pour les poser sur une terrasse à 25°C . Au bout de 10 minutes, ils sont à $1,3^{\circ}\text{C}$. En supposant que la température augmente à vitesse constante (même hausse chaque minute), quelle serait la température des gâteaux au bout de 25 minutes ? Ce modèle est-il pertinent ?

En 10 minutes, la température a augmenté de $1,3 - (-19) = 20,3^{\circ}\text{C}$, soit une hausse constante supposée de $\frac{20,3}{10} = 2,03^{\circ}\text{C}$ par minute.

Au bout de 25 minutes, la hausse totale serait de $25 \times 2,03 = 50,75^{\circ}\text{C}$, donc une température de $-19 + 50,75 = 31,75^{\circ}\text{C}$.

Or la température de la terrasse est de 25°C : les gâteaux ne peuvent pas dépasser cette température ambiante. Donc, **ce modèle n'est pas pertinent**.

Partie II — On note T_n la température des gâteaux, en degré Celsius, n minutes après leur sortie du congélateur, avec $T_0 = -19$. On admet la relation $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$ pour tout entier naturel n . 1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$.

En développant : $T_{n+1} - T_n = -0,06T_n + 0,06 \times 25 = -0,06T_n + 1,5$.

D'où $T_{n+1} = T_n - 0,06T_n + 1,5 = 0,94T_n + 1,5$.

2. Calculer T_1 et T_2 (arrondir au dixième).

Avec $n = 0$: $T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = -17,86 + 1,5 = -16,36$, soit $T_1 \approx -16,4$.

Avec $n = 1$: $T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5 = -15,3784 + 1,5 = -13,8784$, soit $T_2 \approx -13,9$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $T_n \leq 25$. Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'énoncé ?

Initialisation. $T_0 = -19 \leq 25$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons que, pour un entier n , $T_n \leq 25$. En multipliant par $0,94 > 0$: $0,94T_n \leq 0,94 \times 25 = 23,5$.

En ajoutant 1,5 aux deux membres : $0,94T_n + 1,5 \leq 25$, soit $T_{n+1} \leq 25$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $T_n \leq 25$.

Ce résultat était prévisible : la température des gâteaux ne peut pas dépasser la température ambiante de la terrasse, qui est justement de 25°C .

4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n) .

D'après la relation de récurrence, $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$.

D'après la question précédente, $T_n \leq 25$ pour tout n , donc $T_n - 25 \leq 0$, donc $-0,06 \times (T_n - 25) \geq 0$.

Ainsi $T_{n+1} - T_n \geq 0$ pour tout n : la suite (T_n) est **croissante**.

5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.

La suite (T_n) est croissante (question précédente) et majorée par 25 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite ℓ vérifiant $\ell \leq 25$.

6.a On pose, pour tout entier naturel n , $U_n = T_n - 25$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94 T_n + 1,5 - 25 = 0,94 T_n - 23,5$.

Or $0,94 \times (T_n - 25) = 0,94 T_n - 23,5$, donc $U_{n+1} = 0,94 \times (T_n - 25) = 0,94 U_n$.

La suite (U_n) est donc **géométrique de raison** 0,94, de premier terme $U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44$.

6.b En déduire que, pour tout entier naturel n , $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$.

Comme (U_n) est géométrique de raison 0,94 et de premier terme -44 : $U_n = -44 \times 0,94^n$ pour tout n .

Or $U_n = T_n - 25$, donc $T_n = U_n + 25 = -44 \times 0,94^n + 25$.

6.c En déduire la limite de la suite (T_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Comme $0 < 0,94 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$, donc par somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 25$.

Cela signifie que la température des gâteaux se rapproche indéfiniment de la température ambiante de la terrasse, 25°C , sans jamais la dépasser, ce qui est cohérent avec la situation physique.

7.a Le fabricant conseille de consommer les gâteaux une demi-heure après leur sortie du congélateur. Quelle température ont-ils alors atteinte (arrondir à l'entier le plus proche) ?

Avec $n = 30$ minutes : $T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25 \approx 18,1$. Donc, les gâteaux ont atteint une température d'environ **18 °C**.

7.b Cécile aime déguster ces gâteaux encore frais, à 10 °C. Donner un encadrement, entre deux entiers consécutifs, du nombre de minutes après lesquelles elle doit les déguster.

À la calculatrice, $T_{17} \approx 9,6$ et $T_{18} \approx 10,6$: la température franchit donc 10 °C entre les minutes 17 et 18.

Donc, Cécile doit déguster son gâteau **entre la 17^e et la 18^e minute** après sa sortie du congélateur.

7.c Le programme Python suivant doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geq 10$. Recopier et compléter les lignes manquantes.

- def seuil() :
- $n = 0$
- $T = -19$
- while $T < 10$:
- $T = 0.94 * T + 1.5$
- $n = n + 1$
- return n

Bac Terminale 2021 — Amérique du Nord

Partie A — Un laboratoire met au point un test anti-dopage. Si un athlète est dopé, le test est positif avec une probabilité de 0,98 ; s'il n'est pas dopé, le test est négatif avec une probabilité de 0,995. On note D l'évènement « l'athlète contrôlé est dopé » et T l'évènement « le test est positif », avec $P(D) = 0,08$. 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

Sur la première branche : $P(D) = 0,08$ et $P(\overline{D}) = 1 - 0,08 = 0,92$.

