

Exponentielle — Tous les corrigés

LOGIMATHS

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 1)

A.1 Donner les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,035y + 0,91$ sur $[0; +\infty[$.

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,035$ et $b = 0,91$.

La solution constante particulière vérifie $0 = -0,035y_p + 0,91$, soit $y_p = \frac{0,91}{0,035} = 26$.

Les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto Ke^{-0,035t} + 26$, où **K est une constante réelle**.

A.2 En déduire que, pour tout réel t de $[0; +\infty[$, $T(t) = 26 - 8e^{-0,035t}$.

D'après la question précédente, $T(t) = Ke^{-0,035t} + 26$.

Comme $T(0) = 18 : Ke^0 + 26 = 18$, soit $K = 18 - 26 = -8$.

Donc, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $T(t) = -8e^{-0,035t} + 26 = 26 - 8e^{-0,035t}$.

A.3 Déterminer au bout de combien de temps la pièce atteindra 20°C (en heures et minutes, arrondi à la minute).

On résout $T(t) = 20 : 26 - 8e^{-0,035t} = 20$, soit $8e^{-0,035t} = 6$, soit $e^{-0,035t} = 0,75$.

$-0,035t = \ln(0,75)$, donc $t = \frac{-\ln(0,75)}{0,035} \approx 8,22$ dizaines de minutes, soit environ 82,2 minutes.

82,2 minutes $\approx$ **1 h 22 min**.

A.4 Si le système ne s'éteignait pas à 20°C , la température pourrait-elle dépasser 28°C selon ce modèle ?

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,035t} > 0$, donc $T(t) = 26 - 8e^{-0,035t} < 26$.

La température modélisée par T reste donc toujours strictement inférieure à 26°C , quelle que soit la durée de chauffe.

Non, selon ce modèle, la température de la pièce ne pourra jamais dépasser 28°C (elle ne dépasse même jamais 26°C).

B.1 Montrer que $u_1 = 19,72$.

$$u_1 = 0,965 \times u_0 + 0,35 + 0,07e^{-0,1 \times 0} = 0,965 \times 20 + 0,35 + 0,07 \times 1 = 19,3 + 0,35 + 0,07 = \mathbf{19,72}.$$

B.2 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 10$.

Initialisation : $u_0 = 20 > 10$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que $u_n > 10$ pour un entier n donné. Montrons que $u_{n+1} > 10$.

$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n}. \text{ Comme } u_n > 10, \text{ on a } 0,965u_n > 9,65.$$

De plus, $0,07e^{-0,1n} > 0$ pour tout n (une exponentielle est toujours strictement positive).

Donc $u_{n+1} > 9,65 + 0,35 + 0 = 10$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 10$.

B.3 En déduire que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est décroissante (admis dans l'énoncé) et minorée par 10 (question précédente) : d'après le théorème de convergence monotone, **la suite (u_n) est convergente.**

B.4.a Justifier que la limite ℓ est solution de l'équation $x = 0,965x + 0,35$.

Comme (u_n) converge vers ℓ , la suite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ .

De plus, $e^{-0,1n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n}$, on obtient $\ell = 0,965\ell + 0,35$.

B.4.b Déterminer ℓ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

$$\ell - 0,965\ell = 0,35, \text{ soit } 0,035\ell = 0,35, \text{ soit } \ell = \frac{0,35}{0,035} = \mathbf{10}.$$

Interprétation : si le chauffage ne se remettait jamais en marche, la température de la pièce se rapprocherait indéfiniment de 10°C sans jamais l'atteindre.

B.5.a Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 du programme Python pour qu'il renvoie le nombre de dizaines de minutes à partir duquel le chauffage se remet en marche.

- Ligne 4 : while u > 18 :
- Ligne 5 : u = 0.965*u + 0.35 + 0.07*math.exp(-0.1*n)
- Ligne 6 : n = n + 1

B.5.b Déterminer le temps, en dizaines de minutes, à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

En calculant successivement les termes de la suite, on obtient $u_7 \approx 18,14$ (encore supérieur à 18) puis $u_8 \approx 17,90$ (inférieur à 18).

Le chauffage se remet donc en marche à partir de $n = 8$ dizaines de minutes, soit 80 minutes (1 h 20 min) après le début du refroidissement.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)**A.1 Calculer V_1 et V_2 ($V_0 = 0$, $V_{n+1} = 0,995 V_n + 6$).**

$$V_1 = 0,995 \times 0 + 6 = \mathbf{6 \text{ litres.}}$$

$$V_2 = 0,995 \times 6 + 6 = 5,97 + 6 = \mathbf{11,97 \text{ litres.}}$$

A.2 Recopier et compléter le programme Python pour qu'il renvoie le volume après n heures.

- `def volume(n) :`
- Ligne 2 : `v = 0`
- Ligne 3 : `for k in range(n) :`
- Ligne 4 : `v = 0.995*v + 6`
- Ligne 5 : `return v`

A.3 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.

Initialisation : $V_0 = 0$ et $V_1 = 6$ (question 1), donc $V_0 \leq V_1 \leq 1200$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ pour un entier n donné.

Comme $0,995 > 0$, on peut multiplier chaque membre : $0,995V_n \leq 0,995V_{n+1} \leq 0,995 \times 1200$, soit $0,995V_n \leq 0,995V_{n+1} \leq 1194$.

En ajoutant 6 partout : $0,995V_n + 6 \leq 0,995V_{n+1} + 6 \leq 1200$, c'est-à-dire $V_{n+1} \leq V_{n+2} \leq 1200$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.

A.4 Justifier que la suite (V_n) converge, et calculer sa limite.

D'après la question précédente, la suite (V_n) est croissante et majorée par 1 200.

D'après le théorème de convergence monotone, **la suite (V_n) converge** vers une limite ℓ .

La fonction associée à la récurrence, $x \mapsto 0,995x + 6$, est continue (fonction affine), donc ℓ est solution de l'équation $x = 0,995x + 6$.

$$0,005x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{0,005} = 1\,200.$$

La suite (V_n) converge donc vers **1 200** : le volume de substance polluante se stabilise autour de 1 200 litres.

B.1.a Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,005y + 6$ sur $[0; +\infty[$.

(E) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,005$ et $b = 6$. Sa solution particulière constante est $y_p = -\frac{b}{a} = \frac{6}{0,005} = 1\,200$.

Les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-0,005t} + 1\,200$, où **C est une constante réelle**.

B.1.b Montrer que, pour tout réel t de $[0; +\infty[$, $v(t) = 1200(1 - e^{-0,005t})$.

Comme $v(0) = 0$: $Ce^0 + 1\,200 = 0$, donc $C = -1\,200$.

$$v(t) = -1\,200e^{-0,005t} + 1\,200 = 1\,200(1 - e^{-0,005t}).$$

B.1.c Calculer la limite de v en $+\infty$.

Quand $t \rightarrow +\infty$, $e^{-0,005t} \rightarrow 0$, donc $v(t) \rightarrow 1\,200 \times (1 - 0) = 1\,200$.

B.1.d Déterminer le sens de variation de la fonction v sur $[0; +\infty[$.

$$v'(t) = 1\,200 \times 0,005 \times e^{-0,005t} = 6e^{-0,005t}, \text{ toujours strictement positif.}$$

La fonction v est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

B.2 Un taux de substance polluante supérieur à 5 % du volume du bassin (30 000 L) nécessite un nettoyage complet. Le propriétaire devra-t-il procéder à ce nettoyage ?

Le seuil critique est $0,05 \times 30\,000 = 1\,500$ litres.

La fonction v est strictement croissante et tend vers 1 200 sans jamais l'atteindre : elle est donc toujours strictement inférieure à 1 200, donc à 1 500.

Non, selon ce modèle, le volume de substance polluante n'atteindra jamais le seuil de 1 500 litres : un nettoyage complet ne sera jamais nécessaire.

B.3 Déterminer la valeur exacte de l'instant au-delà duquel le volume dépasse 50 litres (en heure et minute, arrondi à la minute).

On résout $v(t) = 50 : 1\,200 (1 - e^{-0,005t}) = 50$, soit $1 - e^{-0,005t} = \frac{50}{1\,200} = \frac{1}{24}$.

$$e^{-0,005t} = \frac{23}{24}, \text{ donc } -0,005t = \ln\left(\frac{23}{24}\right).$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{23}{24}\right)}{-0,005} = 200 \ln\left(\frac{24}{23}\right) \text{ (valeur exacte), soit environ 8,51 heures.}$$

8,51 heures $\approx$ **8 h 31 min.**

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)

A.1.a À l'aide du graphique, donner $f'(1)$ (la courbe admet une tangente horizontale au point C d'abscisse 1).

La tangente en C (abscisse 1) est parallèle à l'axe des abscisses, donc de coefficient directeur nul : $f'(1) = 0$.

A.1.b Donner la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$ (la courbe coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse $\frac{1}{2}$).

La courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'au point A, d'abscisse $\frac{1}{2}$: la solution de $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$ est $\frac{1}{2}$.

A.2 Déterminer $f'(\frac{1}{2})$ (la tangente en $A(\frac{1}{2}; 0)$ passe par $B(1; e^2)$).

$f'(\frac{1}{2})$ est le coefficient directeur de la tangente en A, c'est-à-dire de la droite (AB) :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{e^2 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = 2e^2.$$

A.3 Parmi les courbes C1, C2 et C3, indiquer lesquelles représentent des primitives de f.

Deux primitives d'une même fonction diffèrent uniquement d'une constante : leurs courbes se déduisent l'une de l'autre par une translation verticale.

C'est le cas de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, qui ont la même forme décalée verticalement.

$\mathcal{C}_3$ est décroissante là où f est positive (autour de $x = 0,5$ à $0,7$), ce qui est incompatible avec une primitive de f à cet endroit.

Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentent des primitives de f.

B.1.a Vérifier que, pour tout x de $[0; +\infty[$, $f(x) = e^2 \times (2x-1)/e^{2x-1}$ (avec $f(x) = (2x-1)e^{-2x+3}$).

