

Fonctions affines — Tous les corrigés

LOGIMATHS

Brevet 2026 — Antilles et Guyane

1. Quel est le prix pour 12 demi-journées avec le tarif B ?

$$15 + 3,50 \times 12 = 15 + 42 = \mathbf{57 \text{ €}}.$$

2. Associer chacune des fonctions f, g et h au tarif qu'elle représente.

$f : x \mapsto 15 + 3,5x$ représente le **tarif B** (abonnement 15 € puis 3,50 € par demi-journée).

$g : x \mapsto 64$ représente le **tarif C** (forfait fixe de 64 €).

$h : x \mapsto 5,5x$ représente le **tarif A** (5,50 € par demi-journée).

3. Associer à chaque droite (d1), (d2), (d3) la fonction correspondante.

(d1) part de 15 sur l'axe des prix : c'est **f**.

(d2) est horizontale à 64 : c'est **g**.

(d3) passe par l'origine : c'est **h**.

4. La droite (d1) représente-t-elle une situation de proportionnalité ?

Une situation de proportionnalité est représentée par une droite qui passe par l'origine du repère.

La droite (d1) coupe l'axe des ordonnées à 15, elle ne passe pas par l'origine.

Donc **(d1) ne représente pas une situation de proportionnalité.**

5. Lire graphiquement le nombre de demi-journées à partir duquel le tarif B devient plus avantageux que le tarif A.

Les droites (d1) et (d3) se coupent entre 7 et 8 demi-journées (pour un prix d'environ 41 €).

Le tarif B devient plus avantageux **à partir de 8 demi-journées.**

6.a Quelle formule a été saisie dans la cellule B2 puis étirée vers la droite ?

On saisit **$= 15 + 3,5*B1$** dans la cellule B2.

6.b À partir de combien de demi-journées le tarif C devient-il plus avantageux que le tarif B ?

Dans le tableau, le tarif B vaut 64 € pour 14 demi-journées (égalité avec le tarif C), puis 67,50 € pour 15.

Le tarif C devient plus avantageux à partir de 15 demi-journées.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 1)

A.1 Donner les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,035y + 0,91$ sur $[0; +\infty[$.

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,035$ et $b = 0,91$.

La solution constante particulière vérifie $0 = -0,035y_p + 0,91$, soit $y_p = \frac{0,91}{0,035} = 26$.

Les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto Ke^{-0,035t} + 26$, où **K est une constante réelle**.

A.2 En déduire que, pour tout réel t de $[0; +\infty[$, $T(t) = 26 - 8e^{-0,035t}$.

D'après la question précédente, $T(t) = Ke^{-0,035t} + 26$.

Comme $T(0) = 18 : Ke^0 + 26 = 18$, soit $K = 18 - 26 = -8$.

Donc, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $T(t) = -8e^{-0,035t} + 26 = 26 - 8e^{-0,035t}$.

A.3 Déterminer au bout de combien de temps la pièce atteindra 20°C (en heures et minutes, arrondi à la minute).

On résout $T(t) = 20 : 26 - 8e^{-0,035t} = 20$, soit $8e^{-0,035t} = 6$, soit $e^{-0,035t} = 0,75$.

$-0,035t = \ln(0,75)$, donc $t = \frac{-\ln(0,75)}{0,035} \approx 8,22$ dizaines de minutes, soit environ 82,2 minutes.

82,2 minutes $\approx$ **1 h 22 min**.

A.4 Si le système ne s'éteignait pas à 20°C, la température pourrait-elle dépasser 28°C selon ce modèle ?

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,035t} > 0$, donc $T(t) = 26 - 8e^{-0,035t} < 26$.

La température modélisée par T reste donc toujours strictement inférieure à 26°C, quelle que soit la durée de chauffe.

Non, selon ce modèle, la température de la pièce ne pourra jamais dépasser 28°C (elle ne dépasse même jamais 26°C).

B.1 Montrer que $u_1 = 19,72$.

$$u_1 = 0,965 \times u_0 + 0,35 + 0,07e^{-0,1 \times 0} = 0,965 \times 20 + 0,35 + 0,07 \times 1 = 19,3 + 0,35 + 0,07 = \mathbf{19,72}.$$

B.2 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 10$.

Initialisation : $u_0 = 20 > 10$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que $u_n > 10$ pour un entier n donné. Montrons que $u_{n+1} > 10$.

$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n}. \text{ Comme } u_n > 10, \text{ on a } 0,965u_n > 9,65.$$

De plus, $0,07e^{-0,1n} > 0$ pour tout n (une exponentielle est toujours strictement positive).

Donc $u_{n+1} > 9,65 + 0,35 + 0 = 10$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 10$.

B.3 En déduire que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est décroissante (admis dans l'énoncé) et minorée par 10 (question précédente) : d'après le théorème de convergence monotone, **la suite (u_n) est convergente.**

B.4.a Justifier que la limite ℓ est solution de l'équation $x = 0,965x + 0,35$.

Comme (u_n) converge vers ℓ , la suite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ .

De plus, $e^{-0,1n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n}$, on obtient $\ell = 0,965\ell + 0,35$.

B.4.b Déterminer ℓ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

$$\ell - 0,965\ell = 0,35, \text{ soit } 0,035\ell = 0,35, \text{ soit } \ell = \frac{0,35}{0,035} = \mathbf{10}.$$

Interprétation : si le chauffage ne se remettait jamais en marche, la température de la pièce se rapprocherait indéfiniment de 10°C sans jamais l'atteindre.

B.5.a Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 du programme Python pour qu'il renvoie le nombre de dizaines de minutes à partir duquel le chauffage se remet en marche.

- Ligne 4 : `while u > 18 :`
- Ligne 5 : `u = 0.965*u + 0.35 + 0.07*math.exp(-0.1*n)`
- Ligne 6 : `n = n + 1`

B.5.b Déterminer le temps, en dizaines de minutes, à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

En calculant successivement les termes de la suite, on obtient $u_7 \approx 18,14$ (encore supérieur à 18) puis $u_8 \approx 17,90$ (inférieur à 18).

Le chauffage se remet donc en marche à partir de $n = 8$ dizaines de minutes, soit 80 minutes (1 h 20 min) après le début du refroidissement.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 1)**A.1 Justifier que $a = 1$.**

Le point $A(0; 1)$ appartient à la courbe, donc $f(0) = 1$. Or $f(0) = a + \frac{b \ln(1)}{1} = a + 0 = a$. Donc $a = 1$.

A.2.a En utilisant le graphique, donner la valeur de $f'(0)$. Justifier.

La tangente T_A passe par $A(0; 1)$ et semble également passer par le point de coordonnées $(0,5; 3)$ (lecture graphique).

Son coefficient directeur est donc $\frac{3 - 1}{0,5 - 0} = \frac{2}{0,5} = 4$.

$f'(0) = 4$ (coefficient directeur de la tangente en A).

A.2.b En utilisant le graphique, donner le signe de $f''(1)$. Justifier.

Le graphique montre que la courbe atteint son maximum peu avant $x = 1$, puis décroît en restant concave (tournée vers le bas) au voisinage de $x = 1$.

Le signe de $f''(1)$ correspond donc au sens de variation de f' (la pente) à cet endroit, qui diminue juste après le maximum.

$f''(1)$ est négatif.

A.3.a Montrer que, pour tout réel x appartenant à $] -1; +\infty[$, on a $f'(x) = b(1 - \ln(x+1))/(x+1)^2$.

On dérive $\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ par la formule du quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = \ln(x+1)$ et $v = x+1$.

$u' = \frac{1}{x+1}$ et $v' = 1$, donc $u'v - uv' = \frac{1}{x+1} \times (x+1) - \ln(x+1) \times 1 = 1 - \ln(x+1)$.

Donc $f'(x) = b \times \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

A.3.b En déduire la valeur de b.

D'après la question 2.a, $f'(0) = 4$. Or $f'(0) = b \times \frac{1 - \ln(1)}{1^2} = b \times 1 = b$. Donc **b = 4**.

B.1 Justifier que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f.

Quand $x \rightarrow +\infty$, on sait que $\frac{\ln(x+1)}{x+1} \rightarrow 0$ (limite usuelle du type $\frac{\ln(t)}{t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$).

Donc $f(x) = 1 + \frac{4\ln(x+1)}{x+1} \rightarrow 1 + 0 = 1$ quand $x \rightarrow +\infty$.

La droite d'équation $y = 1$ est donc asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

B.2 Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x+1) > 0$ sur $] -1; +\infty[$.

$1 - \ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) < 1 \Leftrightarrow x+1 < e$ (la fonction $\ln$ étant strictement croissante), soit $x < e - 1$.

L'ensemble des solutions, en tenant compte du domaine $x > -1$, est $] -1; e - 1[$.

B.3 Dresser le tableau de variation complet de f, en indiquant la valeur exacte de son extremum.

Le signe de $f'(x) = \frac{4(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}$ est celui de $1 - \ln(x+1)$ (le dénominateur est toujours positif).

D'après la question précédente, $f'(x) > 0$ sur $] -1; e - 1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]e - 1; +\infty[$: f est donc croissante puis décroissante, avec un maximum en $x = e - 1$.

$f(e - 1) = 1 + \frac{4\ln(e)}{e} = 1 + \frac{4}{e}$ (valeur exacte du maximum).

Aux bornes : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ (admis) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (question B.1).

Tableau : f décroît de $-\infty$ à -1 (exclu), croît de $-\infty$ à $1 + \frac{4}{e}$ sur $] -1; e - 1]$, puis décroît de $1 + \frac{4}{e}$ vers 1 (sans l'atteindre) sur $[e - 1; +\infty[$.

B.4 Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution dans $[2; +\infty[$. En donner une valeur approchée à 10^{-1} .

Sur $[2; +\infty[$ (inclus dans $]e - 1; +\infty[$ puisque $e - 1 \approx 1,72 < 2$), f est continue et strictement décroissante.

$f(2) = 1 + \frac{4\ln(3)}{3} \approx 2,46$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Comme 1,5 est compris entre ces deux valeurs, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), **l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution dans $[2; +\infty[$.**

À l'aide de la calculatrice, on trouve une valeur approchée de cette solution : $x_0 \approx \mathbf{25,1}$.

B.5.a Montrer que l'intégrale de $\ln(x+1)/(x+1)$ entre 0 et 2 est égale à $(\frac{1}{2})(\ln 3)^2$.

On pose $u = \ln(x+1)$, donc $du = \frac{1}{x+1}dx$; quand $x = 0$, $u = \ln(1) = 0$ et quand $x = 2$, $u = \ln(3)$.

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \int_0^{\ln(3)} u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{\ln(3)} = \frac{(\ln 3)^2}{2} - 0 = \frac{1}{2}(\ln 3)^2.$$

B.5.b En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

Sur $[0; 2]$, la fonction f est strictement positive (elle vaut 1 en $x = 0$ et reste au-dessus de 2,4 ensuite) : l'aire cherchée est donc $\int_0^2 f(x) dx$.

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 1 dx + 4 \int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = [x]_0^2 + 4 \times \frac{1}{2}(\ln 3)^2 = 2 + 2(\ln 3)^2.$$

L'aire cherchée est $2 + 2(\ln 3)^2$ **unités d'aire**, soit environ 4,41 u.a.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)

A.1 Calculer V_1 et V_2 ($V_0 = 0$, $V_{n+1} = 0,995 V_n + 6$).

$$V_1 = 0,995 \times 0 + 6 = \mathbf{6 \text{ litres}}.$$

$$V_2 = 0,995 \times 6 + 6 = 5,97 + 6 = \mathbf{11,97 \text{ litres}}.$$

A.2 Recopier et compléter le programme Python pour qu'il renvoie le volume après n heures.

- `def volume(n) :`
- `Ligne 2 : v = 0`
- `Ligne 3 : for k in range(n) :`
- `Ligne 4 : v = 0.995*v + 6`
- `Ligne 5 : return v`

A.3 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.

Initialisation : $V_0 = 0$ et $V_1 = 6$ (question 1), donc $V_0 \leq V_1 \leq 1200$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ pour un entier n donné.

Comme $0,995 > 0$, on peut multiplier chaque membre : $0,995V_n \leq 0,995V_{n+1} \leq 0,995 \times 1\,200$, soit $0,995V_n \leq 0,995V_{n+1} \leq 1\,194$.

En ajoutant 6 partout : $0,995V_n + 6 \leq 0,995V_{n+1} + 6 \leq 1\,200$, c'est-à-dire $V_{n+1} \leq V_{n+2} \leq 1\,200$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $V_n \leq V_{n+1} \leq 1\,200$.

A.4 Justifier que la suite (V_n) converge, et calculer sa limite.

D'après la question précédente, la suite (V_n) est croissante et majorée par 1 200.

D'après le théorème de convergence monotone, **la suite (V_n) converge** vers une limite ℓ .

La fonction associée à la récurrence, $x \mapsto 0,995x + 6$, est continue (fonction affine), donc ℓ est solution de l'équation $x = 0,995x + 6$.

$$0,005x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{0,005} = 1\,200.$$

La suite (V_n) converge donc vers **1 200** : le volume de substance polluante se stabilise autour de 1 200 litres.

B.1.a Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,005y + 6$ sur $[0; +\infty[$.