Depuis D : $P_D(T) = 0,98$ et $P_D(\overline{T}) = 1 - 0,98 = 0,02$.

Depuis $\overline{D}$: le test est négatif avec probabilité 0,995 pour un athlète non dopé, donc $P_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0,995$ et $P_{\overline{D}}(T) = 1 - 0,995 = 0,005$.

Partie A — 2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.

Les évènements D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T)$.

$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,08 \times 0,98 = 0,0784$ et $P(\overline{D} \cap T) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,92 \times 0,005 = 0,0046$.

Donc $P(T) = 0,0784 + 0,0046 = 0,083$.

Partie A — 3.a Sachant que le test d'un athlète est positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé (arrondie au millièmme) ?

$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0784}{0,083} \approx \mathbf{0,945} \text{ (au millièmme).}$$

Partie A — 3.b Le laboratoire commercialise le test si la probabilité qu'un athlète testé positif soit réellement dopé est supérieure ou égale à 0,95. Ce test sera-t-il commercialisé ?

D'après la question précédente, $0,945 < 0,95$, donc le test ne sera pas commercialisé.

Partie B — Dans une compétition, la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103. **1.a** On contrôle 5 athlètes au hasard ; X compte le nombre de tests positifs parmi eux. Donner la loi de X et ses paramètres.

Chaque contrôle est une épreuve à deux issues (positif/négatif) de probabilité $p = 0,103$, répétée $n = 5$ fois de façon indépendante : X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,103$.

Partie B — 1.b Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat.

$$E(X) = np = 5 \times 0,103 = 0,515.$$

Cela signifie que, sur un grand nombre de séries de 5 contrôles, on obtient en moyenne environ 0,515 test positif par série, soit à peu près 1 athlète positif sur 10 contrôlés.

Partie B — 1.c Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif (arrondie au millièmme) ?

L'évènement contraire de « au moins un test positif » est « aucun test positif », c'est-à-dire $\{X = 0\}$.

$$P(X = 0) = (1 - 0,103)^5 = 0,897^5 \approx 0,581.$$

$$\text{Donc } P(X \geq 1) = 1 - 0,581 \approx \mathbf{0,419} \text{ (au millièmme).}$$

Partie B — 2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité d'avoir au moins un test positif soit supérieure ou égale à 0,75 ?

Pour n athlètes contrôlés, en notant X_n le nombre de tests positifs, $P(X_n = 0) = 0,897^n$, donc $P(X_n \geq 1) = 1 - 0,897^n$.

On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0,897^n \geq 0,75 \iff 0,897^n \leq 0,25$.

À la calculatrice : $0,897^{12} \approx 0,271 > 0,25$ mais $0,897^{13} \approx 0,243 \leq 0,25$.

Donc, la réponse est qu'il faut contrôler au minimum **13 athlètes**.

Bac Terminale 2021 — Amérique du Nord

On étudie une population animale d'une île, modélisée par la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,6$ et $u_{n+1} = 0,75 u_n(1 - 0,15 u_n)$, où u_n désigne (en milliers) le nombre d'individus au début de l'année $2020 + n$. L'espèce est menacée d'extinction si la population devient inférieure ou égale à 20 individus. 1. Estimer le nombre d'individus au début de 2021 puis de 2022.

2021 correspond à $n = 1$: $u_1 = 0,75 \times 0,6 \times (1 - 0,15 \times 0,6) = 0,45 \times 0,91 = 0,4095$, soit environ **410 individus**.

2022 correspond à $n = 2$: $u_2 = 0,75 \times 0,4095 \times (1 - 0,15 \times 0,4095) \approx 0,307125 \times 0,938575 \approx 0,2883$, soit environ **288 individus**.

2. On pose $f(x) = 0,75x(1 - 0,15x)$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$. Montrer que f est croissante sur $[0 ; 1]$ et dresser son tableau de variations.

f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[0 ; 1]$, et sur cet intervalle : $f'(x) = 0,75(1 - 0,15x) - 0,75x \times 0,15 = 0,75 - 0,225x$.

Or $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 0,225x \leq 0,225 \Rightarrow 0,525 \leq f'(x) \leq 0,75$.

Donc $f'(x) > 0$ sur $[0 ; 1]$: f est strictement croissante sur cet intervalle, de $f(0) = 0$ à $f(1) = 0,75 \times 0,85 = 0,6375$.

3. Résoudre dans $[0 ; 1]$ l'équation $f(x) = x$.

Sur $[0 ; 1]$: $f(x) = x \iff 0,75x(1 - 0,15x) - x = 0 \iff x[0,75(1 - 0,15x) - 1] = 0 \iff x(-0,25 - 0,1125x) = 0$.

Donc $x = 0$ ou $-0,25 - 0,1125x = 0$, soit $x = -\frac{0,25}{0,1125}$, valeur négative donc exclue de $[0 ; 1]$.

Donc, la réponse est que l'unique solution dans $[0 ; 1]$ est $x = 0$.

4.a On admet que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n . Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

Initialisation : on a vu que $0 \leq 0,4095 \leq 0,6 \leq 1$, c'est-à-dire $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que, pour un entier naturel n , on ait $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$. La fonction f étant strictement croissante sur $[0 ; 1]$, on en déduit $f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1)$.

Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,6375 \leq 1$, donc $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

4.b En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle est donc **convergente**.

4.c Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .

La suite (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$, et par continuité de f , ℓ vérifie l'équation $f(x) = x$, dont l'unique solution dans $[0 ; 1]$ est 0 (question 3).

Donc, la réponse est $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = 0$.

5.a Justifier que, selon ce modèle, l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

La suite (u_n) étant décroissante et de limite 0, le nombre d'individus finit par descendre en dessous de tout seuil, en particulier en dessous de 20 individus ($u_n = 0,02$ en milliers) : **l'espèce sera donc menacée d'extinction**.

**5.b Le biologiste programme en Python la fonction ci-dessous. `def menace(): u = 0.6
n = 0 while u > 0.02: u = 0.75*u*(1-0.15*u) n = n+1 return n` Donner la valeur renvoyée par l'appel de `menace()` et interpréter ce résultat.**

La boucle calcule successivement les termes de la suite (u_n) tant que le terme courant reste strictement supérieur à 0,02, en comptant le nombre d'itérations dans n .

En calculant les termes successifs, on obtient $u_{10} \approx 0,0249 > 0,02$ (la boucle continue) puis $u_{11} \approx 0,0186 \leq 0,02$ (la boucle s'arrête) : l'appel renvoie donc $n = 11$.

Donc, la réponse est que l'espèce sera menacée d'extinction au début de l'année $2020 + 11 = \mathbf{2031}$.

Bac Terminale 2021 — Amérique du Nord

On considère un cube $ABCDEFGH$. I est le milieu de $[EF]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[AE]$. On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, dans lequel $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 1 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$, $E(0 ; 0 ; 1)$, $F(1 ; 0 ; 1)$, $G(1 ; 1 ; 1)$, $H(0 ; 1 ; 1)$, $I(0,5 ; 0 ; 1)$, $J(1 ; 0,5 ; 0)$ et $K(0 ; 0 ; 0,5)$. 1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ?

$$\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont proportionnelles selon aucun facteur commun), donc, la réponse est que **les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles**.

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

$$\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que $2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AE}$: ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ et les droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques $d_1 : x = 3 + t, y = 8 - 2t, z = -2 + 3t$ et $d_2 : x = 4 + t, y = 1 + t, z = 8 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$). Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

$$d_1 \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } d_2 \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc, la réponse est que **les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles**.

4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

$$\text{Le plan } \mathcal{P} \text{ admet pour vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ et } d_2 \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 1 \times 1 + 3 \times 1 + (-2) \times 2 = 1 + 3 - 4 = 0.$$

Le vecteur directeur de d_2 est donc orthogonal au vecteur normal de $\mathcal{P}$: la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

5. Montrer que le point $L(4; 0; 3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5; 3; 1)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

$$\overrightarrow{ML} \begin{pmatrix} 4-5 \\ 0-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ qui est l'opposé du vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{P} : \overrightarrow{ML} \text{ est donc lui aussi normal au plan } \mathcal{P}, \text{ ce qui montre que la droite (ML) est perpendiculaire à } \mathcal{P}.$$

D'autre part, les coordonnées de L vérifient l'équation de $\mathcal{P}$: $4 + 3 \times 0 - 2 \times 3 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, donc L appartient à $\mathcal{P}$.

Le point L appartient au plan $\mathcal{P}$ et la droite (ML) lui est perpendiculaire : donc, la réponse est que **L est bien le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$** .

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 1)

1. Une influenceuse compte $u_0 = 1\,000$ abonnés en 2020. Chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés puis en gagne 250 nouveaux. On note u_n le nombre d'abonnés en l'année $(2020 + n)$. Calculer u_1 .

Perdre 10 % revient à multiplier par 0,9. Donc $u_1 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = 1\,150$ abonnés.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

Multiplier par 0,9 traduit la perte de 10 % des abonnés d'une année sur l'autre.

On ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

3. Une fonction Python 'suite(n)' initialise 'u = 1000', puis répète 'n' fois 'u = 0.9*u + 250', avant de renvoyer 'u'. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la valeur renvoyée par l'appel 'suite(10)'.

La fonction calcule u_{10} , c'est-à-dire le nombre d'abonnés estimé en l'année 2030 ; la calculatrice donne $u_{10} \approx 1\,977$ abonnés.

4.a Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

Initialisation : $u_0 = 1\,000 \leq 2\,500$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq 2\,500$. Comme $0,9 > 0$, la multiplication conserve l'ordre : $0,9u_n \leq 0,9 \times 2\,500 = 2\,250$, puis en ajoutant 250 aux deux membres, $0,9u_n + 250 \leq 2\,500$, soit $u_{n+1} \leq 2\,500$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

4.b Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.

Or, d'après la question précédente, $u_n \leq 2\,500$, donc $0,1u_n \leq 250$, soit $-0,1u_n + 250 \geq 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est **croissante**.

4.c Dédire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 500 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

5.a On pose $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n . Montrer que (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1\,500$.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500 = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9(u_n - 2\,500) = 0,9v_n$.

La relation $v_{n+1} = 0,9v_n$, vraie pour tout entier naturel n , montre que (v_n) est géométrique de raison 0,9.

Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

5.b Exprimer v_n en fonction de n , puis montrer que $u_n = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

Comme (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1\,500$, pour tout entier naturel n : $v_n = -1\,500 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 2\,500$, donc $u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

5.c Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Comme $0 < 0,9 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc par produit puis somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\,500$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que le nombre d'abonnés de l'influenceuse **se stabilise autour de 2 500** au fil des années.