On remarque que $-2x + 3 = -(2x - 1) + 2$, donc $e^{-2x+3} = e^{-(2x-1)} \times e^2$.

$$f(x) = (2x - 1) \times e^{-(2x-1)} \times e^2 = e^2 \times \frac{2x - 1}{e^{2x-1}}.$$

B.1.b En déduire la limite de f en $+\infty$ (on pourra poser $X = 2x-1$).

Quand $x \rightarrow +\infty$, $X = 2x - 1 \rightarrow +\infty$, et par croissances comparées $\frac{X}{e^X} \rightarrow 0$.

Donc $\frac{2x-1}{e^{2x-1}} \rightarrow 0$, puis $f(x) = e^2 \times \frac{2x-1}{e^{2x-1}} \rightarrow 0$.

B.2.a Montrer que, pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x) = (-4x+4)e^{-2x+3}$.

En dérivant le produit $f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3}$:

$$f'(x) = 2 \times e^{-2x+3} + (2x - 1) \times (-2)e^{-2x+3} = (2 - 2(2x - 1))e^{-2x+3} = (2 - 4x + 2)e^{-2x+3} = (-4x + 4)e^{-2x+3}.$$

B.2.b Construire le tableau complet des variations de f sur $[0; +\infty[$.

L'exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $(-4x + 4)$, positif avant $x = 1$ et négatif après.

f est donc croissante sur $[0; 1]$ puis décroissante sur $[1; +\infty[$.

$$f(0) = (0 - 1)e^3 = -e^3 \text{ et } f(1) = (2 - 1)e^1 = e.$$

Tableau : f croît de $-e^3$ à e sur $[0; 1]$, puis décroît de e vers 0 (sans l'atteindre) sur $[1; +\infty[$.

B.3 Justifier que la contrainte du client se traduit par $f(\alpha) = 0,15$, puis montrer qu'il existe une unique valeur de α dans $[1; +\infty[$ vérifiant cette égalité. En donner une valeur arrondie au dixième.

Le point $(\alpha; f(\alpha))$ et son symétrique $(\alpha; -f(\alpha))$ par rapport à l'axe des abscisses sont distants verticalement de $2f(\alpha)$.

Cette distance doit valoir 0,3 cm : $2f(\alpha) = 0,3 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0,15$.

Sur $[1; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, de $f(1) = e \approx 2,7$ vers 0 (sans l'atteindre).

Comme $0 < 0,15 < e$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), **l'équation $f(x) = 0,15$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$.**

À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 3,3$.

C.1 À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale I de f entre 0,5 et 3,3 est, arrondie au dixième, égale à 3,6.

On pose $u(x) = 2x - 1$ et $v'(x) = e^{-2x+3}$, donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$.

$$I = [u(x)v(x)]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} u'(x)v(x) dx = \left[-\frac{1}{2}(2x-1)e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} + \int_{0,5}^{3,3} e^{-2x+3} dx$$

Le crochet vaut $-\frac{1}{2}(5,6e^{-3,6} - 0) = -2,8e^{-3,6}$.

L'intégrale restante vaut $\left[-\frac{1}{2}e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} = -\frac{1}{2}e^{-3,6} + \frac{1}{2}e^2$.

$$I = -2,8e^{-3,6} - 0,5e^{-3,6} + 0,5e^2 = 0,5e^2 - 3,3e^{-3,6} \approx \mathbf{3,6}.$$

C.2 Déterminer le volume du porte-clé en cm^3 , arrondi au dixième (volume = aire du logo $\times$ épaisseur de 0,2 cm).

Le logo est symétrique par rapport à l'axe des abscisses : son aire est le double de l'aire sous la courbe de f entre 0,5 et 3,3, c'est-à-dire $2I \approx 2 \times 3,6 = 7,2 \text{ cm}^2$.

$$\text{Volume} \approx 7,2 \times 0,2 = \mathbf{1,4 \text{ cm}^3}.$$

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)

A.1 Donner les variations de F_2 sur $]0; 3]$.

F_2 est une primitive de f_2 , donc ses variations sont données par le signe de f_2 . D'après le graphique, F_2 est décroissante sur $]0; 0,3]$, croissante sur $[0,3; 2,5]$, puis décroissante sur $[2,5; 3]$.

A.2 Identifier les courbes représentant f_2 et f_2' .

f_2 admet un maximum en $x \approx 0,75$ (là où F_2 change de croissante à décroissante) : sa dérivée doit s'y annuler. C'est la **courbe 1** qui s'annule vers 0,75 : elle représente f_2' .

Le point A (point d'inflexion de C_2) est situé vers $x \approx 1,6$: la dérivée seconde s'y annule. C'est la **courbe 2** qui s'annule vers 1,6 : elle représente f_2'' .

B.1.a Montrer que $f_1(x) = -1 - \ln(x)/x^2$.

$f_1 = w + \frac{u}{v}$ avec $w(x) = 1 - x$, $u(x) = 1 + \ln x$, $v(x) = x$, donc $w'(x) = -1$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v'(x) = 1$.

$$f_1'(x) = w'(x) + \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} = -1 + \frac{1 - (1 + \ln x)}{x^2} = -1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

B.1.b Déterminer la limite de $f_1(x)$ en $+\infty$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1'(x) = -1$.

B.2.a Justifier les variations de f_1 et la valeur de l'extremum.

$f_1''(x)$ a le signe de $2 \ln x - 1$ (car $x^3 > 0$), positif pour $x > e^{\frac{1}{2}}$.

f_1' est donc décroissante sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$ puis croissante sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$.

$f_1'(e^{\frac{1}{2}}) = -1 - \frac{\ln(e^{\frac{1}{2}})}{e} = -1 - \frac{1}{2e}$: c'est bien la valeur du minimum du tableau.

B.2.b Justifier la limite de f_1 en 0.

Quand $x \rightarrow 0^+$: $-\ln(x) \rightarrow +\infty$ et $x^2 \rightarrow 0^+$, donc par quotient puis somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1'(x) = +\infty$.

B.2.c Montrer qu'il existe une unique solution α à $f_1(x) = 0$, puis que f_1 admet un maximum.

Sur $\left]0; e^{\frac{1}{2}}\right]$, f_1' est continue et strictement décroissante, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1'(x) = +\infty > 0$ et $f_1'(e^{\frac{1}{2}}) = -1 - \frac{1}{2e} < 0$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_1'(x) = 0$ y admet une unique solution.

Sur $\left[e^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[$, f_1' est strictement croissante et tend vers -1 , donc reste toujours strictement négative : pas de solution sur cet intervalle.

Il existe donc **une unique solution** α à $f_1'(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$, et f_1 **admet un maximum en** α (signe de f_1' positif puis négatif).

B.2.d Compléter le script Python calculant une valeur approchée de α .

- Condition de la boucle « while » : **while d(u) > 0 :**
- Instruction dans la boucle : **u = u + 0.01**

C.1 Montrer que H est une primitive de h .

H est de la forme $\frac{1}{2}u^2$ avec $u(x) = 1 + \ln x$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$, et $H'(x) = u'(x)u(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x) = h(x)$.

H est donc bien une primitive de h sur $]0; +\infty[$.

C.2 Existe-t-il k tel que la valeur moyenne de f sur $[1; e]$ soit nulle ?

$$\begin{aligned} \text{La valeur moyenne est } \mu &= \frac{1}{e-1} \int_1^e f_k(x) dx = \frac{1}{e-1} \int_1^e (1-x+kh(x)) dx = \frac{1}{e-1} \left[x - \frac{x^2}{2} + kH(x) \right]_1^e \\ &= \frac{1}{e-1} \left(\left(e - \frac{e^2}{2} + k \frac{(1+1)^2}{2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} + k \frac{(1+0)^2}{2} \right) \right) = \frac{2e - e^2 + 3k - 1}{2(e-1)}. \\ \mu = 0 &\Leftrightarrow 2e - e^2 + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{e^2 - 2e + 1}{3} = \frac{(e-1)^2}{3}. \end{aligned}$$

Oui, il existe une unique valeur $k = \frac{(e-1)^2}{3}$ pour laquelle la valeur moyenne de f_k sur $[1; e]$ est nulle.

Bac Première 2026 — Amérique du Nord (SPE)**1. Montrer que, pour tout x , $f'(x) = (-2x + 6)e^{-0,5x}$.**

$f(x) = (4x - 4)e^{-0,5x} + 5$ est de la forme $uv + 5$ avec $u(x) = 4x - 4$, $v(x) = e^{-0,5x}$, donc $u'(x) = 4$, $v'(x) = -0,5e^{-0,5x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 4e^{-0,5x} + (4x - 4) \times (-0,5)e^{-0,5x} = [4 - 0,5(4x - 4)]e^{-0,5x} = \\ &= [4 - 2x + 2]e^{-0,5x} = (-2x + 6)e^{-0,5x}. \end{aligned}$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de f .

$e^{-0,5x} > 0$ pour tout x , donc $f'(x)$ est du signe de $-2x + 6$, qui s'annule en $x = 3$ et est positif pour $x < 3$.

f est croissante sur $] -\infty; 3]$ et décroissante sur $[3; +\infty[$, avec un maximum $f(3) = 8e^{-1,5} + 5$.

3. La courbe admet-elle des points à tangente horizontale ?

La tangente est horizontale lorsque $f'(x) = 0$, soit uniquement en $x = 3$.

$$f(3) = (4 \times 3 - 4)e^{-0,5 \times 3} + 5 = 8e^{-1,5} + 5.$$

Oui, $\mathcal{C}_f$ admet un unique point à tangente horizontale, de coordonnées $(3; 8e^{-1,5} + 5)$.

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 1)

Partie A — 1. Les courbes C_1 et C_2 représentent deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, l'une étant la dérivée de l'autre ; C_1 coupe l'axe des ordonnées en $(0 ; 1)$, C_2 le coupe en $(0 ; 2)$ et coupe l'axe des abscisses en $(-2 ; 0)$ et $(1 ; 0)$. Associer à g et g' leur courbe.

La fonction représentée par C_1 est décroissante sur $] -\infty ; -2]$ et $[1 ; +\infty[$, croissante sur $[-2 ; 1]$.