(E) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,005$ et $b = 6$. Sa solution particulière constante est $y_p = -\frac{b}{a} = \frac{6}{0,005} = 1\,200$.

Les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-0,005t} + 1\,200$, où **C est une constante réelle**.

B.1.b Montrer que, pour tout réel t de $[0; +\infty[$, $v(t) = 1200(1 - e^{-0,005t})$.

Comme $v(0) = 0$: $Ce^0 + 1\,200 = 0$, donc $C = -1\,200$.

$$v(t) = -1\,200e^{-0,005t} + 1\,200 = 1\,200(1 - e^{-0,005t}).$$

B.1.c Calculer la limite de v en $+\infty$.

Quand $t \rightarrow +\infty$, $e^{-0,005t} \rightarrow 0$, donc $v(t) \rightarrow 1\,200 \times (1 - 0) = \mathbf{1\,200}$.

B.1.d Déterminer le sens de variation de la fonction v sur $[0; +\infty[$.

$$v'(t) = 1\,200 \times 0,005 \times e^{-0,005t} = 6e^{-0,005t}, \text{ toujours strictement positif.}$$

La fonction v est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

B.2 Un taux de substance polluante supérieur à 5 % du volume du bassin (30 000 L) nécessite un nettoyage complet. Le propriétaire devra-t-il procéder à ce nettoyage ?

Le seuil critique est $0,05 \times 30\,000 = 1\,500$ litres.

La fonction v est strictement croissante et tend vers 1 200 sans jamais l'atteindre : elle est donc toujours strictement inférieure à 1 200, donc à 1 500.

Non, selon ce modèle, le volume de substance polluante n'atteindra jamais le seuil de 1 500 litres : un nettoyage complet ne sera jamais nécessaire.

B.3 Déterminer la valeur exacte de l'instant au-delà duquel le volume dépasse 50 litres (en heure et minute, arrondi à la minute).

On résout $v(t) = 50 : 1\,200 (1 - e^{-0,005t}) = 50$, soit $1 - e^{-0,005t} = \frac{50}{1\,200} = \frac{1}{24}$.

$$e^{-0,005t} = \frac{23}{24}, \text{ donc } -0,005t = \ln\left(\frac{23}{24}\right).$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{23}{24}\right)}{-0,005} = 200 \ln\left(\frac{24}{23}\right) \text{ (valeur exacte), soit environ 8,51 heures.}$$

8,51 heures $\approx$ **8 h 31 min**.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)

A.1.a À l'aide du graphique, donner $f'(1)$ (la courbe admet une tangente horizontale au point C d'abscisse 1).

La tangente en C (abscisse 1) est parallèle à l'axe des abscisses, donc de coefficient directeur nul : $f'(1) = 0$.

A.1.b Donner la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$ (la courbe coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse $\frac{1}{2}$).

La courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'au point A, d'abscisse $\frac{1}{2}$: la solution de $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$ est $\frac{1}{2}$.

A.2 Déterminer $f'(\frac{1}{2})$ (la tangente en $A(\frac{1}{2}; 0)$ passe par $B(1; e^2)$).

$f'(\frac{1}{2})$ est le coefficient directeur de la tangente en A, c'est-à-dire de la droite (AB) :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{e^2 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = 2e^2.$$

A.3 Parmi les courbes C1, C2 et C3, indiquer lesquelles représentent des primitives de f.

Deux primitives d'une même fonction diffèrent uniquement d'une constante : leurs courbes se déduisent l'une de l'autre par une translation verticale.

C'est le cas de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, qui ont la même forme décalée verticalement.

$\mathcal{C}_3$ est décroissante là où f est positive (autour de $x = 0,5$ à $0,7$), ce qui est incompatible avec une primitive de f à cet endroit.

Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentent des primitives de f .

B.1.a Vérifier que, pour tout x de $[0; +\infty[$, $f(x) = e^2 \times (2x-1)/e^{2x-1}$ (avec $f(x) = (2x-1)e^{-2x+3}$).

On remarque que $-2x + 3 = -(2x - 1) + 2$, donc $e^{-2x+3} = e^{-(2x-1)} \times e^2$.

$$f(x) = (2x - 1) \times e^{-(2x-1)} \times e^2 = e^2 \times \frac{2x - 1}{e^{2x-1}}.$$

B.1.b En déduire la limite de f en $+\infty$ (on pourra poser $X = 2x-1$).

Quand $x \rightarrow +\infty$, $X = 2x - 1 \rightarrow +\infty$, et par croissances comparées $\frac{X}{e^X} \rightarrow 0$.

Donc $\frac{2x - 1}{e^{2x-1}} \rightarrow 0$, puis $f(x) = e^2 \times \frac{2x - 1}{e^{2x-1}} \rightarrow 0$.

B.2.a Montrer que, pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x) = (-4x+4)e^{-2x+3}$.

En dérivant le produit $f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3}$:

$$f'(x) = 2 \times e^{-2x+3} + (2x - 1) \times (-2)e^{-2x+3} = (2 - 2(2x - 1))e^{-2x+3} = (2 - 4x + 2)e^{-2x+3} = (-4x + 4)e^{-2x+3}.$$

B.2.b Construire le tableau complet des variations de f sur $[0; +\infty[$.

L'exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $(-4x + 4)$, positif avant $x = 1$ et négatif après.

f est donc croissante sur $[0; 1]$ puis décroissante sur $[1; +\infty[$.

$$f(0) = (0 - 1)e^3 = -e^3 \text{ et } f(1) = (2 - 1)e^1 = e.$$

Tableau : f croît de $-e^3$ à e sur $[0; 1]$, puis décroît de e vers 0 (sans l'atteindre) sur $[1; +\infty[$.

B.3 Justifier que la contrainte du client se traduit par $f(\alpha) = 0,15$, puis montrer qu'il existe une unique valeur de α dans $[1; +\infty[$ vérifiant cette égalité. En donner une valeur arrondie au dixième.

Le point $(\alpha; f(\alpha))$ et son symétrique $(\alpha; -f(\alpha))$ par rapport à l'axe des abscisses sont distants verticalement de $2f(\alpha)$.

Cette distance doit valoir 0,3 cm : $2f(\alpha) = 0,3 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0,15$.

Sur $[1; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, de $f(1) = e \approx 2,7$ vers 0 (sans l'atteindre).

Comme $0 < 0,15 < e$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), **l'équation $f(x) = 0,15$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$.**

À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 3,3$.

C.1 À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale I de f entre 0,5 et 3,3 est, arrondie au dixième, égale à 3,6.

On pose $u(x) = 2x - 1$ et $v'(x) = e^{-2x+3}$, donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$.

$$I = [u(x)v(x)]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} u'(x)v(x) dx = \left[-\frac{1}{2}(2x-1)e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} + \int_{0,5}^{3,3} e^{-2x+3} dx$$

Le crochet vaut $-\frac{1}{2}(5,6e^{-3,6} - 0) = -2,8e^{-3,6}$.

L'intégrale restante vaut $\left[-\frac{1}{2}e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} = -\frac{1}{2}e^{-3,6} + \frac{1}{2}e^2$.

$$I = -2,8e^{-3,6} - 0,5e^{-3,6} + 0,5e^2 = 0,5e^2 - 3,3e^{-3,6} \approx \mathbf{3,6}.$$

C.2 Déterminer le volume du porte-clé en cm^3 , arrondi au dixième (volume = aire du logo $\times$ épaisseur de 0,2 cm).

Le logo est symétrique par rapport à l'axe des abscisses : son aire est le double de l'aire sous la courbe de f entre 0,5 et 3,3, c'est-à-dire $2I \approx 2 \times 3,6 = 7,2 \text{ cm}^2$.

$$\text{Volume} \approx 7,2 \times 0,2 = \mathbf{1,4 \text{ cm}^3}.$$

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)

1.a Affirmation 1 : la courbe de f passe par $A(\ln 2; \frac{1}{2})$. Vrai ou faux ?

L'équation $y' + 2y = 0$ s'écrit $y' = -2y$, de solutions $x \mapsto Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Comme $f(0) = 1$: $C = 1$, donc $f(x) = e^{-2x}$.

$$f(\ln 2) = e^{-2 \ln 2} = e^{\ln(\frac{1}{4})} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}.$$

L'affirmation 1 est FAUSSE.

1.b Affirmation 2 : sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, la courbe de f est au-dessus de ses tangentes. Vrai ou faux ?

$$f'(x) = 1 + \sin(x), \text{ donc } f''(x) = \cos(x).$$

Sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, $\cos(x) \leq 0$: f est donc concave, et sa courbe est **en dessous** de ses tangentes (pas au-dessus).

L'affirmation 2 est FAUSSE.

1.c Affirmation 3 : $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f . Vrai ou faux ?

$$\text{Pour tout } x > 0 : -1 \leq \sin(x) \leq 1, \text{ donc } -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}, \text{ soit } 1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, les deux bornes tendent vers 1 : d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

L'affirmation 3 est VRAIE : $y = 1$ est bien asymptote horizontale en $+\infty$.

2. Affirmation 4 : $f(x) = 2x - e^{3x}$ est solution de (E_2) . Vrai ou faux ?

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = 2 - 3e^{3x}.$$

$$f'(x) - 3f(x) = (2 - 3e^{3x}) - 3(2x - e^{3x}) = 2 - 3e^{3x} - 6x + 3e^{3x} = 2 - 6x.$$

f vérifie donc bien l'équation (E_2) : **l'affirmation 4 est VRAIE.**

Bac Première 2026 — Métropole (TECHNO)

1. Par lecture graphique, déterminer $f(-2)$ et $f(1)$.

D'après les coordonnées des points A et B sur le graphique : $f(-2) = -5$ et $f(1) = 4$.

2. Par lecture graphique, déterminer $f'(-2)$ et $f'(1)$.

$f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente (d) en A, soit **6** ; $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T en B, horizontale, soit **0**.

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ par lecture graphique.

La courbe coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 3 : $\mathcal{S} = \{-1; 3\}$.

4. Dresser le tableau de variation de f par lecture graphique.

f est croissante sur $[-3; 1]$ (de -12 à 4) puis décroissante sur $[1; 4]$ (de 4 à -5).

5. On admet que $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Retrouver par le calcul les résultats de la question 1.

$$f(-2) = -4 - 4 + 3 = -5 \text{ et } f(1) = -1 + 2 + 3 = 4 : \text{ cela confirme la lecture graphique.}$$

6.a Déterminer $f'(x)$ puis retrouver les résultats de la question 2.

$$f'(x) = -2x + 2. \quad f'(-2) = 4 + 2 = 6 \text{ et } f'(1) = -2 + 2 = 0 : \text{ cela confirme la lecture graphique.}$$

6.b Vérifier par le calcul que $f(x) = (x + 1)(-x + 3)$, puis retrouver les résultats de la question 3.

$$(x + 1)(-x + 3) = -x^2 + 3x - x + 3 = -x^2 + 2x + 3, \text{ ce qui correspond bien à } f(x).$$

$$(x + 1)(-x + 3) = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 3 : \text{ cela confirme les solutions trouvées en question 3.}$$

6.c Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[-3; 4]$ et en déduire les variations de f .

$$f'(x) = -2x + 2 = 0 \iff x = 1, \text{ et } f'(x) > 0 \iff x < 1 \text{ (fonction affine décroissante en } x, \text{ de coefficient directeur } -2).$$

f est donc croissante sur $[-3; 1]$ (où $f' \geq 0$) et décroissante sur $[1; 4]$ (où $f' \leq 0$), conformément à la lecture graphique.

Bac Première 2026 — Amérique du Nord (SPECIFIQUE)

1.a Par lecture graphique, donner la valeur de $f(3)$.

Par lecture graphique, $f(3) \approx 5$.

1.b Par lecture graphique, donner la valeur de $f'(-1)$.

$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente en A : elle passe par $(-1; 5)$ et $(0; 9)$, de coefficient directeur $\frac{9 - 5}{0 - (-1)} = 4 : f'(-1) \approx 4$.

2.a Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.

$$f'(x) = -2x + 2.$$

2.b Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2; 4]$.

$-2x + 2 = 0 \iff x = 1$. Comme f' est affine de coefficient directeur négatif, $f'(x)$ est positif sur $[-2; 1]$ et négatif sur $[1; 4]$.

3. Donner les variations de f sur $[-2; 4]$.

$$f(-2) = -4 - 4 + 8 = 0, f(1) = -1 + 2 + 8 = 9, f(4) = -16 + 8 + 8 = 0.$$

f est croissante sur $[-2; 1]$ (de 0 à 9) et décroissante sur $[1; 4]$ (de 9 à 0), conformément au signe de f' .

Bac Première 2026 — Amérique du Nord (SPE)**A.1 Donner la puissance électrique des panneaux à 11 h 00 (lecture graphique).**

Avec la précision permise par le graphique, on lit une puissance d'environ **5,75 kW** à 11 h.

A.2 Résoudre graphiquement $f(x) \geq 5$ et interpréter.

Graphiquement, $f(x) \geq 5$ pour $x \in [10,5; 15,5]$ environ : **la puissance des panneaux dépasse 5 kW entre environ 10 h 30 et 15 h 30**, soit pendant environ 5 heures dans la journée.