6. Écrire un programme qui détermine en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200, puis donner cette année.

- $n = 0$
- $u = 1000$
- tant que $u \leq 2200$:
- $u = 0.9 * u + 250$
- $n = n + 1$
- renvoyer n
- En simulant l'évolution terme à terme, on obtient $u_{15} \approx 2\,191,2 \leq 2\,200$ et $u_{16} \approx 2\,222,0 > 2\,200$: le programme renvoie $n = 16$.
- Donc, la réponse est que le nombre d'abonnés dépasse 2 200 la seizième année suivant 2020, c'est-à-dire en **2036**.

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 2)

1. QCM. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x$. Quelle est la limite de f en $-\infty$?

En développant, $f(x) = x^2e^x - 2xe^x - e^x$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$; de plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

2. QCM. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{5 + e^x}$. Que peut-on dire des asymptotes à sa courbe représentative ?

Quand $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0$ donc $f(x) \rightarrow \frac{3}{5}$: la droite d'équation $y = \frac{3}{5}$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$ donc $f(x) \rightarrow 0$: l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) est asymptote horizontale en $+\infty$.

La courbe admet deux asymptotes horizontales (une pour chaque limite infinie).

3. QCM. La courbe ci-dessous (non reproduite ici) représente la dérivée seconde f'' d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-3, 5]$, et s'annule en changeant de signe en -3 , 2 et 5 . Que peut-on en conclure sur f ?

Un point d'inflexion de la courbe de f correspond à une valeur où f'' s'annule en changeant de signe.

Comme f'' s'annule en changeant de signe exactement trois fois (en -3 , 2 et 5), **la courbe de f admet exactement trois points d'inflexion.**

4. QCM. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$. Que peut-on affirmer sur cette suite ?

On met l'expression sous forme canonique : $u_n = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{289}{4} + 20 = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{209}{4}$.

Un carré étant toujours positif ou nul, on a pour tout entier naturel n : $u_n \geq -\frac{209}{4}$.

La suite (u_n) est donc minorée (par $-\frac{209}{4}$).

5. QCM. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 5$. On exécute en Python une fonction qui initialise $u = 2$ et $n = 0$, puis répète tant que $u < 45$: $u \leftarrow 0,75u + 5$ et $n \leftarrow n + 1$, avant de renvoyer n . Que renvoie cette fonction ?

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 20$.

Initialisation : $u_0 = 2 \leq 20$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que pour un entier n , $u_n \leq 20$. Alors $0,75u_n \leq 0,75 \times 20 = 15$, donc $0,75u_n + 5 \leq 20$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 20$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $u_n \leq 20$, donc la condition $u < 45$ est toujours vérifiée : la boucle ne s'arrête jamais.

Aucune des trois réponses proposées n'est correcte : le programme ne s'arrête pas (boucle infinie).

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 2)

1. On considère un pavé droit ABCDEFGH avec $AB = AD = 1$ et $AE = 2$. I est le milieu de $[AE]$, K le milieu de $[DC]$, et L le point défini par $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. On se place dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, dans lequel $L \left(0 ; 1 ; \frac{3}{2} \right)$. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.

Dans ce repère, $C(1 ; 1 ; 0)$ et $D(0 ; 1 ; 0)$ (ABCD est un rectangle de côtés AB et AD). K, milieu de $[DC]$, a donc pour coordonnées $K \left(\frac{1}{2} ; 1 ; 0 \right)$.

On en déduit $\overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'après l'énoncé, $\overrightarrow{AL} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ (coordonnées de L, puisque A est l'origine du repère).

2.a Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6 ; -3 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AK} = 6 \times \frac{1}{2} + (-3) \times 1 + 2 \times 0 = 3 - 3 + 0 = 0.$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AL} = 6 \times 0 + (-3) \times 1 + 2 \times \frac{3}{2} = 0 - 3 + 3 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AK}$ et à $\overrightarrow{AL}$, deux vecteurs non colinéaires du plan (AKL) : $\vec{n}$ est donc un vecteur normal au plan (AKL).

2.b En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).

Le plan (AKL) admet $\vec{n}(6 ; -3 ; 2)$ pour vecteur normal, donc une équation de la forme $6x - 3y + 2z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Comme $A(0 ; 0 ; 0)$ appartient au plan : $6 \times 0 - 3 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0$, soit $d = 0$.

Une équation cartésienne du plan (AKL) est $6x - 3y + 2z = 0$.

2.c Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).

La droite Δ passe par $D(0 ; 1 ; 0)$ et admet $\vec{n}(6 ; -3 ; 2)$ pour vecteur directeur (puisque'elle est perpendiculaire au plan (AKL), donc dirigée par sa normale).

$$\text{Un système d'équations paramétriques de } \Delta \text{ est : } \begin{cases} x = 6t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

2.d En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49} ; \frac{40}{49} ; \frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

Le projeté orthogonal de D sur le plan (AKL) est le point d'intersection de la droite Δ (perpendiculaire au plan et passant par D) avec ce plan.