La fonction représentée par C_2 est négative sur $] -\infty ; -2]$ et $[1 ; +\infty[$, positive sur $[-2 ; 1]$: ce sont exactement les intervalles où la fonction de C_1 croît ou décroît.

Le signe de la dérivée déterminant les variations, C_1 représente g et C_2 représente g' .

Partie A — 2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

La tangente en 0 a pour équation $y = g'(0)x + g(0)$.

C_1 coupe l'axe des ordonnées en $(0 ; 1)$ donc $g(0) = 1$; C_2 le coupe en $(0 ; 2)$ donc $g'(0) = 2$.

L'équation de la tangente est donc $y = 2x + 1$.

Partie B — 1. On considère l'équation différentielle (E) : $y + y' = (2x+3)e^{-x}$. Montrer que $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est une solution particulière de (E).

f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables : $f'_0(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x)(-e^{-x}) = (2x + 3 - x^2 - 3x)e^{-x} = (-x^2 - x + 3)e^{-x}$.

$f_0(x) + f'_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x} + (-x^2 - x + 3)e^{-x} = (2x + 3)e^{-x}$: f_0 vérifie bien (E).

Partie B — 2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y + y' = 0$.

(E_0) équivaut à $y' = -y$: ses solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie B — 3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

(E) est de la forme $y' = ay + f$ avec f_0 solution particulière : ses solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-x} + f_0(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie B — 4. On admet que g est solution de (E). Déterminer l'expression de g .

Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$. Comme $g(0) = 1$: $1 = (0 + 0 + C)e^0 = C$.

$g(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$.

Partie B — 5. Déterminer les solutions de (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Une courbe admet exactement deux points d'inflexion si et seulement si sa dérivée seconde s'annule exactement deux fois en changeant de signe.

Soit $f(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$ une solution de (E) : $f'(x) = (-x^2 - x + 3 - C)e^{-x}$ et $f''(x) = (x^2 - x - 4 + C)e^{-x}$.

L'exponentielle étant strictement positive, $f''(x)$ est du signe de $x^2 - x - 4 + C$, dont le discriminant est $\Delta = 1 - 4(-4 + C) = 17 - 4C$.

Ce polynôme change deux fois de signe si et seulement si $\Delta > 0$, soit $C < \frac{17}{4}$.

Les solutions cherchées sont les fonctions $x \mapsto (x^2 + 3x + C)e^{-x}$ avec $C < \frac{17}{4}$.

Partie C — 1. On considère $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la limite de f en $+\infty$ est égale à 0.

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} + 3\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}.$$

Par croissances comparées, pour tout entier n non nul, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$; donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Partie C — 2.a Vérifier que, pour tout réel x , $f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$.

$$f'(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x + 2)(-e^{-x}) = (2x + 3 - x^2 - 3x - 2)e^{-x} = (-x^2 - x + 1)e^{-x}.$$

Partie C — 2.b Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de f .

L'exponentielle étant strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $-x^2 - x + 1$, de discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$.

Ses racines sont $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$; le coefficient dominant étant négatif, $-x^2 - x + 1$ est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles.

f est décroissante sur $] -\infty ; x_1]$ et sur $[x_2 ; +\infty[$, croissante sur $[x_1 ; x_2]$.

Partie C — 3. Expliquer pourquoi f est positive sur $[0 ; +\infty[$.

L'exponentielle étant strictement positive, $f(x)$ est du signe de $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$, de racines -2 et -1 .

Le coefficient dominant étant positif, ce polynôme est positif sur $] -1 ; +\infty[$, donc en particulier sur $[0 ; +\infty[$: **f est positive sur $[0 ; +\infty[$.**

Partie C — 4. On admet que $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$ est une primitive de f . Pour α réel positif, déterminer l'aire $A(\alpha)$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites $x = 0$ et $x = \alpha$.

f étant positive sur $[0 ; \alpha]$, l'aire cherchée est $\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx = F(\alpha) - F(0)$.

$F(0) = (0 - 0 - 7)e^0 = -7$, donc $\mathcal{A}(\alpha) = (-\alpha^2 - 5\alpha - 7)e^{-\alpha} + 7$ unités d'aire.

Bac Terminale 2024 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1.a Soit $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ sur $] -\infty ; 1[$. Déterminer la limite de f en 1.

$e^x \rightarrow e > 0$ et $x - 1 \rightarrow 0^-$ (négatif sur l'intervalle) : par quotient, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

1.b En déduire une interprétation graphique.

La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

$e^x \rightarrow 0$ et $x - 1 \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; la droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

3.a Montrer que $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}.$$

3.b Dresser, en justifiant, le tableau de variations de f sur $] -\infty ; 1[$.

$e^x > 0$ et $(x-1)^2 > 0$: $f'(x)$ est du signe de $x-2$, strictement négatif sur $] -\infty ; 1[$. f est strictement décroissante, de 0 (limite en $-\infty$) vers $-\infty$ (limite en 1).

4.a On admet $f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}$. Étudier la convexité de f sur $] -\infty ; 1[$.

$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0$ pour tout réel x , et $e^x > 0$; sur $] -\infty ; 1[$, $(x-1)^3 < 0$.

$f''(x) < 0$ sur tout l'intervalle : f est concave sur $] -\infty ; 1[$.

4.b Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

$f(0) = -1$ et $f'(0) = \frac{-2 \times 1}{1} = -2$: $T : y = -2x - 1$.

4.c En déduire que, pour tout x de $] -\infty ; 1[$, $e^x \geq (-2x-1)(x-1)$.

f étant concave, sa courbe est sous ses tangentes : $f(x) \leq -2x - 1$, soit $\frac{e^x}{x-1} \leq -2x - 1$.

En multipliant par $x-1 < 0$ (le sens change) : $e^x \geq (-2x-1)(x-1)$.

5.a Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $] -\infty ; 1[$.

f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty ; 1[$, et -2 est compris entre $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_1 f = -\infty$: par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet **une unique solution α** .

5.b À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

$f(0,31) \approx -1,98 > -2$ et $f(0,32) \approx -2,03 < -2$: $0,31 < \alpha < 0,32$.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

Un biologiste modélise l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'individus) par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = e^3 - e^{-0,5t^2+t+2}$, où t désigne le temps en heures. **Affirmation 1 : « La population de bactéries augmente en permanence ». Vrai ou faux ?**

f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables. En posant $g(t) = -0,5t^2+t+2$, donc $g'(t) = -t + 1$, on obtient $f'(t) = -g'(t) e^{g(t)} = (t - 1) e^{-0,5t^2+t+2}$.

L'exponentielle étant strictement positive, $f'(t)$ est du signe de $(t - 1)$: $f'(t) < 0$ sur $[0 ; 1[$ et $f'(t) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0 ; 1]$.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** : durant la première heure, la population diminue strictement.

Affirmation 2 : « À très long terme, la population dépassera 21 000 bactéries ». Vrai ou faux ?

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,5t^2+t+2} > 0$, donc $-e^{-0,5t^2+t+2} < 0$, d'où $f(t) = e^3 - e^{-0,5t^2+t+2} < e^3$.

Or $e^3 \approx 20,086$ (au millième près), donc $f(t)$ reste toujours strictement inférieur à environ 20,086 milliers d'individus, soit 20 086 bactéries.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** : la population ne dépassera jamais 20 086 bactéries, donc a fortiori jamais 21 000.

Affirmation 3 : « La population de bactéries atteindra un effectif de 10 000 individus à deux reprises au cours du temps ». Vrai ou faux ?

Un effectif de 10 000 bactéries correspond à $f(t) = 10$ (population exprimée en milliers). D'après l'étude de variations précédente, f est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$ puis strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

On calcule les valeurs utiles : $f(0) = e^3 - e^2 \approx 12,696$ et $f(1) = e^3 - e^{2,5} \approx 7,903$. De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-0,5t^2 + t + 2) = -\infty$ (le terme en t^2 l'emporte), donc par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,5t^2+t+2} = 0$,

puis $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = e^3 \approx 20,086$.

Sur $[0 ; 1]$: f est continue et strictement décroissante, et 10 est compris strictement entre $f(1) \approx 7,903$ et $f(0) \approx 12,696$, donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 10$ admet une unique solution sur cet intervalle.

Sur $[1 ; +\infty[$: f est continue et strictement croissante, et 10 est compris strictement entre $f(1) \approx 7,903$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \approx 20,086$, donc l'équation $f(t) = 10$ admet là aussi une unique solution.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie** : l'équation $f(t) = 10$ admet exactement deux solutions sur $[0 ; +\infty[$, donc la population atteindra bien 10 000 individus à deux reprises.

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 1)

1. Affirmation : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$ est convexe. Vrai ou faux ?

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = e^x - 1$ puis $f''(x) = e^x$. Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , f'' est positive sur $\mathbb{R}$. Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie** : f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Affirmation : l'équation $(2e^x - 6)(e^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution réelle. Vrai ou faux ?

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul : $2e^x - 6 = 0$ ou $e^x + 2 = 0$.

Comme $e^x > 0$ pour tout x , on a $e^x + 2 > 2 > 0$: cette équation n'a donc aucune solution.

L'autre équation donne $2e^x = 6 \iff e^x = 3 \iff x = \ln(3)$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle, cette solution est unique).

Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie**.

3. Affirmation : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = 0$. Vrai ou faux ?

On factorise par le terme dominant de chaque membre : $\frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = \frac{e^{2x}(1 - e^{-2x})}{e^x(1 - xe^{-x})} = e^x \times \frac{1 - e^{-2x}}{1 - xe^{-x}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$ donc le numérateur de la fraction tend vers 1 ; et $xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc le dénominateur tend aussi vers 1.

Le quotient tend donc vers 1, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = +\infty$.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** (la limite vaut $+\infty$, pas 0).

4. Affirmation : avec $f(x) = (6x + 5)e^{3x}$ et $F(x) = (2x + 1)e^{3x} + 4$ sur $\mathbb{R}$, F est la primitive de f qui vaut 5 en $x = 0$. Vrai ou faux ?