B.1 Déterminer la nature de la suite (c_n) et préciser sa raison.

Chaque année, le tarif est multiplié par 1,06 (hausse de 6 %) : (c_n) est **géométrique de raison $q = 1,06$** , de premier terme $c_0 = 0,15$.

B.2 Exprimer c_n en fonction de n .

$$(c_n) \text{ étant géométrique : } c_n = c_0 \times q^n = 0,15 \times 1,06^n.$$

B.3 Donner le calcul permettant d'obtenir le coût en 2030.

2030 correspond à $2020 + 10$, soit $n = 10$: le coût pour 1 kWh en 2030 est $c_{10} = 0,15 \times 1,06^{10}$ (calcul non demandé).

B.4.a Que représentent les variables c et S du programme Python ?

c représente le coût (en euros) d'un kWh pour l'année considérée. S représente l'économie totale cumulée (en euros) depuis 2020 : à chaque tour de boucle, on ajoute l'économie de l'année (2000 kWh non achetés, au prix c), puis on met à jour l'année et le prix.

B.4.b Le programme affiche 16. Interpréter ce résultat.

Il faut **16 années** pour que l'économie cumulée dépasse **7 000 €**, le coût de l'installation : selon ce modèle, l'investissement de Camille est rentabilisé en $2020 + 16 = 2036$.

Bac Première 2026 — Centres étrangers G1 (SPECIFIQUE)

1. Calculer l'expression de la dérivée f' pour $f(x) = -x^3 + 4,5x^2 - 6x + 2$.

$$f'(x) = -3x^2 + 4,5 \times 2x - 6 = -3x^2 + 9x - 6.$$

2. Vérifier que $f'(x) = (3x - 6)(1 - x)$.

$$(3x - 6)(1 - x) = 3x - 3x^2 - 6 + 6x = -3x^2 + 9x - 6, \text{ ce qui correspond bien à } f'(x).$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; 10]$.

$$3x - 6 = 0 \iff x = 2, \text{ et } 3x - 6 > 0 \iff x > 2 \text{ (fonction affine croissante).}$$

$$1 - x = 0 \iff x = 1, \text{ et } 1 - x > 0 \iff x < 1 \text{ (fonction affine décroissante).}$$

Produit des signes : $f'(x)$ est négatif sur $[0; 1]$, positif sur $[1; 2]$, négatif sur $[2; 10]$.

4. En déduire les variations de f sur $[0; 10]$.

D'après le signe de f' : f est décroissante sur $[0; 1]$, croissante sur $[1; 2]$, puis décroissante sur $[2; 10]$.

Bac Première 2026 — Centres étrangers G1 (SPE)

1.a Donner $f(1)$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par $A(1; 20)$: $f(1) = 20$.

1.b Déterminer $f'(1)$.

$$f'(1) \text{ est le coefficient directeur de la tangente } T_A, \text{ c'est-à-dire de la droite (AB) : } f'(1) = \frac{10 - 20}{3 - 1} = \frac{-10}{2} = -5.$$

1.c Justifier que la tangente TA a pour équation $y = -5x + 25$.

$$\text{L'équation de la tangente en } x = 1 \text{ est } y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -5(x - 1) + 20 = -5x + 5 + 20 = -5x + 25.$$

2.a Démontrer que $f'(x) = (2x - 3)(2x + 3)/x^2$ pour $f(x) = (4x^2 + 7x + 9)/x$.

$$\text{Par la formule de dérivation d'un quotient : } f'(x) = \frac{(8x + 7)x - (4x^2 + 7x + 9) \times 1}{x^2} = \frac{8x^2 + 7x - 4x^2 - 7x - 9}{x^2} = \frac{4x^2 - 9}{x^2}.$$

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3), \text{ donc } f'(x) = \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{x^2}.$$

2.b Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

$x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$. $2x + 3 > 0$ toujours sur cet intervalle. $2x - 3 > 0 \iff x > \frac{3}{2}$. Donc $f'(x) < 0$ sur $]0; \frac{3}{2}[$ et $f'(x) > 0$ sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$.

2.c En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.

f est décroissante sur $]0; \frac{3}{2}]$ et croissante sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$.

3. Existe-t-il une tangente à C_f parallèle à la droite $y = 3x + 5$?

Deux droites sont parallèles ssi elles ont le même coefficient directeur : on cherche x_0 tel que $f'(x_0) = 3$.

$$\frac{4x^2 - 9}{x^2} = 3 \iff 4x^2 - 9 = 3x^2 \iff x^2 - 9 = 0 \iff (x - 3)(x + 3) = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

Seule $x_0 = 3$ appartient à $]0; +\infty[$: **oui, il existe une unique tangente à C_f parallèle à $y = 3x + 5$, c'est la tangente au point d'abscisse 3.**

Bac Première 2026 — Centres étrangers G1 (TECHNO)**1.a Par lecture graphique, donner l'image de 3 par f .**

Le point de la courbe d'abscisse 3 a pour ordonnée -2 : $f(3) = -2$.

1.b Par lecture graphique, déterminer $f'(3)$.

$f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente T , qui passe par $(3; -2)$ et $(4; 2)$: $f'(3) = \frac{2 - (-2)}{4 - 3} = 4$.

2.a Calculer $f(0)$ pour $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 16$.

$$f(0) = 0 + 0 - 0 + 16 = 16.$$

2.b Calculer $f'(x)$, en détaillant les calculs.

$$f'(x) = -3x^2 + 9 \times 2x - 24 = -3x^2 + 18x - 24.$$

2.c Vérifier que $f'(x) = -3(x - 2)(x - 4)$.

$$-3(x - 2)(x - 4) = -3(x^2 - 6x + 8) = -3x^2 + 18x - 24, \text{ ce qui correspond bien à } f'(x).$$

3.a Étudier le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variation de f sur $[0; 4]$.

$f'(x) = -3(x-2)(x-4)$, avec $-3 < 0$ toujours, $x-2$ nul en 2 et $x-4$ nul en 4 (négatif sur $[0; 4]$).

Le produit $(x-2)(x-4)$ est positif à l'extérieur de $[2; 4]$ et négatif entre les deux : en tenant compte du -3 , $f'(x)$ est **négatif sur $[0; 2]$, positif sur $[2; 4]$** .

$$f(0) = 16, f(2) = -8 + 36 - 48 + 16 = -4, f(4) = -64 + 144 - 96 + 16 = 0.$$

f est décroissante sur $[0; 2]$ (de 16 à -4) puis croissante sur $[2; 4]$ (de -4 à 0).

3.b Quel est le minimum de f sur $[0; 4]$? En quelle valeur est-il atteint ?

D'après le tableau de variation, **le minimum de f sur $[0; 4]$ est -4 , atteint pour $x = 2$.**

Brevet 2025 — Asie

Question 1. Une urne contient 4 boules bleues, 6 violettes, 7 rouges, 3 jaunes, indiscernables au toucher. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule violette en tirant au hasard ?

Il y a $4 + 6 + 7 + 3 = 20$ boules en tout, situation d'équiprobabilité : $P = \frac{\text{issues favorables}}{\text{issues possibles}}$.

Il y a 6 boules violettes sur 20 : $P = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$. **Réponse : $\frac{3}{10}$.**

Question 2. Calculer 70 % d'une quantité revient à multiplier cette quantité par :

Prendre 70 % d'une quantité revient à multiplier par le coefficient $\frac{70}{100} = 0,70$. **Réponse : 0,70.**

Les autres propositions correspondent à des erreurs classiques : $0,30 = 1 - 0,7$ (coefficient d'une baisse de 70 %), $1,70 = 1 + 0,7$ (hausse de 70 %), $1,30 = 1 + 0,3$ (hausse de 30 %).

Question 3. On considère la série 7 ; 18 ; 12 ; 13 ; 15. Quelle affirmation est vraie parmi : étendue = 8, médiane = 12, moyenne = 53, moyenne = 13 ?

La moyenne vaut $\frac{7 + 18 + 12 + 13 + 15}{5} = \frac{65}{5} = 13$. **Réponse : la moyenne de cette série est 13.**

Les autres propositions sont fausses : l'étendue vaut $18 - 7 = 11$ (et non 8, en oubliant de ranger la série avant de soustraire) ; la médiane, une fois la série rangée (7 ; 12 ; 13 ; 15 ; 18), vaut 13 (et non 12) ; la « moyenne » 53 vient d'un calcul sans les parenthèses ($7 + 18 + 12 + 13 + 15 \div 5 = 53$, faux).

Question 4. Une fonction affine f a pour représentation une droite passant par $(0 ; 4)$ et $(1 ; 2)$. Quelle est l'expression de f parmi : $2x + 4$, $4x - 2$, $-2x + 4$, $-4x + 2$?

La droite coupe l'axe des ordonnées en $(0 ; 4)$, donc l'ordonnée à l'origine est $b = 4$.

En passant de $(0 ; 4)$ à $(1 ; 2)$, l'ordonnée diminue de 2 quand l'abscisse augmente de 1 : le coefficient directeur est $a = -2$.

Réponse : $f(x) = -2x + 4$.

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 2)

Partie A — 1. On considère $f(x) = 1/(a+e^{-bx})$ sur $[0 ; +\infty[$, avec $a, b > 0$. Par lecture graphique (points $A(0 ; 0,5)$, $B(10 ; 1)$ sur la courbe), donner une valeur approchée de $f(10)$.

Par lecture graphique, $f(10) \approx 0,9$.

Partie A — 2. On admet que la limite de f en $+\infty$ est 1. Interpréter graphiquement.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

Partie A — 3. Justifier que $a = 1$.

$f(0) = \frac{1}{a+1}$, et le point $A(0 ; 0,5)$ appartient à la courbe, donc $\frac{1}{a+1} = 0,5 \iff a+1 = 2 \iff a = 1$.

Partie A — 4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB) .

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0,5}{10 - 0} = \frac{0,5}{10} = 0,05.$$

Partie A — 5.a Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et b .

f est de la forme $\frac{1}{1+e^{-bx}}$, de dérivée $-\frac{-be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2} = \frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$.

Partie A — 5.b En déduire la valeur de b .

(AB) étant tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0, son coefficient directeur est $f'(0) = \frac{b}{(1+1)^2} = \frac{b}{4}$.

$$\frac{b}{4} = 0,05 \iff b = 0,2.$$

Partie B — 1. On admet que $f(x) = 1/(1+e^{-0,2x})$ sur $[0 ; +\infty[$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,2x} = 0$ (par composition), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Partie B — 2. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{0,2e^{-0,2x}}{(1 + e^{-0,2x})^2} \text{ (même calcul que ci-dessus avec } b = 0,2).$$

Pour tout $x \geq 0$, le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs : $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Partie B — 3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0,97$.

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 : f \text{ est continue et strictement croissante sur } [0; +\infty[, \text{ à valeurs dans } \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

Comme $0,97 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,97$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.

Partie B — 4. À l'aide de la calculatrice, encadrer α par deux entiers consécutifs et interpréter.

À la calculatrice, $\alpha \approx 17,4$, donc $\alpha \in]17; 18[$.

Partie C — 1. Montrer que, pour tout x de $[0; +\infty[$, $f(x) = e^{0,2x} / (1 + e^{0,2x})$.

$$\text{En multipliant numérateur et dénominateur de } f(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}} \text{ par } e^{0,2x} : f(x) = \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x} + 1}.$$

Partie C — 2. En déduire une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

En écrivant $f(t) = \frac{1}{0,2} \times \frac{0,2e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}} = 5 \times \frac{0,2e^{0,2t}}{1 + e^{0,2t}}$, on reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u(t) = 1 + e^{0,2t} > 0$), de primitive $\ln(u)$.

Une primitive de f est donc $F(t) = 5 \ln(1 + e^{0,2t})$.

Partie C — 3. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0; 40]$ (valeur exacte puis approchée au millième).

$$I = \frac{1}{40} \int_0^{40} f(t) dt = \frac{1}{40} [5 \ln(1 + e^{0,2t})]_0^{40} = \frac{5}{40} (\ln(e^8 + 1) - \ln(2)).$$

$$I = \frac{1}{8} \ln\left(\frac{e^8 + 1}{2}\right) \approx 0,913.$$

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 1)

Partie A — 1. On donne la courbe de f , avec la tangente T_A en $A(1; 2)$ passant par $C(3; 0)$. Déterminer $f'(1)$.

$$f'(1) \text{ est le coefficient directeur de } T_A : \frac{0 - 2}{3 - 1} = -1.$$

Partie A — 2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle sur $]0; 3]$?

$f'(x) = 0$ correspond aux points où la tangente est horizontale : d'après le graphique, cela se produit **2 fois** sur $]0; 3]$.

Partie A — 3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Sur $[0; 0,5]$, la courbe semble concave d'après le graphique, donc $f''(0,2) < 0$.

Partie B — 1. On admet que $f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$ sur $]0; +\infty[$. Résoudre $2X^2 - 3X + 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$, et en déduire que la courbe de f ne coupe pas l'axe des abscisses.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0 : \text{l'équation } 2X^2 - 3X + 2 = 0 \text{ n'a pas de solution réelle.}$$

$f(x) = 0 \iff x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2] = 0$. Comme $x > 0$, cela équivaut à $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$, soit, en posant $X = \ln x$, à $2X^2 - 3X + 2 = 0$, qui n'a pas de solution.