On remplace les coordonnées paramétriques de Δ dans l'équation du plan : $6 \times 6t - 3 \times (1 - 3t) + 2 \times 2t = 0$.

$$\text{Soit } 36t - 3 + 9t + 4t = 0 \iff 49t = 3 \iff t = \frac{3}{49}.$$

$$\text{En reportant dans le système paramétrique : } x = 6 \times \frac{3}{49} = \frac{18}{49}, y = 1 - 3 \times \frac{3}{49} = \frac{49 - 9}{49} = \frac{40}{49}, \\ z = 2 \times \frac{3}{49} = \frac{6}{49}.$$

Le point d'intersection a bien pour coordonnées $\left(\frac{18}{49} ; \frac{40}{49} ; \frac{6}{49}\right)$: c'est donc le point N, projeté orthogonal de D sur le plan (AKL).

3.a On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}$. Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.

Le triangle ADK est rectangle en D, car (DA) et (DC') sont deux arêtes perpendiculaires du pavé et K appartient à (DC) .

On a $AD = 1$ et $DK = \frac{1}{2}$ (K milieu de $[DC]$ avec $DC = AB = 1$), donc l'aire du triangle ADK est $\mathcal{A}(\text{ADK}) = \frac{AD \times DK}{2} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

La hauteur du tétraèdre relative à cette base est DL, avec $DL = \frac{3}{2} \times AI = \frac{3}{2}$ (d'après la définition de L, et $AI = 1$ la norme du troisième vecteur de base).

$$\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{8} \text{ (unité de volume).}$$

3.b Calculer la distance du point D au plan (AKL).

La distance de D au plan (AKL) est la longueur DN, où N est le projeté orthogonal de D sur ce plan.

$$\overrightarrow{DN} = \begin{pmatrix} \frac{18}{49} \\ \frac{40}{49} - 1 \\ \frac{6}{49} \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{DN} = \begin{pmatrix} \frac{18}{49} \\ -\frac{9}{49} \\ \frac{6}{49} \end{pmatrix}.$$

$$DN^2 = \left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(-\frac{9}{49}\right)^2 + \left(\frac{6}{49}\right)^2 = \frac{324 + 81 + 36}{49^2} = \frac{441}{2401} = \left(\frac{21}{49}\right)^2.$$

$$\text{Donc } DN = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}.$$

3.c En déduire l'aire du triangle AKL.

En prenant cette fois le triangle AKL comme base du tétraèdre, la hauteur associée est DN, donc $\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{AKL}) \times DN$.

D'après les questions précédentes, $\frac{1}{8} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{AKL}) \times \frac{3}{7}$, soit $\frac{1}{8} = \frac{\mathcal{A}(\text{AKL})}{7}$.

$$\mathcal{A}(\text{AKL}) = \frac{7}{8} \text{ (unité d'aire).}$$

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 2)

1. Une application génère un ticket sur une grille 3×3 où trois cases contiennent chacune un cœur, disposées au hasard. Justifier qu'il existe exactement 84 façons différentes de placer ces trois cœurs sur la grille.

Placer trois cœurs sur la grille revient à choisir 3 cases parmi les 9 de la grille, sans tenir compte de l'ordre : le nombre de façons est donc $\binom{9}{3}$.

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \frac{504}{6} = 84.$$

Il y a bien 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur la grille.

2. Un ticket est gagnant si les trois cœurs sont alignés côte à côte sur une même ligne, une même colonne ou une même diagonale. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant vaut $\frac{2}{21}$.

La grille compte 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales, soit 8 alignements possibles de trois cases : il y a donc 8 grilles gagnantes parmi les 84 grilles possibles (équiprobables).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est $\frac{8}{84} = \frac{2}{21}$ (en simplifiant par 4).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est donc bien égale à $\frac{2}{21}$.

3. À chaque ticket généré, le joueur verse 1 € ; si le ticket est gagnant, la société lui reverse 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Soit X le gain algébrique du joueur pour un ticket. Un ticket gagnant rapporte $5 - 1 = 4$ € (le joueur récupère les 5 € mais a déjà versé 1 €), un ticket perdant coûte 1 €.

$$P(X = 4) = \frac{2}{21} \text{ et } P(X = -1) = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}.$$

$$E(X) = 4 \times \frac{2}{21} + (-1) \times \frac{19}{21} = \frac{8 - 19}{21} = -\frac{11}{21} \approx -0,524.$$

L'espérance de gain est négative : en moyenne, le joueur perd environ 0,52 € par ticket généré. Le jeu est donc défavorable au joueur.

4.a Un joueur génère 20 tickets de façon indépendante. Soit X le nombre de tickets gagnants parmi ces 20 tickets. Donner la loi de probabilité de X .

Chaque génération de ticket est une épreuve à deux issues (gagnant / perdant) de probabilité de succès $p = \frac{2}{21}$, répétée $n = 20$ fois de façon indépendante.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{21}$.

4.b Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 5)$, arrondie à 10^{-3} .

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{2}{21}\right)^5 \times \left(\frac{19}{21}\right)^{15} \approx \mathbf{0,027} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

4.c Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$, arrondie à 10^{-3} , puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$$(X \geq 1) \text{ est l'évènement contraire de } (X = 0), \text{ donc } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^{20} \approx 1 - 0,135 \approx \mathbf{0,865} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

Sur 20 tickets générés, le joueur a donc environ 86,5 % de chances d'obtenir au moins un ticket gagnant.