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables : $F'(x) = 2e^{3x} + 3(2x + 1)e^{3x} = e^{3x}(2 + 6x + 3) = (6x + 5)e^{3x} = f(x)$.

De plus $F(0) = (2 \times 0 + 1)e^0 + 4 = 1 + 4 = 5$.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie** : F est bien la primitive de f sur $\mathbb{R}$ valant 5 en 0.

5. On considère une fonction Python ‘mystere(L)’ qui parcourt une liste L, cumule la somme S de ses éléments, puis renvoie S divisée par la longueur de L (la moyenne des éléments). Affirmation : ‘mystere([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5])’ renvoie 50. Vrai ou faux ?

La somme des dix éléments de la liste vaut $1 + 9 + 9 + 5 + 0 + 3 + 6 + 12 + 0 + 5 = 50$, et la fonction renvoie cette somme divisée par la longueur de la liste (ici 10), soit $\frac{50}{10} = 5$. Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** (le résultat renvoyé vaut 5, pas 50).

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 2)

Partie A — 1. Le plan est muni d'un repère orthogonal. On donne les représentations graphiques d'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f'' , notées $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$. Identifier, en justifiant, quelle courbe correspond à quelle fonction.

La courbe $\mathcal{C}_2$ reste strictement positive sur $\mathbb{R}$: si elle représentait une dérivée, la fonction associée serait strictement croissante partout, ce qu'aucune des deux autres courbes ne vérifie. $\mathcal{C}_2$ représente donc f elle-même, qui est strictement croissante.

La dérivée d'une fonction strictement croissante est positive : c'est donc $\mathcal{C}_3$, seule courbe restant positive et cohérente avec cette croissance, qui représente f' .

Par élimination, $\mathcal{C}_1$ représente f'' : on vérifie que f' (courbe $\mathcal{C}_3$) croît puis décroît à partir de l'abscisse 4, ce qui correspond bien au changement de signe de $\mathcal{C}_1$ autour de cette valeur.

Partie A — 2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse 4.

Ce coefficient directeur vaut $f'(4)$, c'est-à-dire l'ordonnée du point d'abscisse 4 sur la courbe $\mathcal{C}_3$ (courbe de f'), soit environ **3** par lecture graphique.

Partie A — 3. Donner, avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_1$.

Les points d'inflexion de $\mathcal{C}_1$ (courbe de f'') correspondent aux changements de sens de variation visibles sur le graphique, soit environ aux abscisses **3, 4 et 5**.

Partie B — Soit k un réel strictement positif et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{4}{1 + e^{-kx}}$. 1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Comme $k > 0$, quand $x \rightarrow -\infty$, $-kx \rightarrow +\infty$ donc $e^{-kx} \rightarrow +\infty$ par composition ; par somme $1 + e^{-kx} \rightarrow +\infty$, donc, par quotient, $g(x) \rightarrow 0$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $-kx \rightarrow -\infty$ donc $e^{-kx} \rightarrow 0$ par composition ; par somme $1 + e^{-kx} \rightarrow 1$, donc, par quotient, $g(x) \rightarrow 4$.

Donc, la réponse est $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$.

Partie B — 2. Montrer que $g'(0) = k$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et quotient de fonctions dérivables ne s'annulant pas. En écrivant $g = \frac{4}{u}$ avec $u(x) = 1 + e^{-kx}$, on a $u'(x) = -ke^{-kx}$, donc $g' = -\frac{4u'}{u^2}$, soit $g'(x) = \frac{4ke^{-kx}}{(1 + e^{-kx})^2}$.

En $x = 0$: $g'(0) = \frac{4k e^0}{(1 + e^0)^2} = \frac{4k}{2^2} = \frac{4k}{4} = k$. Donc, la réponse est $g'(0) = k$.

Partie B — 3. Sachant qu'un logiciel de calcul formel donne $g''(x) = -4e^{kx} (e^{kx} - 1) \frac{k^2}{(e^{kx} + 1)^3}$, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion à l'abscisse 0.

La courbe admet un point d'inflexion en un réel où g'' s'annule en changeant de signe : il faut donc étudier le signe de $g''(x)$.

Le facteur $\frac{4k^2 e^{kx}}{(e^{kx} + 1)^3}$ est strictement positif pour tout réel x (exponentielle positive, $k^2 > 0$). Le signe de $g''(x)$ est donc celui de $-(e^{kx} - 1) = 1 - e^{kx}$.

Or $1 - e^{kx} > 0 \iff e^{kx} < 1 \iff kx < 0 \iff x < 0$ (car $k > 0$). Donc $g''(x)$ est strictement positive sur $] -\infty ; 0[$, nulle en 0, et strictement négative sur $]0 ; +\infty[$: g'' change bien de signe en 0.

Donc, la réponse est que la courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 1)

1.a L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne $J(2; 0; 1)$, $K(1; 2; 1)$ et $L(-2; -2; -2)$. Montrer que le triangle JKL est rectangle en J.

$$\overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JL} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{JL} = (-1) \times (-4) + 2 \times (-2) + 0 \times (-3) = 4 - 4 + 0 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont orthogonaux, donc le triangle JKL est rectangle en J.

1.b Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle JKL (en cm^2).

$$JK = \|\overrightarrow{JK}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5} \text{ et } JL = \|\overrightarrow{JL}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}.$$

$$\text{Le triangle étant rectangle en J, son aire vaut } \mathcal{A} = \frac{JK \times JL}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{145}}{2} \text{ cm}^2.$$

1.c Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle géométrique $\widehat{JKL}$.

Le triangle JKL étant rectangle en J, on utilise SOH-CAH-TOA dans le triangle rectangle JKL :

$$\tan(\widehat{JKL}) = \frac{JL}{JK} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Donc, } \widehat{JKL} = \arctan\left(\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}\right) \approx 67,5^\circ.$$

2.a Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ est normal au plan (JKL).

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{JK} = 6 \times (-1) + 3 \times 2 + (-10) \times 0 = -6 + 6 + 0 = 0.$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{JL} = 6 \times (-4) + 3 \times (-2) + (-10) \times (-3) = -24 - 6 + 30 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (JKL), donc $\vec{n}$ est normal au plan (JKL).

2.b En déduire une équation cartésienne du plan (JKL).

$$\text{Le plan (JKL), de vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}, \text{ a une équation de la forme } 6x + 3y - 10z + d = 0.$$

$$\text{Comme } J(2; 0; 1) \text{ appartient au plan : } 6 \times 2 + 3 \times 0 - 10 \times 1 + d = 0 \iff 12 - 10 + d = 0 \iff d = -2.$$

$$\text{Donc, une équation cartésienne du plan (JKL) est } 6x + 3y - 10z - 2 = 0.$$

3.a On note **T** le point de coordonnées $(10; 9; -6)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (JKL) et passant par **T**.

La droite Δ , orthogonale au plan (JKL), admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur ; elle passe par $T(10; 9; -6)$. Une représentation paramétrique est donc :

$$\begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = 9 + 3t \\ z = -6 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3.b Déterminer les coordonnées du point **H**, projeté orthogonal de **T** sur le plan (JKL).

H est l'unique point d'intersection de Δ et du plan (JKL). On remplace les coordonnées paramétriques dans l'équation du plan : $6(10 + 6t) + 3(9 + 3t) - 10(-6 - 10t) - 2 = 0$.

En développant : $60 + 36t + 27 + 9t + 60 + 100t - 2 = 0 \iff 145t + 145 = 0 \iff t = -1$.

En remplaçant $t = -1$: $x = 10 + 6 \times (-1) = 4$, $y = 9 + 3 \times (-1) = 6$, $z = -6 - 10 \times (-1) = 4$.

Donc, **H** a pour coordonnées $(4; 6; 4)$.

3.c Sachant que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante, calculer la valeur exacte du volume du tétraèdre JKLT (en cm^3).

On prend pour base le triangle JKL, d'aire $\mathcal{B} = \frac{\sqrt{145}}{2} \text{ cm}^2$ (question 1.b), et pour hauteur la longueur TH, puisque H est le projeté orthogonal de T sur le plan (JKL).

$\overrightarrow{TH} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$, donc $TH = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 10^2} = \sqrt{145}$.

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{145}}{2} \times \sqrt{145} = \frac{145}{6}.$$

Donc, le volume du tétraèdre JKLT vaut $\frac{145}{6} \text{ cm}^3$.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 2)

Partie A — 1. Soit p la fonction définie sur $[-3 ; 4]$ par $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$. Étudier les variations de p sur $[-3 ; 4]$.

p est dérivable sur $[-3 ; 4]$, avec $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$, un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$.

Comme $\Delta < 0$ et que le coefficient dominant (3) est positif, $p'(x) > 0$ pour tout x de $[-3 ; 4]$: p est strictement croissante sur $[-3 ; 4]$.

Partie A — 2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet, sur $[-3 ; 4]$, une unique solution notée α .

$p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$. p est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[-3 ; 4]$, à valeurs entre -68 et 37 ; comme 0 appartient à cet intervalle, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une **unique solution** α dans $[-3 ; 4]$.

Partie A — 3. Donner une valeur approchée de α au dixième près.

À la calculatrice, $p(-0,2) \approx -0,13 < 0$ et $p(-0,1) \approx 0,47 > 0$: donc, $\alpha \approx -0,2$ au dixième près.

Partie A — 4. Donner le tableau de signes de p sur $[-3 ; 4]$.

p étant strictement croissante et s'annulant uniquement en $\alpha \approx -0,2$: $p(x) < 0$ sur $[-3 ; \alpha[$, $p(\alpha) = 0$, et $p(x) > 0$ sur $]\alpha ; 4]$.

Partie B — 1.a Soit f la fonction définie sur $[-3 ; 4]$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$, de courbe $\mathcal{C}_f$. Déterminer $f'(x)$.

f est dérivable sur $[-3 ; 4]$ (car $1+x^2 \neq 0$), et par la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - e^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1+x^2)^2} = \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2}.$$

Partie B — 1.b Justifier que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

$$f'(x) = 0 \iff (x-1)^2 e^x = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \text{ (car } e^x \neq 0) \iff x = 1.$$

Donc, $f'(1) = 0$: la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est horizontale, d'équation $y = f(1) = \frac{e}{2}$.