L'équation $f(x) = 0$ n'a donc pas de solution : **la courbe de f ne coupe pas l'axe des abscisses.**

Partie B — 2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$ (on admet que la limite en 0 est 0).

$$f(x) = x(\ln x)^2 \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right) = 2.$$

$$\text{Par produit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Partie B — 3.a On admet que $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$. Montrer que $f''(x) = (1/x)(4\ln x + 1)$.

$$f''(x) = 2 \times 2\ln x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(4\ln x + 1).$$

Partie B — 3.b Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$ et préciser l'abscisse exacte du point d'inflexion.

Sur $]0; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $4\ln x + 1$.

$$4\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{4} \iff x = e^{-\frac{1}{4}}; 4\ln x + 1 > 0 \iff x > e^{-\frac{1}{4}}.$$

f est donc **concave** sur $\left] 0 ; e^{-\frac{1}{4}} \right]$ et **convexe** sur $\left[e^{-\frac{1}{4}} ; +\infty \right[$, avec un point d'inflexion d'abscisse exacte $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,779$.

Partie B — 3.c Montrer que la courbe de f est au-dessus de la tangente T_B sur $]1 ; +\infty[$.

Comme $e^{-\frac{1}{4}} < 1$, f est convexe sur $[1 ; +\infty[$: sur cet intervalle, la courbe est donc au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier T_B .

Partie C — 1. Justifier que la tangente T_B (au point d'abscisse e) a pour équation réduite $y = 2x - e$.

$$f'(e) = 2(\ln e)^2 + \ln e - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 \text{ et } f(e) = e(2 \times 1 - 3 + 2) = e \times 1 = e.$$

$$\text{La tangente en } e \text{ a pour équation } y = f'(e)(x - e) + f(e) = 2(x - e) + e = 2x - e.$$

Partie C — 2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale de $x \ln x$ entre 1 et e vaut $(e^2 + 1)/4$.

On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$ (donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$).

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\ln x \times \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Partie C — 3. On admet que l'intégrale de $x(\ln x)^2$ entre 1 et e vaut $(e^2 - 1)/4$. En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine entre la courbe de f , la tangente T_B et les droites $x=1$ et $x=e$.

$$\text{Sur } [1 ; e], \text{ la courbe est au-dessus de } T_B, \text{ donc } \mathcal{A} = \int_1^e [f(x) - (2x - e)] \, dx = \int_1^e [2x(\ln x)^2 - 3x \ln x + e] \, dx.$$

$$\text{Par linéarité : } \mathcal{A} = 2 \times \frac{e^2 - 1}{4} - 3 \times \frac{e^2 + 1}{4} + [ex]_1^e = \frac{-e^2 - 5}{4} + (e^2 - e).$$

$$\mathcal{A} = \frac{3e^2 - 4e - 5}{4} \text{ unités d'aire (soit environ 1,57 u.a.)}.$$

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 2)

Partie A — 1. D'après le graphique (courbe de d , la distance parcourue par un chariot en zone de freinage), au bout de combien de temps le chariot a-t-il parcouru 15 m ?

Par lecture graphique, $d(2) \approx 15$: le chariot a parcouru 15 m au bout de **2 secondes**.

Partie A — 2. Quelle longueur minimale prévoir pour la zone de freinage ?

L'asymptote horizontale Δ de la courbe est proche de $y = 23$: une zone de **23 mètres** semble suffisante.

Partie A — 3. Que vaut $d'(4,7)$? Interpréter.

Le coefficient directeur de la tangente T (passant par $(0 ; 16,5)$ et $(4,7 ; 21)$) vaut $\frac{21 - 16,5}{4,7} \approx 0,96$: $d'(4,7) \approx 0,96$ m/s, c'est la vitesse instantanée du chariot à $t = 4,7$ s.

Partie B — 1.a On modélise la vitesse v , solution de (E) : $y' + 0,6y = e^{-0,6t}$, avec $v(0)=12$. Résoudre (E') : $y' + 0,6y = 0$.

Les solutions de (E') sont les fonctions $t \mapsto Ke^{-0,6t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Partie B — 1.b Soit $g(t) = te^{-0,6t}$. Vérifier que g est solution de (E).

$$g'(t) = e^{-0,6t} - 0,6te^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 0,6t).$$

$$g'(t) + 0,6g(t) = e^{-0,6t}(1 - 0,6t) + 0,6te^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 0,6t + 0,6t) = e^{-0,6t}.$$

g est bien solution de (E).

Partie B — 1.c En déduire les solutions de (E) sur $[0 ; +\infty[$.

Les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto e^{-0,6t}(t + K)$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Partie B — 1.d En déduire que $v(t) = (12 + t)e^{-0,6t}$.

v est de cette forme et vérifie $v(0) = 12$: $e^0(0 + K) = 12 \iff K = 12$, donc $v(t) = (12 + t)e^{-0,6t}$.

Partie B — 2.a Montrer que $v'(t) = (-6,2 - 0,6t)e^{-0,6t}$.

v vérifie (E) : $v'(t) + 0,6v(t) = e^{-0,6t}$, donc $v'(t) = e^{-0,6t} - 0,6(12 + t)e^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 7,2 - 0,6t) = e^{-0,6t}(-6,2 - 0,6t)$.

Partie B — 2.b En admettant que $v(t) = 12e^{-0,6t} + te^{0,6t}$, déterminer la limite de v en $+\infty$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} 12e^{-0,6t} = 0$, et par croissances comparées $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{0,6t}} = 0$: par somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$ (le chariot finit par s'arrêter).

Partie B — 2.c Étudier le sens de variation de v sur $[0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

$e^{-0,6t} > 0$ pour tout t , donc $v'(t)$ est du signe de $-6,2 - 0,6t$, qui est strictement négatif pour tout $t \geq 0$.

v est donc strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$, de $v(0) = 12$ vers 0.

Partie B — 2.d Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une unique solution α , avec une valeur approchée au dixième.

v est continue (dérivable) et strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$, de 12 à 0 ; comme $1 \in]0 ; 12]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $v(t) = 1$ admet une unique solution α .

À la calculatrice : $v(4) \approx 1,5$, $v(5) \approx 0,85$ (donc $4 < \alpha < 5$) ; $v(4,6) \approx 1,05$, $v(4,7) \approx 0,995$: $\alpha \approx 4,7$.

Partie B — 3. Déterminer, en justifiant, au bout de combien de temps le système d'arrêt se déclenche (vitesse ≤ 1 m/s).

D'après la question précédente, $v(t) = 1$ pour $t = \alpha \approx 4,7$ s, et v étant décroissante, $v(t) \leq 1$ pour $t \geq \alpha$: le système se déclenche au bout d'environ 4,7 secondes.

Partie C — 1. On admet que $d(t) = \int_0^t v(x) dx$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $d(t) = e^{-0,6t} \left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}$.

On pose $u(x) = 12 + x$ et $v'(x) = e^{-0,6x}$ (donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\frac{1}{0,6}e^{-0,6x}$).

$$d(t) = \left[-(12 + x) \times \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} \right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} dx = \left[-(12 + x) \times \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} - \frac{1}{0,36} e^{-0,6x} \right]_0^t.$$

En simplifiant ($\frac{1}{0,6} = \frac{5}{3}$ et $\frac{1}{0,36} = \frac{25}{9}$) : $d(t) = e^{-0,6t} \left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}$.

Partie C — 2. Déterminer, au centième près, la distance parcourue par le chariot avant le déclenchement du dispositif d'arrêt.

Le dispositif se déclenche à $t \approx 4,7$ s : $d(4,7) = e^{-0,6 \times 4,7} \left(-\frac{5}{3} \times 4,7 - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9} \approx 20,95$ m.

Bac Terminale 2025 — Polynésie française (jour 2)

1. On considère $f(x) = x \ln(x-2)$ sur $]2 ; +\infty[$, dont la courbe est donnée. Conjecturer le sens de variation, les limites aux bornes et les asymptotes éventuelles.

D'après le graphique, f semble strictement croissante sur $]2 ; +\infty[$, avec $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ (asymptote verticale $x = 2$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2 ; +\infty[$.

$f(x) = 0 \iff x \ln(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou $\ln(x-2) = 0$. Comme $x > 2$, $x \neq 0$, donc $\ln(x-2) = 0 \iff x-2 = 1 \iff x = 3$.

L'équation a une unique solution : $x = 3$.

3. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 2 par valeurs supérieures. Ce résultat confirme-t-il une conjecture de la question 1 ?

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0^+, \text{ donc par composition } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) = -\infty; \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2, \text{ donc par produit } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty.$$

Ce résultat confirme la conjecture de limite en 2 et l'asymptote verticale d'équation $x = 2$.

4. Démontrer que, pour tout x de $]2; +\infty[$, $f'(x) = \ln(x-2) + x/(x-2)$.

$$f \text{ est un produit de fonctions dérivables : } f'(x) = 1 \times \ln(x-2) + x \times \frac{1}{x-2} = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$

5.a On pose $g(x) = f'(x)$. Démontrer que, pour tout x de $]2; +\infty[$, $g'(x) = (x-4)/(x-2)^2$.

$$g'(x) = f''(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1 \times (x-2) - x \times 1}{(x-2)^2} = \frac{x-2}{(x-2)^2} - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

5.b On admet que la limite de g en 2 (à droite) et en $+\infty$ vaut $+\infty$. En déduire le tableau de variation de g , avec la valeur exacte de son extremum.

$(x-2)^2 > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $x-4$: négatif sur $]2; 4[$, positif sur $]4; +\infty[$.

g est donc décroissante sur $]2; 4]$ puis croissante sur $[4; +\infty[$, avec un minimum $g(4) = \ln(2) + \frac{4}{2} = 2 + \ln(2)$.

5.c En déduire que, pour tout x de $]2; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Le minimum de g est $g(4) = 2 + \ln(2)$; comme $\ln(2) > 0$, $g(4) > 2 > 0$: $g(x) > 0$ pour tout x de $]2; +\infty[$.

5.d En déduire le sens de variation de f sur $]2; +\infty[$.

$g = f'$ est strictement positive sur $]2; +\infty[$: f est donc strictement croissante sur cet intervalle.

6. Étudier la convexité de f sur $]2; +\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion.

$f' = g$ est décroissante sur $]2; 4]$ (donc f concave) et croissante sur $[4; +\infty[$ (donc f convexe) : f change de convexité en $x = 4$.

$f(4) = 4 \ln(2) = \ln(16)$: le point d'inflexion a pour coordonnées $(4; \ln(16))$.

7. Combien de valeurs de x donnent une tangente à la courbe de f de coefficient directeur 3 ?

On cherche $f'(x) = 3$, soit $g(x) = 3$. Or $g(4) = 2 + \ln(2) \approx 2,7$.

Sur $]2 ; 4]$, g est continue et strictement décroissante de $+\infty$ à $2,7$: comme 3 est dans cet intervalle, il existe une unique solution α .

Sur $[4 ; +\infty[$, g est continue et strictement croissante de $2,7$ à $+\infty$: il existe de même une unique solution β .

Il existe donc exactement deux valeurs de x pour lesquelles la tangente a un coefficient directeur égal à 3.

Brevet 2024 — Amérique du Nord

1. Un cinéma propose le tarif « Classique » à 11 € l'entrée. Combien coûtent 3 entrées avec ce tarif ?

Avec le tarif Classique, 3 entrées coûtent $3 \times 11 = \mathbf{33 \text{ €}}$.

2. Le tarif « Essentiel » consiste en un abonnement annuel de 50 € puis 5 € par entrée. Montrer qu'avec ce tarif, 8 entrées coûtent 90 €.

Avec le tarif Essentiel, le coût de 8 entrées est $50 + 8 \times 5 = 50 + 40 = \mathbf{90 \text{ €}}$, ce qui confirme l'énoncé.

3. Le tarif « Liberté » consiste en un abonnement annuel de 240 € donnant un accès illimité. En notant x le nombre d'entrées, on considère les fonctions $f : x \mapsto 50 + 5x$, $g : x \mapsto 240$ et $h : x \mapsto 11x$. Associer chacune de ces fonctions au tarif correspondant.

La fonction f , qui combine un montant fixe de 50 et un coût de 5 par entrée, correspond au tarif « **Essentiel** ».

La fonction g , constante et égale à 240 quel que soit le nombre d'entrées, correspond au tarif « **Liberté** ».

La fonction h , proportionnelle au nombre d'entrées avec un coefficient de 11, correspond au tarif « **Classique** ».

4. Sur un graphique, les droites (d1), (d2) et (d3) représentent respectivement les tarifs Classique, Essentiel et Liberté en fonction du nombre d'entrées. Quel tarif propose un prix proportionnel au nombre d'entrées ?

Seule la fonction h (tarif Classique) est linéaire, de la forme $x \mapsto 11x$ sans terme constant : c'est donc le tarif « **Classique** » qui propose un prix proportionnel au nombre d'entrées.

5.a Avec 150 €, combien d'entrées peut-on acheter au maximum avec le tarif « Essentiel » (aucune justification attendue) ?

On résout $50 + 5x \leq 150$, soit $5x \leq 100$, soit $x \leq 20$.