Bac Terminale 2021 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. QCM. On étudie g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2x - \frac{3}{x}$. Parmi les quatre équations proposées, laquelle est celle de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1 ?

$$g \text{ est dérivable sur }]0 ; +\infty[\text{ et pour tout } x \text{ de cet intervalle : } g'(x) = 2x + 2 + \frac{3}{x^2}.$$

$$\text{On calcule } g'(1) = 2 + 2 + 3 = 7 \text{ et } g(1) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

$$\text{Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est } y = g'(1)(x - 1) + g(1) = 7(x - 1), \text{ soit } y = 7x - 7.$$

$$\text{Donc, la réponse est } \mathbf{a.} \ y = 7(x - 1).$$

2. QCM. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{3n}{n+2}$. Quelle est la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$?

$$\text{Pour } n \geq 1, \text{ on peut écrire } v_n = \frac{3n}{n(1 + \frac{2}{n})} = \frac{3}{1 + \frac{2}{n}}.$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0, \text{ le dénominateur tend vers 1, donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3.$$

$$\text{Donc, la réponse est } \mathbf{b.} \ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3.$$

3. QCM. Une urne contient 6 boules noires et 4 boules rouges. On effectue 10 tirages successifs avec remise. Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près, d'obtenir exactement 4 boules noires et 6 boules rouges ?

Si X désigne le nombre de boules noires obtenues sur les 10 tirages, chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,6$ (tirage avec remise), donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,6$.

$$\text{On veut } P(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,6^4 \times 0,4^6 \approx 0,11148, \text{ soit environ } \mathbf{0,1115} \text{ à } 10^{-4} \text{ près}.$$

Donc, la réponse est **c. 0,1115**.

4. QCM. On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^x - x$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?

Pour $x \neq 0$, on factorise : $f(x) = x \left(3\frac{e^x}{x} - 1 \right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (croissance comparée), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$.

Par produit de limites (avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$), on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc, la réponse est **b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$** .

5. QCM. Un code secret comporte 8 caractères, chacun étant une lettre ou un chiffre parmi 36 signes possibles. Un logiciel teste environ 100 millions de codes par seconde. En combien de temps, au maximum, peut-il trouver le code ?

Le nombre total de codes possibles est $36^8 = 2\,821\,109\,907\,456$.

Au rythme de 10^8 codes par seconde, il faut au maximum $\frac{2\,821\,109\,907\,456}{10^8} \approx 28\,211$ secondes, soit environ 470 minutes, soit environ 7,8 heures.

Donc, la réponse est **b. environ 8 heures**.

Bac Terminale 2021 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A — 1.a Une centrale solaire compte 10 560 panneaux au 1er janvier 2020. Chaque année, 2 % des panneaux se détériorent et sont retirés, tandis que 250 panneaux neufs sont installés. On modélise le nombre de panneaux par $u_0 = 10\,560$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux au 1er janvier de l'année $2020 + n$. Justifier ce choix de modélisation.

Retirer 2 % des panneaux revient à multiplier leur nombre par $1 - \frac{2}{100} = 0,98$.

En ajoutant ensuite les 250 panneaux neufs installés chaque année, on obtient bien la relation $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, ce qui justifie la modélisation.

Partie A — 1.b À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux dépassera strictement 12 000.

En saisissant $u_0 = 10\,560$ puis en appliquant successivement $u \mapsto 0,98u + 250$, on obtient $u_1 \approx 10\,599$, puis u_2, u_3 , etc.

On trouve $u_{67} \approx 11\,999$ et $u_{68} \approx 12\,009$.

Donc, le nombre de panneaux dépassera 12 000 au bout de **68 ans**, soit en 2088.

Partie A — 1.c Compléter le programme Python suivant pour qu'il stocke dans la variable n le nombre d'années trouvé à la question précédente : 'u = 10560' / 'n = 0' / 'while ... :' / ' u = ..' / ' n = ..'

- 'while u <= 12000 :'
- ' u = 0.98*u + 250'
- ' n = n + 1'

Partie A — 2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 12\,500$.

Initialisation : $u_0 = 10\,560 \leq 12\,500$, la propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq 12\,500$. En multipliant par 0,98 (positif) : $0,98u_n \leq 0,98 \times 12\,500 = 12\,250$. En ajoutant 250 aux deux membres : $0,98u_n + 250 \leq 12\,500$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 12\,500$: la propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc par récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 12\,500$.

Partie A — 3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 0,98u_n + 250 - u_n = 250 - 0,02u_n$.

D'après la question précédente, $u_n \leq 12\,500$, donc $0,02u_n \leq 0,02 \times 12\,500 = 250$, c'est-à-dire $250 - 0,02u_n \geq 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$: **la suite (u_n) est croissante.**

Partie A — 4. En déduire que la suite (u_n) converge (sans calculer sa limite).

La suite (u_n) est croissante et majorée par 12 500 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite ℓ vérifiant $\ell \leq 12\,500$.

Partie A — 5.a On pose $v_n = u_n - 12\,500$ pour tout entier naturel n . Démontrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 12\,500 = 0,98u_n + 250 - 12\,500 = 0,98u_n - 12\,250$.

Or $0,98 \times 12\,500 = 12\,250$, donc $v_{n+1} = 0,98u_n - 0,98 \times 12\,500 = 0,98(u_n - 12\,500) = 0,98v_n$.

Cette relation étant vraie pour tout n , (v_n) **est géométrique de raison 0,98**, de premier terme $v_0 = u_0 - 12\,500 = 10\,560 - 12\,500 = -1\,940$.