Partie B — 2.a Des concepteurs utilisent $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan, en estimant que le profil assure de bonnes sensations s'il possède au moins deux points d'inflexion. D'après le graphique fourni, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ?

Graphiquement, la courbe $\mathcal{C}_f$ semble convexe sur $[-3 ; 0]$, concave sur $[0 ; 1]$, puis de nouveau convexe sur $[1 ; 4]$: elle change donc deux fois de convexité, aux abscisses 0 et 1. Le toboggan semble assurer de bonnes sensations.

Partie B — 2.b On admet que, pour tout x de $[-3 ; 4]$, $f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$, où p est la fonction de la partie A. Confirmer, en justifiant, si le toboggan assure de bonnes sensations.

Sur $[-3 ; 4]$, $(1+x^2)^3 > 0$ et $e^x > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $p(x)(x-1)$.

D'après le tableau de signes de p (partie A, question 4) : $p(x) < 0$ sur $[-3 ; \alpha[$ et $p(x) > 0$ sur $]\alpha ; 4]$; par ailleurs $x-1 < 0$ sur $[-3 ; 1[$ et $x-1 > 0$ sur $]1 ; 4]$.

En croisant les signes : $p(x)(x-1)$ est positif sur $[-3 ; \alpha[$, négatif sur $]\alpha ; 1[$, puis positif sur $]1 ; 4]$: f'' change donc bien de signe en $x = \alpha$ et en $x = 1$.

$\mathcal{C}_f$ admet donc bien **deux points d'inflexion** (aux abscisses α et 1) : le toboggan assure de bonnes sensations, ce qui confirme la lecture graphique.

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

Partie A — 1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x$. Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$, donc par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$.

En $+\infty$: pour $x \neq 0$, on écrit $h(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$.

Par produit de limites (avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$), $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

Partie A — 2. Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, avec $h'(x) = e^x - 1$.

$h'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$, et de même $h'(x) < 0 \iff x < 0$, puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

h est donc strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ puis strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, avec un minimum en $x = 0$ valant $h(0) = e^0 - 0 = 1$.

Tableau de variation : h décroît de $+\infty$ à $h(0) = 1$ sur $] -\infty ; 0]$, puis croît de 1 à $+\infty$ sur $[0 ; +\infty[$.

Partie A — 3. En déduire que, si a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$, alors $h(a) - h(b) < 0$.

D'après la question précédente, h est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Si $0 < a < b$, alors par stricte croissance de h sur cet intervalle, $h(a) < h(b)$, ce qui équivaut à $h(a) - h(b) < 0$.

Partie B — 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$.

Comme $f' = f$ pour la fonction exponentielle, $f(0) = f'(0) = e^0 = 1$.

Donc, une équation de T est $y = 1 + 1 \times x$, soit $y = x + 1$.

Partie B — 2. On s'intéresse à l'écart, au voisinage de 0, entre T et $\mathcal{C}_f$, aux points d'abscisse $\frac{1}{n}$ (avec n entier naturel non nul). Cet écart est la différence des ordonnées des points de T et $\mathcal{C}_f$ de même abscisse. On pose, pour tout entier naturel non nul n , $u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^0 = 1$.

Donc, par somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 - 0 - 1 = 0$.

Partie B — 3.a Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , $u_{n+1} - u_n = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$, où h est la fonction de la partie A.

$$u_{n+1} - u_n = \left[\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} - 1 \right] - \left[\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1 \right].$$

En développant, les termes constants -1 et $+1$ s'éliminent : $u_{n+1} - u_n = \exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} - \exp\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}$.

En regroupant : $u_{n+1} - u_n = \left[\exp\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} \right] - \left[\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right] = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$, puisque $h(x) = e^x - x$.

Partie B — 3.b En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Pour tout entier naturel non nul n , on a $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.

D'après la question 3 de la partie A (avec $a = \frac{1}{n+1}$ et $b = \frac{1}{n}$), on a donc $h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right) < 0$.

D'après la question précédente, cela signifie que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel non nul n : la suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Partie B — 4. Un tableau de valeurs approchées à 10^{-9} près donne : $u_1 \approx 0,718281828$; $u_2 \approx 0,148721271$; $u_3 \approx 0,062279092$; $u_4 \approx 0,034025417$; $u_5 \approx 0,021402758$; $u_6 \approx 0,014693746$; $u_7 \approx 0,010707852$; $u_8 \approx 0,008148453$; $u_9 \approx 0,006407958$; $u_{10} \approx 0,005170918$. Donner la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$ semble être inférieur à 10^{-2} .

La suite (u_n) étant strictement décroissante (question 3.b), on cherche dans le tableau le premier terme strictement inférieur à $10^{-2} = 0,01$.

On lit $u_7 \approx 0,010707852 > 0,01$, tandis que $u_8 \approx 0,008148453 < 0,01$.

Donc, la plus petite valeur de n pour laquelle l'écart entre T et $\mathcal{C}_f$ semble inférieur à 10^{-2} est $n = 8$.

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{e^x}$. Quelle est l'expression de $f'(x)$: a. e^{-x} ; b. xe^{-x} ; c. $(1-x)e^{-x}$; d. $(1+x)e^{-x}$?

En écrivant $f(x) = xe^{-x}$ (produit de x par e^{-x}), la formule de dérivation d'un produit donne, pour tout réel x : $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$.

Réponse c.

2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[-3 ; 1]$, dont on donne la courbe représentative de la fonction dérivée seconde f'' : celle-ci est positive sur $[-3 ; -1]$, s'annule en $x = -1$, puis est négative sur $[-1 ; 1]$. Que peut-on affirmer : a. f convexe sur $[-1 ; 1]$; b. f concave sur $[-2 ; 0]$; c. f' décroissante sur $[-2 ; 0]$; d. f' admet un maximum en $x = -1$?

Comme f'' est positive sur $[-3 ; -1]$, la fonction f' est croissante sur cet intervalle ; comme f'' est négative sur $[-1 ; 1]$, la fonction f' est décroissante sur cet intervalle.

La fonction f' est donc croissante puis décroissante, avec un changement de sens de variation en $x = -1$: f' admet donc un maximum local en $x = -1$.

Réponse d.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 e^{-x^2}$. Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, laquelle des expressions suivantes convient : a. $F(x) = -\frac{1}{6}(x^3 + 1)e^{-x^2}$; b. $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 e^{-x^2}$; c. $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2}$; d. $F(x) = x^2(3 - 2x^2)e^{-x^2}$?

Pour identifier la bonne primitive, on dérive chaque candidate et on compare le résultat à $f(x) = x^3 e^{-x^2}$. Testons la proposition c : $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2}$.

En utilisant la formule de dérivation d'un produit, avec $u(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)$ et $v(x) = e^{-x^2}$, on a $u'(x) = -x$ et $v'(x) = -2x e^{-x^2}$: $F'(x) = -x e^{-x^2} + \left(-\frac{1}{2}(x^2 + 1)\right) \times (-2x e^{-x^2}) = -x e^{-x^2} + x(x^2 + 1)e^{-x^2}$.

En factorisant : $F'(x) = e^{-x^2}(-x + x^3 + x) = x^3 e^{-x^2} = f(x)$. La proposition c convient bien.

Réponse c.

4. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$: a. -1 ; b. 1 ; c. $+\infty$; d. n'existe pas ?

Pour lever l'indétermination, on factorise le numérateur et le dénominateur par le terme dominant e^x (non nul) : $\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{e^x(1 + e^{-x})}{e^x(1 - e^{-x})} = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc par limite de quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$.

Réponse b.

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+1}$. La seule primitive F sur $\mathbb{R}$ de f telle que $F(0) = 1$ est : a. $x \mapsto 2e^{2x+1} - 2e + 1$; b. $x \mapsto 2e^{2x+1} - e$; c. $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x+1} - \frac{1}{2}e + 1$; d. $x \mapsto e^{x^2+x}$?

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. En remarquant que $f(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x+1}$ est de la forme $u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = 2x + 1$, une primitive générale de f s'écrit $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + k$, avec k une constante réelle.

La condition $F(0) = 1$ donne $\frac{1}{2}e^1 + k = 1$, soit $k = 1 - \frac{1}{2}e$.

On obtient donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + 1 - \frac{1}{2}e$.

Réponse c.

6. Une fonction f est définie et deux fois dérivable sur $[-2 ; 4]$; on donne sa courbe représentative, qui laisse apparaître un profil concave sur $[-2 ; 1]$ puis convexe sur $[1 ; 4]$, avec un point d'inflexion en $x = 1$. Parmi quatre courbes proposées, laquelle représente la fonction dérivée seconde f'' de f ?

Comme f est concave sur $[-2 ; 1]$, on a $f''(x) \leq 0$ sur cet intervalle; comme f est convexe sur $[1 ; 4]$, on a $f''(x) \geq 0$ sur cet intervalle. La fonction f'' change donc de signe (de négatif à positif) en s'annulant en $x = 1$.

Parmi les quatre courbes proposées, une seule est négative sur $[-2 ; 1]$, s'annule en changeant de signe en $x = 1$, puis devient positive sur $[1 ; 4]$.

Réponse a.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 2)

Pour les questions 1 à 3, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative de la dérivée f' est donnée : f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ et sa courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ (courbe positive avant, négative après). Question 1 : que peut-on affirmer sur f ? a. f admet un maximum en $-\frac{3}{2}$; b. f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$; c. f admet un minimum en $-\frac{1}{2}$; d. la courbe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse -1 .

Par lecture graphique, f' est positive sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$ et négative sur $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$: f est donc croissante puis décroissante, avec un changement de sens de variation en $-\frac{1}{2}$.

f admet donc un maximum en $-\frac{1}{2}$. Donc, la réponse est **b**.

Question 2 : a. f est convexe sur $]-\infty ; -\frac{3}{2}[$; b. f est convexe sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$; c. la courbe de f n'admet pas de point d'inflexion; d. f est concave sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$.