Avec 150 €, on peut acheter au maximum **20 entrées** avec le tarif Essentiel.

5.b À partir de combien d'entrées le tarif « Liberté » devient-il le plus intéressant (aucune justification attendue) ?

Le tarif Liberté (240 €) devient plus avantageux que l'Essentiel lorsque $50 + 5x > 240$, soit $5x > 190$, soit $x > 38$.

À partir de **39 entrées**, le tarif Liberté est le plus intéressant.

5.c Avec un budget de 200 € maximum, quel tarif permet d'acheter le plus grand nombre d'entrées (aucune justification attendue) ?

Tarif Classique : $11x \leq 200$ donne au plus 18 entrées ($11 \times 18 = 198$).

Tarif Essentiel : $50 + 5x \leq 200$ donne au plus 30 entrées ($50 + 5 \times 30 = 200$).

Tarif Liberté : l'abonnement de 240 € dépasse déjà le budget de 200 €, donc ce tarif est inaccessible.

C'est donc le tarif « **Essentiel** » qui permet d'acheter le plus grand nombre d'entrées, soit 30.

Brevet 2024 — Asie

PARTIE A. Des amis, habitant Strasbourg, veulent se rendre à Marseille en voiture de location, puis se déplacer sur place à pied ou en transports en commun. Une agence propose trois formules : A à 0,50 € par kilomètre parcouru ; B avec un forfait fixe de 300 € puis 0,25 € par kilomètre parcouru ; C avec un forfait fixe de 900 € pour un kilométrage illimité. Un tableau des distances indique que Marseille est à 803 km de Strasbourg. Leur budget total pour le voyage est de 1 000 €. 1. Quelle distance vont-ils parcourir pour l'aller-retour ?

Pour l'aller-retour, la distance parcourue est $803 \times 2 = 1\,606$ km.

2. En choisissant la formule B, montrer que la location de voiture coûtera 701,50 €.

Avec la formule B, le prix payé est $300 + 1\,606 \times 0,25$.

$1\,606 \times 0,25 = 401,50$, donc le prix total est $300 + 401,50 = 701,50$ €, ce qui confirme le montant annoncé.

3. Quelle formule de location est la plus avantageuse pour ce trajet de 1 606 km ?

Avec la formule A, le prix payé serait $1\,606 \times 0,50 = 803$ €.

Avec la formule C, le prix payé serait fixe, 900 €.

En comparant les trois montants : $701,50 < 803 < 900$, la formule B est donc **la plus avantageuse** pour ce trajet.

4. On donne : prix moyen du gazole en 2023 : 1,87 € par litre ; consommation de la voiture : 5,6 L pour 100 km ; coût total des péages : 115,80 €. Leur budget de 1 000 € sera-t-il suffisant pour ce voyage (location + carburant + péages), en choisissant la formule B ?

La consommation totale de carburant pour 1 606 km est $1\,606 \times \frac{5,6}{100} = 89,936$ L.

Le coût du carburant est donc $89,936 \times 1,87 \approx 168,18$ € (arrondi au centime).

Le coût total du voyage est la somme de la location, du carburant et des péages : $701,50 + 168,18 + 115,80 = 985,48$ €.

Comme $985,48 \leq 1\,000$, le **budget de 1 000 € est suffisant** pour ce voyage.

PARTIE B. On étudie maintenant les trois formules de location de façon plus générale, en fonction de la distance parcourue. **5.** En notant x le nombre de kilomètres parcourus, exprimer en fonction de x le prix payé avec chacune des trois formules.

- Formule A : prix = $0,5x$
- Formule B : prix = $0,25x + 300$
- Formule C : prix = 900 (constant, quel que soit x)

6. Sur un graphique, trois courbes représentent le coût de la location (en euros) en fonction de la distance parcourue (en kilomètres) : la courbe 1 est une droite horizontale coupant l'axe des ordonnées à 900, la courbe 2 est une droite croissante coupant l'axe des ordonnées à 300, et la courbe 3 est une droite croissante passant par l'origine. Associer chaque courbe à sa formule (aucune justification n'était demandée, on en donne une ici).

La formule A, $0,5x$, est une fonction linéaire : sa représentation est une droite passant par l'origine du repère. C'est donc la **courbe 3**.

La formule B, $0,25x + 300$, est une fonction affine dont l'ordonnée à l'origine est 300 : c'est donc la **courbe 2**.

La formule C, constante et égale à 900, est représentée par une droite horizontale coupant l'axe des ordonnées à 900 : c'est donc la **courbe 1**.

7. Résoudre l'équation $0,25x + 300 = 0,5x$ et interpréter le résultat obtenu.

$$0,25x + 300 = 0,5x \iff 300 = 0,5x - 0,25x \iff 300 = 0,25x \iff x = \frac{300}{0,25} \iff x = 1\,200.$$

Cela signifie que pour une distance parcourue de 1 200 km, le prix payé avec la formule A est égal à celui payé avec la formule B.

8.a. Si la distance parcourue est de 2 500 km, quelle formule permet de payer le moins cher (sans justifier) ?

D'après une lecture graphique, pour une distance parcourue de 2 500 km, c'est la **formule C** qui est la moins chère.

8.b. Donner une distance parcourue pour laquelle la formule A est la plus intéressante (sans justifier).

Toute distance strictement comprise entre 0 et 1 200 km convient, par exemple **600 km** (pour ces distances, la courbe 3, qui représente la formule A, est la plus basse).

8.c. Déterminer graphiquement quelle formule est la moins chère en fonction de la distance parcourue, pour une distance inférieure à 2 600 km.

- de 0 à 1 200 km parcourus : la formule A est la moins chère ;
- de 1 200 à 2 400 km parcourus : la formule B est la moins chère ;
- de 2 400 à 2 600 km parcourus : la formule C est la moins chère.

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 2)

Partie A — 1. La piscine d'Alain contient 50 m^3 d'eau ; il ajoute chaque jour 15 g de chlore. Justifier que cet ajout fait augmenter le taux de 0,3 mg/L.

$$15\text{ g} = 15\,000\text{ mg répartis dans } 50\,000\text{ L} : \frac{15\,000}{50\,000} = 0,3\text{ mg/L}.$$

Partie A — 2.a Le taux v_n vérifie $v_0 = 0,7$ et $v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3$. Montrer par récurrence que, pour tout n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

Initialisation : $v_1 = 0,92 \times 0,7 + 0,3 = 0,944$, donc $v_0 \leq v_1 \leq 4$: vrai au rang 0.

Hérédité : si $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$, en multipliant par 0,92 puis en ajoutant 0,3 : $v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 3,98 \leq 4$: vrai au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

Partie A — 2.b Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

(v_n) est croissante et majorée par 4 : elle converge.

La fonction de récurrence $x \mapsto 0,92x + 0,3$ étant continue, la limite vérifie $\ell = 0,92\ell + 0,3 \iff 0,08\ell = 0,3 \iff \ell = 3,75$.

Partie A — 3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation (entre 1 et 3 mg/L) ?

La suite converge vers 3,75 : à partir d'un certain rang, le taux dépasse strictement 3 mg/L. **Le taux ne sera pas conforme à long terme.**

Partie A — 4. Compléter l'algorithme Python 'alerte_chlore(s)' qui renvoie le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

'while u <= s :', puis 'n = n + 1' et 'u = 0.92*u + 0.3'.

Partie A — 5. Quelle valeur renvoie 'alerte_chlore(3)' ? Interpréter.

$v_{16} \approx 2,95 \leq 3$ et $v_{17} \approx 3,01 > 3$: la fonction renvoie **17**. Avec ce protocole, le taux de chlore dépassera 3 mg/L au bout de 17 jours.

Partie B — 1. Un modèle continu vérifie (E) : $y' = -0,08y + \frac{q}{50}$. Justifier que f est de la forme $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$.

Les solutions de $y' = ay + b$ sont $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$; ici $a = -0,08$ et $b = \frac{q}{50}$, donc $-\frac{b}{a} = \frac{q}{50 \times 0,08} = \frac{q}{4}$:
 $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$.

Partie B — 2.a Exprimer, en fonction de q , la limite de f en $+\infty$.

$$e^{-0,08x} \rightarrow 0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{q}{4}.$$

Partie B — 2.b Sachant que le taux initial est 0,7 mg/L et que l'on veut une stabilisation à 2 mg/L, déterminer C et q.

Stabilisation à 2 : $\frac{q}{4} = 2 \iff q = 8$ (grammes de chlore par jour).

$f(0) = 0,7 \iff C + 2 = 0,7 \iff C = -1,3$: la fonction est $f(x) = -1,3e^{-0,08x} + 2$.

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 2)

Partie A — 1. La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par $B(-1; -2)$, où sa tangente T passe aussi par $A(0; -1)$. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.

$$f(-1) = -2 \text{ (ordonnée de B), et } f'(-1) \text{ est le coefficient directeur de } T = (AB) : \frac{-1 - (-2)}{0 - (-1)} = 1.$$

Partie A — 2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ?

Non : la courbe passe **en dessous** de sa tangente T pour les abscisses proches de -2 , ce qui est impossible pour une fonction convexe. Elle semble concave puis convexe, avec un point d'inflexion vers $x \approx -1,4$.

Partie A — 3. Conjecturer le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près.

La courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'une seule fois, vers $x \approx 0,1$.

Partie B — 1. On considère $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$ sur $] -2 ; +\infty[$. Déterminer la limite de f en -2 et interpréter.

$x^2 + 2x - 1 \rightarrow -1$ et $\ln(x + 2) \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$. La droite $x = -2$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

Partie B — 2. Montrer que, pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.

$$f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x + 2} = \frac{(2x + 2)(x + 2) + 1}{x + 2} = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}.$$

Partie B — 3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations complet.

Le numérateur $2x^2 + 6x + 5$ a pour discriminant $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$: il est strictement positif pour tout x ; le dénominateur $x + 2$ est positif sur l'intervalle.

$f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $] -2 ; +\infty[$, de $-\infty$ à $+\infty$.

Partie B — 4. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α , et donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

f est continue, strictement croissante, de $-\infty$ à $+\infty$: par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution α . Par balayage : $\alpha \approx 0,12$.

Partie B — 5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $] -2 ; +\infty[$.

$f(x) < 0$ sur $] -2 ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, et $f(x) > 0$ sur $] \alpha ; +\infty[$.

Partie B — 6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

$$f''(x) = \frac{(4x+6)(x+2) - (2x^2+6x+5)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}, \text{ du signe du numérateur.}$$

Le trinôme $2x^2+8x+7$ a pour discriminant $\Delta = 64 - 56 = 8 > 0$, avec pour racines $-2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; seule $-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ appartient à l'intervalle.

f'' s'y annule en changeant de signe : l'unique point d'inflexion a pour abscisse $-2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -1,29$.

Partie C — 1. Soit $g(x) = \ln(x+2)$, $J(0; 1)$ et M le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x . Justifier que $h(x) = JM^2 = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.

$$JM^2 = (x-0)^2 + (g(x)-1)^2 = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2 \text{ (repère orthonormé).}$$

Partie C — 2.a On admet $h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$. Dresser le tableau de variations de h .

$\frac{2}{x+2} > 0$ sur l'intervalle : $h'(x)$ est du signe de $f(x)$. h décroît sur $] -2 ; \alpha]$ puis croît sur $[\alpha ; +\infty[$, avec un minimum en α .

Partie C — 2.b En déduire que la distance JM est minimale pour $x = \alpha$.

La distance JM est minimale lorsque son carré $h(x)$ est minimal (croissance de la racine carrée), c'est-à-dire pour $x = \alpha$.

Partie C — 3.a Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha+2) = 0 \iff \ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2.$$

Partie C — 3.b En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_g$ en M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

La tangente a pour coefficient directeur $g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha+2}$; la droite (JM_α) a pour coefficient directeur $\frac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha} = \frac{-2\alpha - \alpha^2}{\alpha} = -2 - \alpha$.

Le produit vaut $\frac{1}{\alpha+2} \times (-2 - \alpha) = -1$: les deux droites sont perpendiculaires.

Brevet 2023 — Métropole, Antilles et Guyane

1. Dans un triangle ABC, M est un point du côté [AB] et N un point du côté [AC], tels que les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On donne $AC = 8,5$ cm, $AM = 2,7$ cm et $MB = 2,5$ cm. Calculer la longueur AB.

Comme M appartient au segment [AB], on a $AB = AM + MB = 2,7 + 2,5 = 5,2$ cm.

2. H est un point du côté [BC] tel que le triangle ABH est rectangle en H, avec $BH = 2$ cm. Montrer que la longueur AH est égale à 4,8 cm.

Le triangle ABH est rectangle en H, donc, d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AH^2 + BH^2$.

On en tire $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5,2^2 - 2^2 = 27,04 - 4 = 23,04$.

Comme AH est une longueur positive, $AH = \sqrt{23,04} = 4,8$ cm.

3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACH}$, arrondie au degré près.

Le triangle AHC est rectangle en H : le côté [AH] est opposé à l'angle $\widehat{ACH}$, et [AC] est l'hypoténuse.

D'après la trigonométrie dans le triangle rectangle (SOH-CAH-TOA), $\sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} = \frac{4,8}{8,5} \approx 0,5647$.