Partie A — 5.b Exprimer v_n en fonction de n .

(v_n) étant géométrique de premier terme $-1\,940$ et de raison 0,98, on a pour tout entier naturel n : $v_n = -1\,940 \times 0,98^n$.

Partie A — 5.c En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Comme $v_n = u_n - 12\,500$, on a $u_n = v_n + 12\,500$, soit $u_n = 12\,500 - 1\,940 \times 0,98^n$.

Partie A — 5.d Déterminer la limite de (u_n) et interpréter le résultat.

Comme $0 < 0,98 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,98^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12\,500$.

Dans le contexte du modèle, le nombre de panneaux solaires de la centrale se stabilise autour de **12 500** à long terme.

Partie B — 1. Une modélisation plus fine utilise la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 12\,500 - 500e^{-0,02x+1,4}$, où x est le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020. Étudier le sens de variation de f .

f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout x de cet intervalle :
 $f'(x) = -500 \times (-0,02)e^{-0,02x+1,4} = 10e^{-0,02x+1,4}$.

La fonction exponentielle étant strictement positive, $f'(x) > 0$ pour tout x : **la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.**

Partie B — 2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,02x + 1,4) = -\infty$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,02x+1,4} = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 12\,500$.

Partie B — 3. À l'aide de ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux dépassera 12 000.

On résout $f(x) > 12\,000 \iff 12\,500 - 500e^{-0,02x+1,4} > 12\,000 \iff 500 > 500e^{-0,02x+1,4} \iff 1 > e^{-0,02x+1,4}$.

Comme $1 = e^0$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante, cela équivaut à $0 > -0,02x + 1,4 \iff 0,02x > 1,4 \iff x > 70$.

Donc, il faut attendre strictement plus de 70 ans, soit **71 ans**, pour que le nombre de panneaux dépasse 12 000 selon ce modèle, ce qui correspond à l'année 2091.

Bac Terminale 2021 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A (avec $a = \frac{2}{3}$) — 1. ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE, J est le point du segment [CG] tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$. Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de F, I et J.

Le cube a pour arête 1 dans ce repère, donc F, sommet opposé à D sur la face supérieure du carré ABFE, a pour coordonnées F(1 ; 0 ; 1).

I est le centre de la face ADHE, donc le milieu de [AH] (et aussi de [DE]) : $I\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Comme $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ avec C(1 ; 1 ; 0) et G(1 ; 1 ; 1), on a $J\left(1 ; 1 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 2. On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ). Déterminer une représentation paramétrique de (d).

$$\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ (obtenu par } J - F\text{)}.$$

(d) passe par $I\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et admet $\overrightarrow{FJ}$ pour vecteur directeur, donc une représentation paramétrique de (d) est : $x = 0$, $y = \frac{1}{2} + t$, $z = \frac{1}{2} - \frac{t}{3}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Partie A — 3.a K est le point d'intersection de (d) et de (AE). Montrer que K a pour coordonnées $\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.

La droite (AE) est l'axe des cotes (points d'ordonnée nulle). On cherche donc le point de (d) tel que $y = 0$: $\frac{1}{2} + t = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$.

La cote correspondante vaut $z = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

On obtient bien $K\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 3.b Déterminer les coordonnées du point L, intersection de (d) et de (DH).

Tous les points de (DH) ont pour ordonnée 1. On cherche donc le point de (d) tel que $y = 1$: $\frac{1}{2} + t = 1 \iff t = \frac{1}{2}$.

La cote correspondante vaut $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Donc, la réponse est $L\left(0 ; 1 ; \frac{1}{3}\right)$.

Partie A — 4.a Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.

Le milieu de [FL] a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{1+\frac{1}{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$.

Le milieu de [JK] a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2}; \frac{1+0}{2}; \frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$.

Les diagonales [FL] et [JK] ont le même milieu : **FJLK est donc un parallélogramme.**

Partie A — 4.b Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.

$$\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) + \left(-\frac{2}{3}\right) \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0.$$

Les diagonales du parallélogramme FJLK sont donc perpendiculaires : **FJLK est un losange.**

Partie A — 4.c Le quadrilatère FJLK est-il un carré ?

$$\overrightarrow{KF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{KF} \cdot \overrightarrow{FJ} = 0 + 0 - \frac{1}{9} = -\frac{1}{9} \neq 0.$$

Les côtés consécutifs [KF] et [FJ] ne sont donc pas perpendiculaires : le losange FJLK n'est pas un rectangle, donc, la réponse est **non, FJLK n'est pas un carré.**

Partie B (cas général) — 1. On admet désormais que $K\left(0; 0; 1 - \frac{a}{2}\right)$ et $L\left(0; 1; \frac{a}{2}\right)$, avec $a \in [0; 1]$. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a.

$$G \text{ a pour coordonnées } (1; 1; 1), \text{ donc } \overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Comme $C(1; 1; 0)$, on en déduit $J(1; 1; a)$.

Partie B — 2. Montrer que FJLK est un parallélogramme, quelle que soit la valeur de a.

$$\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ (en calculant } \frac{a}{2} - \left(1 - \frac{a}{2}\right) = a - 1).$$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{KL}$: **FJLK est donc un parallélogramme pour toute valeur de a.**

Partie B — 3. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles FJLK est un losange ?

$$\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{a}{2} - 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 - \frac{3a}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = 1 - 1 + \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right).$$

Ce produit s'annule si et seulement si $\frac{a}{2} = 1$ (soit $a = 2$) ou $1 = \frac{3a}{2}$ (soit $a = \frac{2}{3}$).