Une fonction est convexe sur un intervalle lorsque sa dérivée y est croissante. Or, par lecture graphique, la courbe de f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$: f' est donc croissante sur $]-\infty ; -\frac{3}{2}[$.

f est donc convexe sur cet intervalle. Donc, la réponse est **a**.

Question 3 : la dérivée seconde f'' de f vérifie : **a.** $f''(x) \geq 0$ pour $x \in \left] -\infty ; -\frac{1}{2} \right[$; **b.** $f''(x) \geq 0$ pour $x \in [-2 ; -1]$; **c.** $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$; **d.** $f''(-3) = 0$.

D'après la question précédente, f' est croissante sur $\left] -\infty ; -\frac{3}{2} \right[$ et, par lecture graphique, décroissante sur $\left] -\frac{3}{2} ; +\infty \right[$: f' change donc de sens de variation en $-\frac{3}{2}$, où elle admet un maximum.

Comme f'' est la dérivée de f' , on a donc $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$. Donc, la réponse est **c.**

Question 4 : on considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n \leq w_n$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3$. **a.** la suite (v_n) converge ; **b.** si (u_n) est croissante alors (v_n) est minorée par u_0 ; **c.** $1 \leq v_0 \leq 3$; **d.** la suite (v_n) diverge.

Si (u_n) est croissante, alors pour tout entier naturel n , $u_0 \leq u_n$. Or, par hypothèse, $u_n \leq v_n$ pour tout n , donc $u_0 \leq v_n$ pour tout entier naturel n .

La suite (v_n) est donc minorée par u_0 . Donc, la réponse est **b.**

(Les autres propositions sont fausses en général : le théorème des gendarmes ne s'applique ici que si u_n et w_n avaient la même limite, ce qui n'est pas le cas puisque $1 \neq 3$; on ne peut donc rien conclure sur la convergence de (v_n) , ni sur l'encadrement de v_0 en particulier.)

Question 5 : on considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$. **a.** la suite (u_n) diverge ; **b.** la suite (u_n) converge ; **c.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$; **d.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

L'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$, vraie pour tout entier naturel n non nul, signifie que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

De plus, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq 1$: la suite (u_n) est donc majorée par 1 à partir du rang 2, et donc bornée.

Une suite croissante et majorée converge, d'après le théorème de convergence monotone : (u_n) **converge**. On ne peut cependant pas déterminer sa limite exacte avec les seules informations données (l'encadrement ne donne qu'une majoration, pas la valeur précise de la limite). Donc, la réponse est **b.**

Question 6 : on considère une suite réelle (u_n) telle que, pour tout entier naturel n , $n < u_n < n + 1$. **a.** il existe un entier naturel N tel que u_N est un entier ; **b.** la suite (u_n) est croissante ; **c.** la suite (u_n) est convergente ; **d.** la suite (u_n) n'a pas de limite.

Au rang n : $n < u_n < n + 1$. Au rang $n + 1$: $n + 1 < u_{n+1} < n + 2$.

En particulier, $u_n < n + 1 < u_{n+1}$, donc $u_n < u_{n+1}$ pour tout entier naturel n .

La suite (u_n) est donc croissante. Donc, la réponse est **b**.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Peut-on affirmer qu'elle diverge vers $+\infty$, qu'elle diverge vers $-\infty$, qu'elle n'a pas de limite, ou qu'elle converge ?

Pour tout entier naturel n , on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. Comme $n+1 \geq 1 > 0$, en divisant par $n+1$:

$$-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n+1}\right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La suite (u_n) admet donc une limite finie : **elle converge**.

2. On considère deux suites (v_n) et (w_n) liées par $w_n = e^{-2v_n} + 2$. Soit a un réel strictement positif, avec $v_0 = \ln(a)$. Que vaut w_0 : $\frac{1}{a^2} + 2$, $\frac{1}{a^2 + 2}$, $-2a + 2$, ou $\frac{1}{-2a} + 2$?

On remplace v_0 par $\ln(a)$ dans l'expression de w_0 : $w_0 = e^{-2v_0} + 2 = e^{-2\ln(a)} + 2$.

Or $e^{-2\ln(a)} = e^{\ln(a^{-2})} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ (car $a > 0$), donc $w_0 = \frac{1}{a^2} + 2$.

Donc, la réponse est $w_0 = \frac{1}{a^2} + 2$.

3. On sait que la suite (v_n) de la question précédente est croissante. Peut-on affirmer que (w_n) est décroissante et majorée par 3, décroissante et minorée par 2, croissante et majorée par 3, ou croissante et minorée par 2 ?

Comme (v_n) est croissante, pour tout entier naturel n : $v_n \leq v_{n+1}$, donc $-2v_n \geq -2v_{n+1}$ (multiplication par -2 , qui renverse le sens de l'inégalité).

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cette inégalité entraîne $e^{-2v_n} \geq e^{-2v_{n+1}}$, puis, en ajoutant 2 des deux côtés : $e^{-2v_n} + 2 \geq e^{-2v_{n+1}} + 2$, soit $w_n \geq w_{n+1}$.

La suite (w_n) est donc décroissante.

Par ailleurs, pour tout réel β , $e^\beta > 0$, donc $w_n = e^{-2v_n} + 2 > 2$ pour tout entier naturel n : la suite (w_n) est minorée par 2.

Donc, la réponse est : la suite (w_n) est décroissante et minorée par 2.

4. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}$. Pour tout entier naturel n , laquelle de ces expressions donne a_n : $4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2$, $-\frac{2}{3^n} + 4$, $4 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$, ou $2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8n}{3}$?

Cherchons le réel ℓ tel que la suite constante égale à ℓ soit solution de la relation de récurrence :
 $\ell = \frac{1}{3}\ell + \frac{8}{3} \iff \frac{2}{3}\ell = \frac{8}{3} \iff \ell = 4$.

Posons alors, pour tout entier naturel n , $b_n = a_n - 4$. On a $b_{n+1} = a_{n+1} - 4 = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3} - 4 = \frac{1}{3}(b_n + 4) + \frac{8}{3} - 4 = \frac{1}{3}b_n + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} - 4 = \frac{1}{3}b_n + 4 - 4 = \frac{1}{3}b_n$.

La suite (b_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = a_0 - 4 = 2 - 4 = -2$.

Pour tout entier naturel n : $b_n = b_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{2}{3^n}$.

Donc $a_n = b_n + 4 = -\frac{2}{3^n} + 4$.

5. On considère une suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right)$. Peut-on affirmer que cette suite est croissante, décroissante, non monotone, ou que son sens de variation dépend de b_0 ?

Pour tout entier naturel n : $b_{n+1} - b_n = \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right)$.

Or, quel que soit le réel b_n , on a $(b_n)^2 \geq 0$, donc $(b_n)^2 + 3 \geq 3$.

Comme $3 > 2$, on en déduit $(b_n)^2 + 3 > 2$, donc $0 < \frac{2}{(b_n)^2 + 3} < 1$.

La fonction logarithme népérien étant strictement négative sur $]0 ; 1[$, on a $\ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right) < 0$, donc $b_{n+1} - b_n < 0$.

Cette inégalité est vraie pour tout entier naturel n , quel que soit le premier terme b_0 : donc, la réponse est que la suite (b_n) est décroissante.

6. On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthogonal. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet-elle une asymptote verticale et une asymptote horizontale, une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale, aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale, ou aucune des deux ?

Au voisinage de 0 (avec $x > 0$) : $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+$, donc, par quotient de limites, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$: la courbe $\mathcal{C}_g$ admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

Au voisinage de $+\infty$: par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (l'exponentielle l'emporte sur x). La courbe $\mathcal{C}_g$ ne présente donc aucune asymptote horizontale en $+\infty$.

Donc, la réponse est : la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{x^2+1}$, et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Laquelle de ces expressions donne $F(x)$ pour tout réel x : $\frac{1}{2}x^2 e^{x^2+1}$, $(1+2x^2) e^{x^2+1}$, e^{x^2+1} , ou $\frac{1}{2}e^{x^2+1}$?

Posons $u(x) = x^2 + 1$, de dérivée $u'(x) = 2x$. On peut alors écrire $f(x) = x e^{x^2+1} = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{u(x)} = \frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$.

Or une primitive de $u' e^u$ est e^u , donc une primitive de $\frac{1}{2} u' e^u$ est $\frac{1}{2} e^u$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} e^{x^2+1}$.

Vérification directe : si $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2+1}$, alors $F'(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2+1} = x e^{x^2+1} = f(x)$, ce qui confirme le résultat.

Donc, la réponse est $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2+1}$.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 1)

1.a. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 e^x$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. Calculer u_1 puis u_2 (valeurs exactes puis approchées à 10^{-3} près).

$$u_1 = f(u_0) = f(-1) = (-1)^3 e^{-1} = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,368.$$

$$u_2 = f(u_1) = (-e^{-1})^3 \times e^{-e^{-1}} = -e^{-3} \times e^{-e^{-1}} = -e^{-3-e^{-1}} \approx -0,034.$$

1.b. Le code Python ci-dessous définit une fonction `fonc(n)` qui, partant de `u=-1`, applique `n` fois de suite l'instruction `u = u**3*exp(u)` avant de renvoyer `u`. Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc(2)`, arrondie à 10^{-3} près.

La boucle applique deux fois la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ à partir de $u_0 = -1$, donc `fonc(2)` renvoie la valeur de u_2 , soit environ **-0,034**.

2.a. Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) = x^2 e^x (x+3)$.

La fonction $f(x) = x^3 e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. En dérivant ce produit, on obtient $f'(x) = 3x^2 \times e^x + x^3 \times e^x = x^2 e^x (3+x)$, ce qui est bien le résultat annoncé.

2.b. Justifier le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (minimum en $x = -3$, limites 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$).

Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ et $e^x > 0$, donc le signe de $f'(x) = x^2 e^x (x+3)$ est celui de $(x+3)$, sauf en $x = 0$ où $f'(x) = 0$ car $x^2 = 0$.

On a $x+3 < 0 \iff x < -3$: donc $f'(x) < 0$ sur $] -\infty ; -3[$, et f y est strictement décroissante.