À la calculatrice, on trouve $\widehat{ACH} \approx 34,4^\circ$, soit, arrondi au degré près, $\widehat{ACH} \approx 34^\circ$.

4. Calculer la longueur HC, arrondie au centimètre près.

Le triangle AHC est rectangle en H : le côté [HC] est adjacent à l'angle $\widehat{ACH}$, et [AC] est l'hypoténuse.

D'après la trigonométrie dans le triangle rectangle, $\cos \widehat{ACH} = \frac{HC}{AC}$, donc $HC = AC \times \cos \widehat{ACH} \approx 8,5 \times \cos(34^\circ) \approx 7,05$ cm.

Arrondie au centimètre près, la longueur HC vaut donc environ **7 cm**.

5. Un élève affirme que la longueur AN est inférieure à 4 cm. A-t-il raison ?

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles, avec M sur [AB] et N sur [AC] : on peut donc appliquer le théorème de Thalès dans le triangle ABC.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}, \text{ soit } \frac{2,7}{5,2} = \frac{AN}{8,5}.$$

On en déduit $AN = \frac{2,7 \times 8,5}{5,2} \approx 4,41$ cm.

Comme $4,41 > 4$, la longueur AN n'est **pas** inférieure à 4 cm : **l'élève a tort**.

6. Calculer l'aire du triangle AHC.

Le triangle AHC est rectangle en H, donc son aire vaut la moitié du produit des deux côtés de l'angle droit : $\mathcal{A}(\text{AHC}) = \frac{\text{AH} \times \text{HC}}{2}$.

En utilisant les valeurs arrondies $\text{AH} = 4,8$ cm et $\text{HC} = 7$ cm, on obtient $\mathcal{A}(\text{AHC}) = \frac{4,8 \times 7}{2} = 16,8 \text{ cm}^2$.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 2)

1.a On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

Quand $x \rightarrow -\infty$, $-x \rightarrow +\infty$ donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$ (limite usuelle de l'exponentielle), donc $1 + e^{-x} \rightarrow +\infty$.

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$. Donc, la réponse est $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

1.b Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$ donc $1 + e^{-x} \rightarrow 1$, et $\lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$.

Donc, la réponse est $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Graphiquement, cela signifie que la courbe $\mathcal{C}$ de f admet l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) pour asymptote horizontale en $+\infty$.

1.c On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}$.

f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = 1 + e^{-x}$ et $u'(x) = -e^{-x}$; sa dérivée est donc $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

En multipliant numérateur et dénominateur par e^x : $f'(x) = \frac{-e^{-x} \times e^x}{(1 + e^{-x}) \times e^x} = \frac{-1}{e^x + 1}$.

Donc, la réponse est $f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}$.

1.d Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $1 + e^x > 0$ et $f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x} < 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Avec les limites établies aux questions précédentes ($+\infty$ en $-\infty$ et 0 en $+\infty$), on obtient le tableau : $f'(x)$ est négatif sur $\mathbb{R}$, et f décroît strictement de $+\infty$ (en $-\infty$) vers 0 (en $+\infty$), sans jamais atteindre 0.

2.a On note T_0 la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T_0 .

La tangente en un point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$; ici $a = 0$.

$$f(0) = \ln(1 + e^0) = \ln(2) \text{ et } f'(0) = \frac{-1}{1 + e^0} = -\frac{1}{2}.$$

Donc, la réponse est : T_0 a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

2.b Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x} ; \text{ en dérivant à nouveau, avec } u(x) = -1 \text{ (constante) et } v(x) = 1 + e^x : f''(x) = \frac{-v'(x) \times (-1)}{v(x)^2} \times (-1), \text{ plus simplement } f''(x) = \frac{0 - (-1) \times e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

Pour tout réel x , $e^x > 0$ et $(1 + e^x)^2 > 0$, donc $f''(x) > 0$. Donc, la réponse est : f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2.c En déduire que, pour tout réel x , $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

Comme f est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier au-dessus de T_0 . Donc, la réponse est : pour tout réel x , $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

3.a Pour un réel $a \neq 0$, on note $M_a(-a ; f(-a))$ et $N_a(a ; f(a))$ deux points de $\mathcal{C}$. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) - f(-x) = -x$.

$$f(x) - f(-x) = \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^x) = \ln\left(\frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x}\right) \text{ (propriété } \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)).$$

$$\text{En factorisant le numérateur par } e^{-x} : 1 + e^{-x} = e^{-x}(e^x + 1), \text{ donc } \frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}(1 + e^x)}{1 + e^x} = e^{-x}.$$

$$\text{Donc } f(x) - f(-x) = \ln(e^{-x}) = -x.$$

3.b En déduire que les droites T_0 et $(M_a N_a)$ sont parallèles.

$$\text{Le coefficient directeur de la droite } (M_a N_a) \text{ est } \frac{y_{N_a} - y_{M_a}}{x_{N_a} - x_{M_a}} = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)}.$$

$$\text{D'après la question précédente appliquée en } x = a, f(a) - f(-a) = -a, \text{ donc ce coefficient vaut } \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}.$$

Or T_0 a pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ (question 2.a). Les deux droites ayant le même coefficient directeur, donc, la réponse est : T_0 et $(M_a N_a)$ sont parallèles.

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 2)

Partie A — 1. Le plan est muni d'un repère orthogonal. On donne les représentations graphiques d'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f'' , notées $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$. Identifier, en justifiant, quelle courbe correspond à quelle fonction.

La courbe $\mathcal{C}_2$ reste strictement positive sur $\mathbb{R}$: si elle représentait une dérivée, la fonction associée serait strictement croissante partout, ce qu'aucune des deux autres courbes ne vérifie. $\mathcal{C}_2$ représente donc f elle-même, qui est strictement croissante.

La dérivée d'une fonction strictement croissante est positive : c'est donc $\mathcal{C}_3$, seule courbe restant positive et cohérente avec cette croissance, qui représente f' .

Par élimination, $\mathcal{C}_1$ représente f'' : on vérifie que f' (courbe $\mathcal{C}_3$) croît puis décroît à partir de l'abscisse 4, ce qui correspond bien au changement de signe de $\mathcal{C}_1$ autour de cette valeur.

Partie A — 2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse 4.

Ce coefficient directeur vaut $f'(4)$, c'est-à-dire l'ordonnée du point d'abscisse 4 sur la courbe $\mathcal{C}_3$ (courbe de f'), soit environ **3** par lecture graphique.

Partie A — 3. Donner, avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_1$.

Les points d'inflexion de $\mathcal{C}_1$ (courbe de f'') correspondent aux changements de sens de variation visibles sur le graphique, soit environ aux abscisses **3, 4 et 5**.

Partie B — Soit k un réel strictement positif et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{4}{1 + e^{-kx}}$. **1.** Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Comme $k > 0$, quand $x \rightarrow -\infty$, $-kx \rightarrow +\infty$ donc $e^{-kx} \rightarrow +\infty$ par composition ; par somme $1 + e^{-kx} \rightarrow +\infty$, donc, par quotient, $g(x) \rightarrow 0$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $-kx \rightarrow -\infty$ donc $e^{-kx} \rightarrow 0$ par composition ; par somme $1 + e^{-kx} \rightarrow 1$, donc, par quotient, $g(x) \rightarrow 4$.

Donc, la réponse est $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$.

Partie B — 2. Montrer que $g'(0) = k$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et quotient de fonctions dérivables ne s'annulant pas. En écrivant $g = \frac{4}{u}$ avec $u(x) = 1 + e^{-kx}$, on a $u'(x) = -ke^{-kx}$, donc $g' = -\frac{4u'}{u^2}$, soit $g'(x) = \frac{4ke^{-kx}}{(1 + e^{-kx})^2}$.

En $x = 0$: $g'(0) = \frac{4k e^0}{(1 + e^0)^2} = \frac{4k}{2^2} = \frac{4k}{4} = k$. Donc, la réponse est $g'(0) = k$.

Partie B — 3. Sachant qu'un logiciel de calcul formel donne $g''(x) = -4e^{kx} (e^{kx} - 1) \frac{k^2}{(e^{kx} + 1)^3}$, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion à l'abscisse 0.

La courbe admet un point d'inflexion en un réel où g'' s'annule en changeant de signe : il faut donc étudier le signe de $g''(x)$.

Le facteur $\frac{4k^2 e^{kx}}{(e^{kx} + 1)^3}$ est strictement positif pour tout réel x (exponentielle positive, $k^2 > 0$). Le signe de $g''(x)$ est donc celui de $-(e^{kx} - 1) = 1 - e^{kx}$.

Or $1 - e^{kx} > 0 \iff e^{kx} < 1 \iff kx < 0 \iff x < 0$ (car $k > 0$). Donc $g''(x)$ est strictement positive sur $] -\infty ; 0[$, nulle en 0, et strictement négative sur $]0 ; +\infty[$: g'' change bien de signe en 0.

Donc, la réponse est que la courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A(1 ; 3) et B(3 ; 5), et on donne ci-dessus la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f ainsi que la tangente (AB) à $\mathcal{C}_f$ au point A. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

L'ordonnée du point A donne $f(1) = 3$. Le nombre dérivé $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente (AB) en A : $f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$.

Partie A — 2.a On admet que f est définie par $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où a et b sont des réels positifs. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

Comme $a \geq 0$ et $x^2 \geq 0$ pour tout réel x , on a $ax^2 + 1 \geq 1 > 0$: f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \frac{2ax}{ax^2 + 1}$ (dérivée de $\ln(u)$ égale à $\frac{u'}{u}$, avec $u(x) = ax^2 + 1$ et $u'(x) = 2ax$).

Partie A — 2.b Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Les résultats de la question 1 donnent le système $\begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(a+1) + b = 3 \\ \frac{2a}{a+1} = 1 \end{cases}$.

La deuxième équation donne $2a = a + 1 \iff a = 1$. En reportant dans la première : $\ln(1+1) + b = 3 \iff b = 3 - \ln 2$.

Donc, la réponse est $a = 1$ et $b = 3 - \ln 2$, ce qui donne, sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$.

Partie B — 1. On admet désormais que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$. Montrer que f est une fonction paire.

Pour tout réel x , $f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) + 3 - \ln 2 = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2 = f(x)$. Donc, f est une fonction paire (sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

Partie B — 2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$, et par composition avec la fonction $\ln$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

f étant paire, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B — 3. Déterminer l'expression de $f'(x)$, étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations complet (limites en $\pm\infty$ et valeur exacte du minimum).

Comme $x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x , f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Le dénominateur $x^2 + 1$ étant strictement positif, $f'(x)$ est du signe de $2x$: $f'(x) < 0$ sur $] -\infty ; 0[$ et $f'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$, avec $f'(0) = 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, avec un minimum en $x = 0$ valant $f(0) = \ln(1) + 3 - \ln 2 = 3 - \ln 2$.

Tableau de variations : f décroît de $+\infty$ (limite en $-\infty$) jusqu'au minimum $3 - \ln 2$ atteint en $x = 0$, puis croît de $3 - \ln 2$ jusqu'à $+\infty$ (limite en $+\infty$).

Partie B — 4. À l'aide du tableau de variations de f , donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet exactement deux solutions.

D'après le tableau de variations, f décroît strictement puis croît strictement de part et d'autre du minimum $3 - \ln 2$, avec pour limites $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Donc, la réponse est que l'équation $f(x) = k$ admet exactement deux solutions si et seulement si $k > 3 - \ln 2$.

Partie B — 5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

$$f(x) = 3 + \ln 2 \iff \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2 = 3 + \ln 2 \iff \ln(x^2 + 1) = 2 \ln 2 \iff \ln(x^2 + 1) = \ln 4.$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante, cette égalité équivaut à $x^2 + 1 = 4$, soit $x^2 = 3$, soit $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

Donc, la réponse est que l'ensemble des solutions est $S = \{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$.

Partie C — 1. On rappelle que $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$ sur $\mathbb{R}$. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Par lecture graphique de la courbe, la convexité de $\mathcal{C}_f$ semble changer aux points d'abscisses -1 et 1 : on peut conjecturer l'existence de **deux points d'inflexion, d'abscisses -1 et 1** .

Partie C — 2. Montrer que, pour tout réel x , $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (numérateur $2x$, dénominateur x^2+1 ne s'annulant jamais), donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Avec } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, u(x) = 2x, u'(x) = 2, v(x) = x^2+1, v'(x) = 2x : f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

Partie C — 3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Le dénominateur $(x^2+1)^2$ est toujours strictement positif, donc $f''(x)$ est du signe de $1-x^2$, qui s'annule en $x = -1$ et $x = 1$, et est positif entre les deux racines, soit sur $] -1 ; 1[$.

f est convexe lorsque $f''(x) \geq 0$. Donc, la réponse est que **f est convexe sur l'intervalle $[-1 ; 1]$** , ce qui confirme la conjecture graphique de la question 1 (changements de convexité en $x = -1$ et $x = 1$).

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 2)

Pour les questions 1 à 3, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative de la dérivée f' est donnée : f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ et sa courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ (courbe positive avant, négative après). Question 1 : que peut-on affirmer sur f ? a. f admet un maximum en $-\frac{3}{2}$; b. f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$; c. f admet un minimum en $-\frac{1}{2}$; d. la courbe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse -1 .