Seule la valeur $a = \frac{2}{3}$ appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$: dans ce cas, les diagonales du parallélogramme FJLK sont perpendiculaires, donc, la réponse est **oui, uniquement pour $a = \frac{2}{3}$, FJLK est un losange.**

Partie B — 4. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles FJLK est un carré ?

D'après la question précédente, la seule valeur de a rendant FJLK losange est $a = \frac{2}{3}$, cas déjà étudié en partie A où l'on a montré que ce losange n'était pas un carré : donc, la réponse est **non, il n'existe aucune valeur de a pour laquelle FJLK est un carré.**

Bac Terminale 2021 — Polynésie française

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1, muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, et le point M défini par $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$. 1. Donner, par lecture graphique, les coordonnées des points B, D, E, G et H.

Dans ce repère : B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1).

2.a Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

Les segments [EG], [GD] et [ED] sont chacun la diagonale d'une face carrée de côté 1 du cube, donc $EG = GD = ED = \sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1) : **le triangle EGD est équilatéral**, de côté $\sqrt{2}$.

2.b On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Avec $c = \sqrt{2}$, l'aire du triangle EGD vaut $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

$$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de H moins celles de B), donc } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Comme } \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}, \text{ on obtient } x_M = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, y_M = \frac{1}{3} \text{ et } z_M = \frac{1}{3}.$$

Donc, la réponse est que M a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

4.a Justifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EGD).

$$\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de G moins celles de E), donc } \vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = -1 + 1 + 0 = 0.$$

$$\overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de D moins celles de E), donc } \vec{n} \cdot \overrightarrow{ED} = 0 + 1 - 1 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD) : **c'est donc un vecteur normal à ce plan.**

4.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est $-x + y + z - 1 = 0$.

Un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $-x + y + z + d = 0$, avec d réel à déterminer.

Le point E(0 ; 0 ; 1) appartient au plan (EGD), donc ses coordonnées vérifient cette équation : $-0 + 0 + 1 + d = 0 \iff d = -1$.

Donc, la réponse est que le plan (EGD) a pour équation $-x + y + z - 1 = 0$.

4.c Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) passant par M. Montrer qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan (EGD), elle est donc dirigée par le vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de ce plan ; elle passe de plus par $M(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$.

Un point $P(x ; y ; z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MP} = t\vec{n}$ pour un certain réel t , c'est-à-dire $x - \frac{2}{3} = -t$, $y - \frac{1}{3} = t$ et $z - \frac{1}{3} = t$.

Donc, la réponse est que $\mathcal{D}$ admet pour représentation paramétrique $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

5.a Soit K le pied de la hauteur issue de M dans la pyramide GEDM. Démontrer que les coordonnées de K sont $(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3})$.

La droite $\mathcal{D}$ passe par M et est perpendiculaire au plan (EGD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue de M, et son pied K est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan (EGD).

Les coordonnées de K vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ et l'équation du plan (EGD) : en substituant $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$ dans $-x + y + z - 1 = 0$, on obtient $-(\frac{2}{3} - t) + \frac{1}{3} + t + \frac{1}{3} + t - 1 = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \frac{1}{3}$.

En remplaçant t par $\frac{1}{3}$: $x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Donc, la réponse est que K a pour coordonnées $(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3})$.

5.b En déduire le volume de la pyramide GEDM. On rappelle que le volume d'une pyramide est $V = \frac{b \times h}{3}$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée.

$\overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (coordonnées de M moins celles de K), donc $KM^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$, d'où $KM = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

K est le pied de la hauteur issue de M pour la base EGD, donc $h = KM = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $b = \mathcal{A}(\text{EGD}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (question 2.b).

Le volume de la pyramide GEDM vaut donc $V = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{\frac{3}{6}}{3} = \frac{1}{6}$.

Donc, la réponse est que la pyramide GEDM a un volume égal à $\frac{1}{6}$.

Brevet 2018 — Amérique du Nord

1. Développer et réduire $A = 2x(x - 1) - 4(x - 1)$.

$$A = 2x(x - 1) - 4(x - 1) = 2x^2 - 2x - 4x + 4 = 2x^2 - 6x + 4.$$

2. Montrer que -5 est solution de l'équation $(2x + 1)(x - 2) = 63$.

Pour $x = -5$: $(2 \times (-5) + 1) \times (-5 - 2) = (-10 + 1) \times (-7) = (-9) \times (-7) = \mathbf{63}$, ce qui correspond bien au membre de droite : -5 est solution.

3.a On considère la fonction $f(x) = -3x + 1,5$. Deux droites sont représentées sur deux graphiques : laquelle représente f ?

L'ordonnée à l'origine de f est 1,5 et son coefficient directeur est -3 .

C'est la droite dont l'ordonnée à l'origine vaut 1,5 et qui est décroissante (pente -3) qui représente f .

3.b Justifier ce choix.

La droite choisie est bien celle qui coupe l'axe des ordonnées en 1,5 et qui descend de 3 unités à chaque fois que x augmente de 1, ce qui correspond exactement au coefficient directeur -3 et à l'ordonnée à l'origine 1,5 de f .