On a $x + 3 > 0 \iff x > -3$: donc $f'(x) > 0$ sur $] -3 ; +\infty[$ (sauf au point isolé $x = 0$ où f' s'annule sans changer de signe), et f y est strictement croissante.

La fonction f admet donc un minimum en $x = -3$, qui vaut $f(-3) = (-3)^3 \times e^{-3} = -27e^{-3} = -\frac{27}{e^3} \approx -1,344$.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc, par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Ceci justifie bien le tableau de variations donné dans l'énoncé.

2.c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

Initialisation : on a $u_0 = -1$ et $u_1 = -e^{-1} \approx -0,368$. On vérifie bien $-1 \leq -1 \leq -0,368 \leq 0$, donc l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : supposons que, pour un entier naturel n fixé, on ait $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

D'après la question 2.b., la fonction f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$, donc en particulier sur $[-1 ; 0]$, qui contient tous les termes encadrés par hypothèse de récurrence.

En appliquant f , qui est croissante sur cet intervalle, à chaque membre de l'inégalité $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$, on obtient $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(0)$, c'est-à-dire $u_1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(0)$.

Or $f(0) = 0^3 \times e^0 = 0$ et $u_1 = -e^{-1} \approx -0,368 \geq -1$, donc on obtient bien $-1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0$: la relation est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et il est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

2.d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est donc croissante.

Toujours d'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq 0$, donc $u_n \leq 0$ (en particulier pour $u_0 = -1 \leq 0$) : la suite (u_n) est majorée par 0.

Donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) , croissante et majorée, est convergente vers une limite ℓ vérifiant $\ell \leq 0$.

2.e. On note ℓ la limite de (u_n) , solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer ℓ , sachant que l'équation $x^2 e^x - 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $] -1 ; 0[$.

D'après la question 2.c., tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[-1 ; 0]$, donc $\ell \in [-1 ; 0]$.

On résout l'équation $f(x) = x$ sur cet intervalle : $x^3 e^x = x \iff x^3 e^x - x = 0 \iff x(x^2 e^x - 1) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul, donc $x = 0$ ou $x^2 e^x - 1 = 0$.

Or, par hypothèse, l'équation $x^2 e^x - 1 = 0$ n'a pas de solution dans $] -1 ; 0[$, donc, sur l'intervalle $[-1 ; 0]$, la seule solution possible de $f(x) = x$ est $x = 0$ (qui appartient bien à $[-1 ; 0]$).

Donc, $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Bac Terminale 2021 — Métropole, Mayotte, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

Partie I — Cécile sort des gâteaux du congélateur, où ils étaient à -19°C , pour les poser sur une terrasse à 25°C . Au bout de 10 minutes, ils sont à $1,3^\circ\text{C}$. En supposant que la température augmente à vitesse constante (même hausse chaque minute), quelle serait la température des gâteaux au bout de 25 minutes ? Ce modèle est-il pertinent ?

En 10 minutes, la température a augmenté de $1,3 - (-19) = 20,3^\circ\text{C}$, soit une hausse constante supposée de $\frac{20,3}{10} = 2,03^\circ\text{C}$ par minute.

Au bout de 25 minutes, la hausse totale serait de $25 \times 2,03 = 50,75^\circ\text{C}$, donc une température de $-19 + 50,75 = 31,75^\circ\text{C}$.

Or la température de la terrasse est de 25°C : les gâteaux ne peuvent pas dépasser cette température ambiante. Donc, ce modèle n'est pas pertinent.

Partie II — On note T_n la température des gâteaux, en degré Celsius, n minutes après leur sortie du congélateur, avec $T_0 = -19$. On admet la relation $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$ pour tout entier naturel n . 1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$.

En développant : $T_{n+1} - T_n = -0,06 T_n + 0,06 \times 25 = -0,06 T_n + 1,5$.

D'où $T_{n+1} = T_n - 0,06 T_n + 1,5 = 0,94 T_n + 1,5$.

2. Calculer T_1 et T_2 (arrondir au dixième).

Avec $n = 0$: $T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = -17,86 + 1,5 = -16,36$, soit $T_1 \approx -16,4$.

Avec $n = 1$: $T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5 = -15,3784 + 1,5 = -13,8784$, soit $T_2 \approx -13,9$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $T_n \leq 25$. Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'énoncé ?

Initialisation. $T_0 = -19 \leq 25$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons que, pour un entier n , $T_n \leq 25$. En multipliant par $0,94 > 0$: $0,94 T_n \leq 0,94 \times 25 = 23,5$.

En ajoutant 1,5 aux deux membres : $0,94 T_n + 1,5 \leq 25$, soit $T_{n+1} \leq 25$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $T_n \leq 25$.

Ce résultat était prévisible : la température des gâteaux ne peut pas dépasser la température ambiante de la terrasse, qui est justement de 25°C .

4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n) .

D'après la relation de récurrence, $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$.

D'après la question précédente, $T_n \leq 25$ pour tout n , donc $T_n - 25 \leq 0$, donc $-0,06 \times (T_n - 25) \geq 0$.

Ainsi $T_{n+1} - T_n \geq 0$ pour tout n : la suite (T_n) est **croissante**.

5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.

La suite (T_n) est croissante (question précédente) et majorée par 25 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite ℓ vérifiant $\ell \leq 25$.

6.a On pose, pour tout entier naturel n , $U_n = T_n - 25$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94 T_n + 1,5 - 25 = 0,94 T_n - 23,5$.

Or $0,94 \times (T_n - 25) = 0,94 T_n - 23,5$, donc $U_{n+1} = 0,94 \times (T_n - 25) = 0,94 U_n$.

La suite (U_n) est donc **géométrique de raison** 0,94, de premier terme $U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44$.

6.b En déduire que, pour tout entier naturel n , $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$.

Comme (U_n) est géométrique de raison 0,94 et de premier terme -44 : $U_n = -44 \times 0,94^n$ pour tout n .

Or $U_n = T_n - 25$, donc $T_n = U_n + 25 = -44 \times 0,94^n + 25$.

6.c En déduire la limite de la suite (T_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Comme $0 < 0,94 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$, donc par somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 25$.

Cela signifie que la température des gâteaux se rapproche indéfiniment de la température ambiante de la terrasse, 25°C , sans jamais la dépasser, ce qui est cohérent avec la situation physique.

7.a Le fabricant conseille de consommer les gâteaux une demi-heure après leur sortie du congélateur. Quelle température ont-ils alors atteinte (arrondir à l'entier le plus proche) ?

Avec $n = 30$ minutes : $T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25 \approx 18,1$. Donc, les gâteaux ont atteint une température d'environ **18 °C**.

7.b Cécile aime déguster ces gâteaux encore frais, à 10 °C. Donner un encadrement, entre deux entiers consécutifs, du nombre de minutes après lesquelles elle doit les déguster.

À la calculatrice, $T_{17} \approx 9,6$ et $T_{18} \approx 10,6$: la température franchit donc 10 °C entre les minutes 17 et 18.

Donc, Cécile doit déguster son gâteau **entre la 17^e et la 18^e minute** après sa sortie du congélateur.

7.c Le programme Python suivant doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geq 10$. Recopier et compléter les lignes manquantes.

- def seuil() :
- n = 0
- T = -19
- while T < 10 :
- T = 0.94 * T + 1.5
- n = n + 1
- return n

Bac Terminale 2021 — Amérique du Nord

On considère un cube ABCDEFGH. I est le milieu de $[EF]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[AE]$. On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, dans lequel $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 1 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$, $E(0 ; 0 ; 1)$, $F(1 ; 0 ; 1)$, $G(1 ; 1 ; 1)$, $H(0 ; 1 ; 1)$, $I(0,5 ; 0 ; 1)$, $J(1 ; 0,5 ; 0)$ et $K(0 ; 0 ; 0,5)$. 1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ?

$$\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont proportionnelles selon aucun facteur commun), donc, la réponse est que **les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles**.

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

$$\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que $2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AE}$: ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ et les droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques $d_1 : x = 3 + t, y = 8 - 2t, z = -2 + 3t$ et $d_2 : x = 4 + t, y = 1 + t, z = 8 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$). Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

$$d_1 \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } d_2 \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc, la réponse est que **les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles**.

4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

$$\text{Le plan } \mathcal{P} \text{ admet pour vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ et } d_2 \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 1 \times 1 + 3 \times 1 + (-2) \times 2 = 1 + 3 - 4 = 0.$$

Le vecteur directeur de d_2 est donc orthogonal au vecteur normal de $\mathcal{P}$: la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

5. Montrer que le point $L(4; 0; 3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5; 3; 1)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

$$\overrightarrow{ML} \begin{pmatrix} 4-5 \\ 0-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ qui est l'opposé du vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{P} : \overrightarrow{ML} \text{ est donc lui aussi normal au plan } \mathcal{P}, \text{ ce qui montre que la droite (ML) est perpendiculaire à } \mathcal{P}.$$

D'autre part, les coordonnées de L vérifient l'équation de $\mathcal{P}$: $4 + 3 \times 0 - 2 \times 3 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, donc L appartient à $\mathcal{P}$.

Le point L appartient au plan $\mathcal{P}$ et la droite (ML) lui est perpendiculaire : donc, la réponse est que **L est bien le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$** .

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 1)

1. Une influenceuse compte $u_0 = 1\,000$ abonnés en 2020. Chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés puis en gagne 250 nouveaux. On note u_n le nombre d'abonnés en l'année $(2020 + n)$. Calculer u_1 .

Perdre 10 % revient à multiplier par 0,9. Donc $u_1 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = 1\,150$ abonnés.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

Multiplier par 0,9 traduit la perte de 10 % des abonnés d'une année sur l'autre.

On ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

3. Une fonction Python 'suite(n)' initialise 'u = 1000', puis répète 'n' fois 'u = 0.9*u + 250', avant de renvoyer 'u'. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la valeur renvoyée par l'appel 'suite(10)'.

La fonction calcule u_{10} , c'est-à-dire le nombre d'abonnés estimé en l'année 2030 ; la calculatrice donne $u_{10} \approx 1\,977$ abonnés.