Par lecture graphique, f' est positive sur $] -\infty ; -\frac{1}{2}[$ et négative sur $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$: f est donc croissante puis décroissante, avec un changement de sens de variation en $-\frac{1}{2}$.

f admet donc un maximum en $-\frac{1}{2}$. Donc, la réponse est **b**.

Question 2 : **a.** f est convexe sur $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[$; **b.** f est convexe sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$; **c.** la courbe de f n'admet pas de point d'inflexion; **d.** f est concave sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$.

Une fonction est convexe sur un intervalle lorsque sa dérivée y est croissante. Or, par lecture graphique, la courbe de f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$: f' est donc croissante sur $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[$.

f est donc convexe sur cet intervalle. Donc, la réponse est **a**.

Question 3 : la dérivée seconde f'' de f vérifie : **a.** $f''(x) \geq 0$ pour $x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$; **b.** $f''(x) \geq 0$ pour $x \in [-2 ; -1]$; **c.** $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$; **d.** $f''(-3) = 0$.

D'après la question précédente, f' est croissante sur $\left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[$ et, par lecture graphique, décroissante sur $\left]-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$: f' change donc de sens de variation en $-\frac{3}{2}$, où elle admet un maximum.

Comme f'' est la dérivée de f' , on a donc $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$. Donc, la réponse est **c**.

Question 4 : on considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n \leq w_n$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3$. **a.** la suite (v_n) converge; **b.** si (u_n) est croissante alors (v_n) est minorée par u_0 ; **c.** $1 \leq v_0 \leq 3$; **d.** la suite (v_n) diverge.

Si (u_n) est croissante, alors pour tout entier naturel n , $u_0 \leq u_n$. Or, par hypothèse, $u_n \leq v_n$ pour tout n , donc $u_0 \leq v_n$ pour tout entier naturel n .

La suite (v_n) est donc minorée par u_0 . Donc, la réponse est **b**.

(Les autres propositions sont fausses en général : le théorème des gendarmes ne s'applique ici que si u_n et w_n avaient la même limite, ce qui n'est pas le cas puisque $1 \neq 3$; on ne peut donc rien conclure sur la convergence de (v_n) , ni sur l'encadrement de v_0 en particulier.)

Question 5 : on considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$. **a.** la suite (u_n) diverge; **b.** la suite (u_n) converge; **c.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$; **d.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

L'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$, vraie pour tout entier naturel n non nul, signifie que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

De plus, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq 1$: la suite (u_n) est donc majorée par 1 à partir du rang 2, et donc bornée.

Une suite croissante et majorée converge, d'après le théorème de convergence monotone : (u_n)

converge. On ne peut cependant pas déterminer sa limite exacte avec les seules informations données (l'encadrement ne donne qu'une majoration, pas la valeur précise de la limite). Donc, la réponse est **b**.

Question 6 : on considère une suite réelle (u_n) telle que, pour tout entier naturel n , $n < u_n < n + 1$. **a.** il existe un entier naturel N tel que u_N est un entier ; **b.** la suite (u_n) est croissante ; **c.** la suite (u_n) est convergente ; **d.** la suite (u_n) n'a pas de limite.

Au rang n : $n < u_n < n + 1$. Au rang $n + 1$: $n + 1 < u_{n+1} < n + 2$.

En particulier, $u_n < n + 1 < u_{n+1}$, donc $u_n < u_{n+1}$ pour tout entier naturel n .

La suite (u_n) est donc croissante. Donc, la réponse est **b**.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 1)

1.a. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 6x + 4 \ln(x)$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

Quand x tend vers 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -6x = 0$, tandis que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} 4 \ln(x) = -\infty$.

Par somme de limites, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

1.b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Pour $x > 0$, on factorise : $x^2 - 6x = x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{6}{x}\right) = 1$, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right) = +\infty$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \ln(x) = +\infty$, donc, par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2.a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et $f'(x) = 2x - 6 + \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$.

2.b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f .

Comme $x > 0$ sur l'intervalle d'étude, le signe de $f'(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ est celui du numérateur $2x^2 - 6x + 4$, c'est-à-dire celui de $x^2 - 3x + 2$ (même signe, car on divise par $2 > 0$).

Ce trinôme a pour racines évidentes 1 et 2 (leur somme vaut 3 et leur produit 2, ce qui correspond bien aux coefficients), donc $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Un trinôme du second degré de coefficient dominant positif est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur : $f'(x) < 0$ sur $]1 ; 2[$ et $f'(x) > 0$ sur $]0 ; 1[\cup]2 ; +\infty[$, avec $f'(1) = f'(2) = 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; 1[$, strictement décroissante sur $]1 ; 2[$, puis strictement croissante sur $]2 ; +\infty[$.

On calcule les valeurs aux bornes : $f(1) = 1 - 6 + 4 \ln(1) = 1 - 6 + 0 = -5$, et $f(2) = 4 - 12 + 4 \ln(2) = 4 \ln(2) - 8 \approx -5,23$.

Le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$ part donc de $-\infty$ (limite en 0), croît jusqu'à -5 en $x = 1$, décroît jusqu'à $4 \ln(2) - 8$ en $x = 2$, puis croît vers $+\infty$ (limite en $+\infty$).

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4 ; 5]$.

On calcule les images des bornes : $f(4) = 16 - 24 + 4 \ln(4) = -8 + 8 \ln(2) \approx -2,45$ et $f(5) = 25 - 30 + 4 \ln(5) = 4 \ln(5) - 5 \approx 1,44$.

Ainsi $f(4) < 0 < f(5)$. Or, d'après la question précédente, l'intervalle $[4 ; 5]$ est inclus dans $[2 ; +\infty[$, sur lequel f est continue (car dérivable) et strictement croissante.

Donc, d'après le théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[4 ; 5]$.

4.a. On admet que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}$. Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$ et préciser les coordonnées exactes des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Comme $x > 0$, le dénominateur x^2 est strictement positif, donc le signe de $f''(x)$ est celui du numérateur $2x^2 - 4$.

On résout $2x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$; seule la solution $x = \sqrt{2}$ appartient à $]0 ; +\infty[$.

Le trinôme $2x^2 - 4$ est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur, donc, restreint à $]0 ; +\infty[$: $f''(x) < 0$ sur $]0 ; \sqrt{2}[$ et $f''(x) > 0$ sur $]\sqrt{2} ; +\infty[$.

Donc f est concave sur $]0 ; \sqrt{2}[$ et convexe sur $]\sqrt{2} ; +\infty[$.

Comme f'' s'annule en $x = \sqrt{2}$ en changeant de signe, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion, d'abscisse $\sqrt{2}$.

Son ordonnée vaut $f(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \ln(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \times \frac{1}{2} \ln(2) = 2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln(2)$.

Donc, le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées exactes $(\sqrt{2} ; 2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln(2))$.

4.b. On note A le point de coordonnées $(\sqrt{2} ; f(\sqrt{2}))$. Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$ et M le point de coordonnées $(t ; f(t))$. En utilisant la question 4.a., indiquer, selon la valeur de t , les positions relatives du segment $[AM]$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Le segment $[AM]$ est une corde de la courbe $\mathcal{C}_f$ joignant le point d'inflexion A au point M.

Si $t \in]0 ; \sqrt{2}[$, les points A et M sont tous deux situés sur la partie de $\mathcal{C}_f$ où f est concave : une corde d'une courbe concave est toujours située en dessous de la courbe, donc le segment $[AM]$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$.

Si $t \in]\sqrt{2} ; +\infty[$, les points A et M sont tous deux situés sur la partie de $\mathcal{C}_f$ où f est convexe : une corde d'une courbe convexe est toujours située au-dessus de la courbe, donc le segment $[AM]$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 1)

Dans un pays, 7 % de la population est atteinte d'une certaine maladie. Un test de dépistage a été mis au point : chez les personnes malades, le test est négatif dans 20 % des cas ; chez les personnes saines, le test est positif dans 1 % des cas. On choisit une personne au hasard dans la population et on la teste. On note M l'évènement « la personne est malade » et T l'évènement « le test est positif ». 1. Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$ (un arbre pondéré peut aider).

On construit un arbre pondéré à deux niveaux. Le premier niveau distingue M (probabilité $P(M) = 0,07$) et $\overline{M}$ (probabilité $P(\overline{M}) = 1 - 0,07 = 0,93$).

Chez les malades, le test est négatif dans 20 % des cas, donc positif dans les 80 % restants : $P_M(T) = 0,8$ et $P_M(\overline{T}) = 0,2$.

Chez les personnes saines, le test est positif dans 1 % des cas : $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,99$.

D'après la définition des probabilités conditionnelles sur une branche de l'arbre : $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = \mathbf{0,056}$.

2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie soit positif vaut 0,0653.

Les évènements M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers (chaque personne est soit malade, soit saine). D'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$.

On calcule la seconde branche : $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093$.

D'où $P(T) = 0,056 + 0,0093 = \mathbf{0,0653}$, ce qui est le résultat annoncé.

3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?

$P_M(T)$ est la probabilité que le test soit positif sachant que la personne est malade : c'est une caractéristique technique du test, fixée à l'avance et connue avant tout dépistage.

$P_T(M)$ est la probabilité que la personne soit réellement malade sachant que son test est positif : c'est l'information qui intéresse un patient ou un médecin une fois le résultat du test obtenu.

Donc, la réponse est que, dans un contexte de dépistage, il est plus pertinent de connaître $P_T(M)$, qui répond directement à la question « ce test positif signifie-t-il vraiment que je suis malade ? ».

4. On considère que la personne choisie a eu un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? (arrondir au centième)

D'après la définition de la probabilité conditionnelle : $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,056}{0,0653}$.

Donc, la réponse est $P_T(M) \approx 0,86$ au centième près.

5.a On choisit, avec remise, 10 personnes au hasard dans la population, et X compte parmi elles le nombre de tests positifs. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .

Le tirage avec remise assure l'indépendance des 10 tirages, chacun ayant deux issues possibles (test positif ou non) avec la même probabilité de succès $p = P(T) = 0,0653$ à chaque tirage. Donc, la réponse est que X suit la **loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,0653$** .

5.b Déterminer la probabilité pour qu'exactly deux personnes aient un test positif (arrondir au centième).

D'après la formule de la loi binomiale : $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^8$.

Donc, la réponse est $P(X = 2) \approx 0,11$ au centième près.

6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif soit supérieure à 99 %.

Soit n le nombre de personnes testées et Y la variable aléatoire qui compte, parmi elles, le nombre de tests positifs. Le tirage avec remise assure que Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,0653$.

L'évènement contraire de « au moins un test positif » est « aucun test positif », c'est-à-dire $Y = 0$. On cherche donc le plus petit entier n tel que $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) \geq 0,99$.

Or $P(Y = 0) = (1 - 0,0653)^n = 0,9347^n$, donc l'inégalité devient $1 - 0,9347^n \geq 0,99 \iff 0,9347^n \leq 0,01$.

En appliquant le logarithme népérien, strictement croissant, des deux côtés : $n \ln(0,9347) \leq \ln(0,01)$.
Comme $\ln(0,9347) < 0$, diviser par ce nombre inverse le sens de l'inégalité : $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9347)}$.

À la calculatrice, $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9347)} \approx 68,19$. Le plus petit entier n vérifiant cette inégalité est donc $n = 69$ (on vérifie qu'avec $n = 68$, $1 - 0,9347^{68} \approx 0,9899 < 0,99$, alors qu'avec $n = 69$, $1 - 0,9347^{69} \approx 0,9905 \geq 0,99$).

Donc, la réponse est qu'il faut tester au minimum **69 personnes**.

Bac Terminale 2021 — Amérique du Nord

On considère un cube $ABCDEFGH$. I est le milieu de $[EF]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[AE]$. On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, dans lequel $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 1 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$, $E(0 ; 0 ; 1)$, $F(1 ; 0 ; 1)$, $G(1 ; 1 ; 1)$, $H(0 ; 1 ; 1)$, $I(0,5 ; 0 ; 1)$, $J(1 ; 0,5 ; 0)$ et $K(0 ; 0 ; 0,5)$. 1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ?

$$\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont proportionnelles selon aucun facteur commun), donc, la réponse est que **les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles**.

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

$$\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que $2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AE}$: ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ et les droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques $d_1 : x = 3 + t, y = 8 - 2t, z = -2 + 3t$ et $d_2 : x = 4 + t, y = 1 + t, z = 8 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$). Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

$$d_1 \text{ a pour vecteur directeur } \overrightarrow{u_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } d_2 \text{ a pour vecteur directeur } \overrightarrow{u_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc, la réponse est que **les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles**.

4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Le plan $\mathcal{P}$ admet pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, et d_2 a pour vecteur directeur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 1 \times 1 + 3 \times 1 + (-2) \times 2 = 1 + 3 - 4 = 0.$$

Le vecteur directeur de d_2 est donc orthogonal au vecteur normal de $\mathcal{P}$: la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

5. Montrer que le point $L(4; 0; 3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5; 3; 1)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

$\vec{ML} \begin{pmatrix} 4-5 \\ 0-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, qui est l'opposé du vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{P}$: $\vec{ML}$ est donc lui aussi normal au plan $\mathcal{P}$, ce qui montre que la droite (ML) est perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

D'autre part, les coordonnées de L vérifient l'équation de $\mathcal{P}$: $4 + 3 \times 0 - 2 \times 3 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, donc L appartient à $\mathcal{P}$.