4.a Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

Initialisation : $u_0 = 1\,000 \leq 2\,500$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq 2\,500$. Comme $0,9 > 0$, la multiplication conserve l'ordre : $0,9u_n \leq 0,9 \times 2\,500 = 2\,250$, puis en ajoutant 250 aux deux membres, $0,9u_n + 250 \leq 2\,500$, soit $u_{n+1} \leq 2\,500$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

4.b Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.

Or, d'après la question précédente, $u_n \leq 2\,500$, donc $0,1u_n \leq 250$, soit $-0,1u_n + 250 \geq 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est **croissante**.

4.c Dédire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 500 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

5.a On pose $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n . Montrer que (v_n) est géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $v_0 = -1\,500$.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500 = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9(u_n - 2\,500) = 0,9v_n$.

La relation $v_{n+1} = 0,9v_n$, vraie pour tout entier naturel n , montre que (v_n) est géométrique de raison $0,9$.

Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

5.b Exprimer v_n en fonction de n , puis montrer que $u_n = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

Comme (v_n) est géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $v_0 = -1\,500$, pour tout entier naturel n : $v_n = -1\,500 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 2\,500$, donc $u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

5.c Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Comme $0 < 0,9 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc par produit puis somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\,500$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que le nombre d'abonnés de l'influenceuse **se stabilise autour de 2 500** au fil des années.

6. Écrire un programme qui détermine en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200, puis donner cette année.

- $n = 0$
- $u = 1000$
- tant que $u \leq 2200$:
- $u = 0,9 * u + 250$
- $n = n + 1$
- renvoyer n
- En simulant l'évolution terme à terme, on obtient $u_{15} \approx 2\,191,2 \leq 2\,200$ et $u_{16} \approx 2\,222,0 > 2\,200$: le programme renvoie $n = 16$.
- Donc, la réponse est que le nombre d'abonnés dépasse 2 200 la seizième année suivant 2020, c'est-à-dire en **2036**.

Bac Terminale 2021 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A — 1.a Une centrale solaire compte 10 560 panneaux au 1er janvier 2020. Chaque année, 2 % des panneaux se détériorent et sont retirés, tandis que 250 panneaux neufs sont installés. On modélise le nombre de panneaux par $u_0 = 10\,560$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux au 1er janvier de l'année $2020 + n$. Justifier ce choix de modélisation.

Retirer 2 % des panneaux revient à multiplier leur nombre par $1 - \frac{2}{100} = 0,98$.

En ajoutant ensuite les 250 panneaux neufs installés chaque année, on obtient bien la relation $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, ce qui justifie la modélisation.

Partie A — 1.b À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux dépassera strictement 12 000.

En saisissant $u_0 = 10\,560$ puis en appliquant successivement $u \mapsto 0,98u + 250$, on obtient $u_1 \approx 10\,599$, puis u_2 , u_3 , etc.

On trouve $u_{67} \approx 11\,999$ et $u_{68} \approx 12\,009$.

Donc, le nombre de panneaux dépassera 12 000 au bout de **68 ans**, soit en 2088.

Partie A — 1.c Compléter le programme Python suivant pour qu'il stocke dans la variable **n** le nombre d'années trouvé à la question précédente : 'u = 10560' / 'n = 0' / 'while ... : ' / ' u = ... ' / ' n = ... '

- 'while u <= 12000 :'
- ' u = 0.98*u + 250'
- ' n = n + 1'

Partie A — 2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 12\,500$.

Initialisation : $u_0 = 10\,560 \leq 12\,500$, la propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq 12\,500$. En multipliant par 0,98 (positif) : $0,98u_n \leq 0,98 \times 12\,500 = 12\,250$. En ajoutant 250 aux deux membres : $0,98u_n + 250 \leq 12\,500$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 12\,500$: la propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc par récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 12\,500$.

Partie A — 3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 0,98u_n + 250 - u_n = 250 - 0,02u_n$.

D'après la question précédente, $u_n \leq 12\,500$, donc $0,02u_n \leq 0,02 \times 12\,500 = 250$, c'est-à-dire $250 - 0,02u_n \geq 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$: **la suite (u_n) est croissante.**

Partie A — 4. En déduire que la suite (u_n) converge (sans calculer sa limite).

La suite (u_n) est croissante et majorée par 12 500 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite ℓ vérifiant $\ell \leq 12\,500$.

Partie A — 5.a On pose $v_n = u_n - 12\,500$ pour tout entier naturel n . Démontrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 12\,500 = 0,98u_n + 250 - 12\,500 = 0,98u_n - 12\,250$.

Or $0,98 \times 12\,500 = 12\,250$, donc $v_{n+1} = 0,98u_n - 0,98 \times 12\,500 = 0,98(u_n - 12\,500) = 0,98v_n$.

Cette relation étant vraie pour tout n , (v_n) **est géométrique de raison 0,98**, de premier terme $v_0 = u_0 - 12\,500 = 10\,560 - 12\,500 = -1\,940$.

Partie A — 5.b Exprimer v_n en fonction de n .

(v_n) étant géométrique de premier terme $-1\,940$ et de raison 0,98, on a pour tout entier naturel n : $v_n = -1\,940 \times 0,98^n$.

Partie A — 5.c En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Comme $v_n = u_n - 12\,500$, on a $u_n = v_n + 12\,500$, soit $u_n = 12\,500 - 1\,940 \times 0,98^n$.

Partie A — 5.d Déterminer la limite de (u_n) et interpréter le résultat.

Comme $0 < 0,98 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,98^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12\,500$.

Dans le contexte du modèle, le nombre de panneaux solaires de la centrale se stabilise autour de **12 500** à long terme.

Partie B — 1. Une modélisation plus fine utilise la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 12\,500 - 500e^{-0,02x+1,4}$, où x est le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020. Étudier le sens de variation de f .

f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout x de cet intervalle : $f'(x) = -500 \times (-0,02)e^{-0,02x+1,4} = 10e^{-0,02x+1,4}$.

La fonction exponentielle étant strictement positive, $f'(x) > 0$ pour tout x : **la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.**

Partie B — 2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,02x + 1,4) = -\infty, \text{ donc par composition } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,02x+1,4} = 0, \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 12\,500.$$

Partie B — 3. À l'aide de ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux dépassera 12 000.

$$\text{On résout } f(x) > 12\,000 \iff 12\,500 - 500e^{-0,02x+1,4} > 12\,000 \iff 500 > 500e^{-0,02x+1,4} \iff 1 > e^{-0,02x+1,4}.$$

Comme $1 = e^0$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante, cela équivaut à $0 > -0,02x + 1,4 \iff 0,02x > 1,4 \iff x > 70$.

Donc, il faut attendre strictement plus de 70 ans, soit **71 ans**, pour que le nombre de panneaux dépasse 12 000 selon ce modèle, ce qui correspond à l'année 2091.

Bac Terminale 2021 — Polynésie française

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1, muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, et le point M défini par $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$. 1. Donner, par lecture graphique, les coordonnées des points B, D, E, G et H.

Dans ce repère : B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1).

2.a Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

Les segments [EG], [GD] et [ED] sont chacun la diagonale d'une face carrée de côté 1 du cube, donc $EG = GD = ED = \sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1) : **le triangle EGD est équilatéral**, de côté $\sqrt{2}$.

2.b On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Avec } c = \sqrt{2}, \text{ l'aire du triangle EGD vaut } \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

$$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de H moins celles de B), donc } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Comme } \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}, \text{ on obtient } x_M - 1 = -\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}, y_M = \frac{1}{3} \text{ et } z_M = \frac{1}{3}.$$

Donc, la réponse est que M a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

4.a Justifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EGD).

$\vec{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (coordonnées de G moins celles de E), donc $\vec{n} \cdot \vec{EG} = -1 + 1 + 0 = 0$.

$\vec{ED} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (coordonnées de D moins celles de E), donc $\vec{n} \cdot \vec{ED} = 0 + 1 - 1 = 0$.

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD) : **c'est donc un vecteur normal à ce plan.**

4.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est $-x + y + z - 1 = 0$.

Un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $-x + y + z + d = 0$, avec d réel à déterminer.

Le point E(0 ; 0 ; 1) appartient au plan (EGD), donc ses coordonnées vérifient cette équation : $-0 + 0 + 1 + d = 0 \iff d = -1$.

Donc, la réponse est que le plan (EGD) a pour équation $-x + y + z - 1 = 0$.

4.c Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) passant par M. Montrer qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan (EGD), elle est donc dirigée par le vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de ce plan ; elle passe de plus par M($\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}$).

Un point $P(x; y; z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MP} = t\vec{n}$ pour un certain réel t , c'est-à-dire $x - \frac{2}{3} = -t$, $y - \frac{1}{3} = t$ et $z - \frac{1}{3} = t$.

Donc, la réponse est que $\mathcal{D}$ admet pour représentation paramétrique $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

5.a Soit K le pied de la hauteur issue de M dans la pyramide GEDM. Démontrer que les coordonnées de K sont $\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

La droite $\mathcal{D}$ passe par M et est perpendiculaire au plan (EGD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue de M, et son pied K est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan (EGD).

Les coordonnées de K vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ et l'équation du plan (EGD) : en substituant $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$ dans $-x + y + z - 1 = 0$, on obtient $-\left(\frac{2}{3} - t\right) + \frac{1}{3} + t + \frac{1}{3} + t - 1 = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \frac{1}{3}$.

En remplaçant t par $\frac{1}{3}$: $x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Donc, la réponse est que K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

5.b En déduire le volume de la pyramide GEDM. On rappelle que le volume d'une pyramide est $V = \frac{b \times h}{3}$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée.

$$\overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de M moins celles de K), donc } KM^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}, \text{ d'où } KM = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

K est le pied de la hauteur issue de M pour la base EGD, donc $h = KM = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $b = \mathcal{A}(\text{EGD}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (question 2.b).

Le volume de la pyramide GEDM vaut donc $V = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{\frac{3}{6}}{3} = \frac{1}{6}$.

Donc, la réponse est que la pyramide GEDM a un volume égal à $\frac{1}{6}$.