Le point L appartient au plan $\mathcal{P}$ et la droite (ML) lui est perpendiculaire : donc, la réponse est que **L est bien le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$.**

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 1)

1. Une influenceuse compte $u_0 = 1\,000$ abonnés en 2020. Chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés puis en gagne 250 nouveaux. On note u_n le nombre d'abonnés en l'année $(2020 + n)$. Calculer u_1 .

Perdre 10 % revient à multiplier par 0,9. Donc $u_1 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = \mathbf{1\,150}$ abonnés.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

Multiplier par 0,9 traduit la perte de 10 % des abonnés d'une année sur l'autre.

On ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

3. Une fonction Python 'suite(n)' initialise 'u = 1000', puis répète 'n' fois 'u = 0.9*u + 250', avant de renvoyer 'u'. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la valeur renvoyée par l'appel 'suite(10)'.

La fonction calcule u_{10} , c'est-à-dire le nombre d'abonnés estimé en l'année 2030 ; la calculatrice donne $u_{10} \approx \mathbf{1\,977}$ abonnés.

4.a Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

Initialisation : $u_0 = 1\,000 \leq 2\,500$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq 2\,500$. Comme $0,9 > 0$, la multiplication conserve l'ordre : $0,9u_n \leq 0,9 \times 2\,500 = 2\,250$, puis en ajoutant 250 aux deux membres, $0,9u_n + 250 \leq 2\,500$, soit $u_{n+1} \leq 2\,500$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

4.b Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.

Or, d'après la question précédente, $u_n \leq 2\,500$, donc $0,1u_n \leq 250$, soit $-0,1u_n + 250 \geq 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est **croissante**.

4.c Dédurre des deux questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 500 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

5.a On pose $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n . Montrer que (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1\,500$.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500 = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9(u_n - 2\,500) = 0,9v_n$.

La relation $v_{n+1} = 0,9v_n$, vraie pour tout entier naturel n , montre que (v_n) est géométrique de raison 0,9.

Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

5.b Exprimer v_n en fonction de n , puis montrer que $u_n = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

Comme (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1\,500$, pour tout entier naturel n : $v_n = -1\,500 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 2\,500$, donc $u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

5.c Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Comme $0 < 0,9 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc par produit puis somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\,500$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que le nombre d'abonnés de l'influenceuse **se stabilise autour de 2 500** au fil des années.

6. Écrire un programme qui détermine en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200, puis donner cette année.

- $n = 0$
- $u = 1000$
- tant que $u \leq 2200$:
- $u = 0.9 * u + 250$
- $n = n + 1$
- renvoyer n
- En simulant l'évolution terme à terme, on obtient $u_{15} \approx 2191,2 \leq 2200$ et $u_{16} \approx 2222,0 > 2200$: le programme renvoie $n = 16$.
- Donc, la réponse est que le nombre d'abonnés dépasse 2 200 la seizième année suivant 2020, c'est-à-dire en **2036**.

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 2)

1. QCM. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x$. Quelle est la limite de f en $-\infty$?

En développant, $f(x) = x^2e^x - 2xe^x - e^x$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$; de plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

2. QCM. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{5 + e^x}$. Que peut-on dire des asymptotes à sa courbe représentative ?

Quand $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0$ donc $f(x) \rightarrow \frac{3}{5}$: la droite d'équation $y = \frac{3}{5}$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$ donc $f(x) \rightarrow 0$: l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) est asymptote horizontale en $+\infty$.

La courbe admet deux asymptotes horizontales (une pour chaque limite infinie).

3. QCM. La courbe ci-dessous (non reproduite ici) représente la dérivée seconde f'' d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-3,5 ; 6]$, et s'annule en changeant de signe en -3 , 2 et 5 . Que peut-on en conclure sur f ?

Un point d'inflexion de la courbe de f correspond à une valeur où f'' s'annule en changeant de signe.

Comme f'' s'annule en changeant de signe exactement trois fois (en -3 , 2 et 5), **la courbe de f admet exactement trois points d'inflexion.**

4. QCM. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$. Que peut-on affirmer sur cette suite ?

On met l'expression sous forme canonique : $u_n = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{289}{4} + 20 = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{209}{4}$.

Un carré étant toujours positif ou nul, on a pour tout entier naturel n : $u_n \geq -\frac{209}{4}$.

La suite (u_n) est donc minorée (par $-\frac{209}{4}$).

5. QCM. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 5$. On exécute en Python une fonction qui initialise $u = 2$ et $n = 0$, puis répète tant que $u < 45$: $u \leftarrow 0,75u + 5$ et $n \leftarrow n + 1$, avant de renvoyer n . Que renvoie cette fonction ?

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 20$.

Initialisation : $u_0 = 2 \leq 20$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que pour un entier n , $u_n \leq 20$. Alors $0,75u_n \leq 0,75 \times 20 = 15$, donc $0,75u_n + 5 \leq 20$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 20$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $u_n \leq 20$, donc la condition $u < 45$ est toujours vérifiée : la boucle ne s'arrête jamais.

Aucune des trois réponses proposées n'est correcte : le programme ne s'arrête pas (boucle infinie).

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 2)

1. Une application génère un ticket sur une grille 3×3 où trois cases contiennent chacune un cœur, disposées au hasard. Justifier qu'il existe exactement 84 façons différentes de placer ces trois cœurs sur la grille.

Placer trois cœurs sur la grille revient à choisir 3 cases parmi les 9 de la grille, sans tenir compte de l'ordre : le nombre de façons est donc $\binom{9}{3}$.

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \frac{504}{6} = 84.$$

Il y a bien 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur la grille.

2. Un ticket est gagnant si les trois cœurs sont alignés côte à côte sur une même ligne, une même colonne ou une même diagonale. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant vaut $\frac{2}{21}$.

La grille compte 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales, soit 8 alignements possibles de trois cases : il y a donc 8 grilles gagnantes parmi les 84 grilles possibles (équiprobables).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est $\frac{8}{84} = \frac{2}{21}$ (en simplifiant par 4).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est donc bien égale à $\frac{2}{21}$.

3. À chaque ticket généré, le joueur verse 1 € ; si le ticket est gagnant, la société lui reverse 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Soit X le gain algébrique du joueur pour un ticket. Un ticket gagnant rapporte $5 - 1 = 4$ € (le joueur récupère les 5 € mais a déjà versé 1 €), un ticket perdant coûte 1 €.

$$P(X = 4) = \frac{2}{21} \text{ et } P(X = -1) = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}.$$

$$E(X) = 4 \times \frac{2}{21} + (-1) \times \frac{19}{21} = \frac{8 - 19}{21} = -\frac{11}{21} \approx -0,524.$$

L'espérance de gain est négative : en moyenne, le joueur perd environ 0,52 € par ticket généré. Le jeu est donc défavorable au joueur.

4.a Un joueur génère 20 tickets de façon indépendante. Soit X le nombre de tickets gagnants parmi ces 20 tickets. Donner la loi de probabilité de X .

Chaque génération de ticket est une épreuve à deux issues (gagnant / perdant) de probabilité de succès $p = \frac{2}{21}$, répétée $n = 20$ fois de façon indépendante.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{21}$.

4.b Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 5)$, arrondie à 10^{-3} .

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{2}{21}\right)^5 \times \left(\frac{19}{21}\right)^{15} \approx \mathbf{0,027} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

4.c Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$, arrondie à 10^{-3} , puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$$(X \geq 1) \text{ est l'évènement contraire de } (X = 0), \text{ donc } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^{20} \approx 1 - 0,135 \approx \mathbf{0,865} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

Sur 20 tickets générés, le joueur a donc environ 86,5 % de chances d'obtenir au moins un ticket gagnant.

Bac Terminale 2021 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A (avec $a = \frac{2}{3}$) — 1. ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE, J est le point du segment [CG] tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$. Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de F, I et J.

Le cube a pour arête 1 dans ce repère, donc F, sommet opposé à D sur la face supérieure du carré ABFE, a pour coordonnées F(1 ; 0 ; 1).

I est le centre de la face ADHE, donc le milieu de [AH] (et aussi de [DE]) : $I\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Comme $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ avec C(1 ; 1 ; 0) et G(1 ; 1 ; 1), on a $J\left(1 ; 1 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 2. On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ). Déterminer une représentation paramétrique de (d).

$$\overrightarrow{FI} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ (obtenu par } J - F\text{)}.$$

(d) passe par $I\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et admet $\overrightarrow{FI}$ pour vecteur directeur, donc une représentation paramétrique de (d) est : $x = 0$, $y = \frac{1}{2} + t$, $z = \frac{1}{2} - \frac{t}{3}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Partie A — 3.a K est le point d'intersection de (d) et de (AE). Montrer que K a pour coordonnées $\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.

La droite (AE) est l'axe des cotes (points d'ordonnée nulle). On cherche donc le point de (d) tel que $y = 0$: $\frac{1}{2} + t = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$.

La cote correspondante vaut $z = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

On obtient bien $K\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 3.b Déterminer les coordonnées du point L, intersection de (d) et de (DH).

Tous les points de (DH) ont pour ordonnée 1. On cherche donc le point de (d) tel que $y = 1$: $\frac{1}{2} + t = 1 \iff t = \frac{1}{2}$.

La cote correspondante vaut $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Donc, la réponse est $L\left(0 ; 1 ; \frac{1}{3}\right)$.

Partie A — 4.a Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.

Le milieu de [FL] a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{1+\frac{1}{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$.

Le milieu de [JK] a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2}; \frac{1+0}{2}; \frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$.

Les diagonales [FL] et [JK] ont le même milieu : **FJLK est donc un parallélogramme.**

Partie A — 4.b Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.

$$\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) + \left(-\frac{2}{3}\right) \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0.$$

Les diagonales du parallélogramme FJLK sont donc perpendiculaires : **FJLK est un losange.**

Partie A — 4.c Le quadrilatère FJLK est-il un carré ?

$$\overrightarrow{KF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{KF} \cdot \overrightarrow{FJ} = 0 + 0 - \frac{1}{9} = -\frac{1}{9} \neq 0.$$

Les côtés consécutifs [KF] et [FJ] ne sont donc pas perpendiculaires : le losange FJLK n'est pas un rectangle, donc, la réponse est **non, FJLK n'est pas un carré.**

Partie B (cas général) — 1. On admet désormais que $K\left(0; 0; 1 - \frac{a}{2}\right)$ et $L\left(0; 1; \frac{a}{2}\right)$, avec $a \in [0; 1]$. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a.

$$G \text{ a pour coordonnées } (1; 1; 1), \text{ donc } \overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Comme $C(1; 1; 0)$, on en déduit $J(1; 1; a)$.

Partie B — 2. Montrer que FJLK est un parallélogramme, quelle que soit la valeur de a.

$$\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ (en calculant } \frac{a}{2} - \left(1 - \frac{a}{2}\right) = a - 1).$$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{KL}$: **FJLK est donc un parallélogramme pour toute valeur de a.**

Partie B — 3. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles FJLK est un losange ?

$$\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{a}{2} - 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 - \frac{3a}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = 1 - 1 + \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right).$$

Ce produit s'annule si et seulement si $\frac{a}{2} = 1$ (soit $a = 2$) ou $1 - \frac{3a}{2} = 0$ (soit $a = \frac{2}{3}$).

Seule la valeur $a = \frac{2}{3}$ appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$: dans ce cas, les diagonales du parallélogramme FJLK sont perpendiculaires, donc, la réponse est **oui, uniquement pour $a = \frac{2}{3}$, FJLK est un losange.**

Partie B — 4. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles FJLK est un carré ?

D'après la question précédente, la seule valeur de a rendant FJLK losange est $a = \frac{2}{3}$, cas déjà étudié en partie A où l'on a montré que ce losange n'était pas un carré : donc, la réponse est **non, il n'existe aucune valeur de a pour laquelle FJLK est un carré.**

Brevet 2018 — Amérique du Nord

1. Développer et réduire $A = 2x(x - 1) - 4(x - 1)$.

$$A = 2x(x - 1) - 4(x - 1) = 2x^2 - 2x - 4x + 4 = 2x^2 - 6x + 4.$$

2. Montrer que -5 est solution de l'équation $(2x + 1)(x - 2) = 63$.

Pour $x = -5$: $(2 \times (-5) + 1) \times (-5 - 2) = (-10 + 1) \times (-7) = (-9) \times (-7) = 63$, ce qui correspond bien au membre de droite : -5 est solution.

3.a On considère la fonction $f(x) = -3x + 1,5$. Deux droites sont représentées sur deux graphiques : laquelle représente f ?

L'ordonnée à l'origine de f est 1,5 et son coefficient directeur est -3 .

C'est la droite dont l'ordonnée à l'origine vaut 1,5 et qui est décroissante (pente -3) qui représente f .

3.b Justifier ce choix.

La droite choisie est bien celle qui coupe l'axe des ordonnées en 1,5 et qui descend de 3 unités à chaque fois que x augmente de 1, ce qui correspond exactement au coefficient directeur -3 et à l'ordonnée à l'origine 1,5 de f .