

Géométrie dans l'espace — Tous les corrigés

LOGIMATHS

Brevet 2026 — Asie

1. Montrer que la longueur du segment $[OA]$ est égale à 8 cm.

Le triangle OAD est rectangle en A (angle marqué). D'après le théorème de Pythagore :

$$OD^2 = OA^2 + AD^2$$

$$OA^2 = OD^2 - AD^2 = 8,2^2 - 1,8^2 = 67,24 - 3,24 = 64$$

$$\text{Donc } OA = \sqrt{64} = 8 \text{ cm.}$$

2. Justifier que les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

Le triangle OAD est rectangle en A, donc (AD) est perpendiculaire à (OA) , c'est-à-dire à la droite (OB) puisque O, A, B sont alignés.

Le triangle OBC est rectangle en B, donc (BC) est perpendiculaire à (OB) pour la même raison.

Or, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles.

Donc $(BC) // (AD)$.

3. Calculer la longueur du segment $[OB]$.

Les points O, A, B sont alignés et les points O, D, C sont alignés dans le même ordre.

Les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Or, d'après le théorème de Thalès,

$$\text{On a } \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC} = \frac{AD}{BC}$$

$$\text{d'où } \frac{OA}{OB} = \frac{AD}{BC}, \text{ soit } \frac{8}{OB} = \frac{1,8}{4,5}$$

$$\text{donc } OB = \frac{8 \times 4,5}{1,8} = 20 \text{ cm.}$$

4.a Calculer le volume du grand cône de hauteur $[OB]$, en cm^3 , arrondi à l'unité.

Le grand cône a pour rayon $BC = 4,5$ cm et pour hauteur $OB = 20$ cm.

$$V = \frac{\pi \times R^2 \times H}{3} = \frac{\pi \times 4,5^2 \times 20}{3} = 135\pi \approx 424 \text{ cm}^3.$$

4.b Calculer le volume du gobelet, en cm^3 , arrondi à l'unité.

Le petit cône retiré a pour rayon $AD = 1,8 \text{ cm}$ et pour hauteur $OA = 8 \text{ cm}$.

$$\text{Volume du petit cône : } V = \frac{\pi \times 1,8^2 \times 8}{3} = 8,64\pi \text{ cm}^3.$$

Le gobelet est un tronc de cône : son volume est celui du grand cône moins celui du petit cône.

$$V_{\text{gobelet}} = 135\pi - 8,64\pi = 126,36\pi \approx \mathbf{397 \text{ cm}^3}.$$

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan (A(2 ; 1 ; 1), B(3 ; -2 ; 0), C(0 ; -1 ; 1)).

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-2 \\ -2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-2 \\ -1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ont des coordonnées non proportionnelles (par exemple $\frac{1}{-2} \neq \frac{-3}{-2}$), donc ils ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés : **ils définissent bien un plan.**

2.a Montrer que le vecteur $\mathbf{n(1 ; -1 ; 4)}$ est normal au plan (ABC).

On calcule les produits scalaires (le repère est orthonormé) :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + (-1) \times (-3) + 4 \times (-1) = 1 + 3 - 4 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) + 4 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : **$\vec{n}$ est donc un vecteur normal à (ABC).**

2.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x - y + 4z - 5 = 0$.

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ étant normal à (ABC), une équation de ce plan est de la forme } x - y + 4z + d = 0.$$

Comme A appartient à (ABC) : $2 - 1 + 4 \times 1 + d = 0$, soit $5 + d = 0$, donc $d = -5$.

Une équation cartésienne de (ABC) est donc $x - y + 4z - 5 = 0$.

3. Vérifier la représentation paramétrique donnée de la droite Δ passant par D et orthogonale au plan (ABC).

Une droite orthogonale au plan (ABC) est dirigée par un vecteur normal à ce plan, ici $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Comme Δ passe par $D(0; 0; 2)$, une représentation paramétrique de Δ est $x = 0 + 1t$, $y = 0 - 1t$, $z = 2 + 4t$, soit bien $x = t$, $y = -t$, $z = 2 + 4t$ avec $t \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point $H(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3})$.

Le projeté orthogonal de D sur (ABC) est le point d'intersection de Δ et de (ABC).

Un point de Δ a pour coordonnées $(t; -t; 2 + 4t)$. En le substituant dans l'équation du plan :

$$t - (-t) + 4(2 + 4t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 2t + 8 + 16t - 5 = 0 \Leftrightarrow 18t = -3 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{6}$$

Les coordonnées de H sont donc $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; 2 - \frac{4}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$.

5.a Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$$

$$CB = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-(-1))^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

Comme $AB = CB$, le triangle ABC est isocèle en B.

5.b Montrer que l'aire du triangle ABC est $3\sqrt{2}$.

Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal (ici B) passe par le milieu I de la base [AC].

$$I = \left(\frac{2+0}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{1+1}{2}\right) = (1; 0; 1)$$

$$AC = \sqrt{(0-2)^2 + (-1-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ et } BI = \sqrt{(1-3)^2 + (0-(-2))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Aire} = \frac{AC \times BI}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 3}{2} = 3\sqrt{2}.$$

6.a En déduire que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 1.

En choisissant ABC comme base, la hauteur associée est la distance DH (H étant le projeté orthogonal de D sur (ABC), question 4).

$$DH = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{18}{36}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \times 3 = 1.$$

6.b Sachant que la distance de A au plan (BCD) vaut $\sqrt{2}$, en déduire l'aire du triangle BCD.

En reprenant le volume avec BCD comme base et $h = \sqrt{2}$ comme hauteur associée : $V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{BCD} \times h$.

$$1 = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{BCD} \times \sqrt{2}, \text{ donc } \text{Aire}_{BCD} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

7.a Déterminer k pour lequel A, B, C et $D_k(0; 0; k)$ sont coplanaires. Quel est alors le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) ?

D_k appartient au plan (ABC) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$0 - 0 + 4k - 5 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{5}{4}$$

Pour $k = \frac{5}{4}$, le point D_k appartient déjà au plan (ABC) : son projeté orthogonal sur (ABC) est donc **lui-même**.

7.b Peut-on trouver une valeur de k telle que A soit le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) ?

Pour que A soit le projeté orthogonal de D_k sur (ABC), le vecteur $\overrightarrow{AD_k}$ devrait être colinéaire au vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AD_k} \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 0 - 1 \\ k - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ k - 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières coordonnées seraient dans un rapport $\frac{-2}{-1} = 2$ pour $\overrightarrow{AD_k}$, contre $\frac{-1}{-1} = 1$ pour $\vec{n}$: ces rapports sont différents, quelle que soit la valeur de k.

Non, il n'existe aucune valeur de k pour laquelle A est le projeté orthogonal de D_k sur (ABC).

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)

A.1.a Montrer que le triangle ABC est isocèle en C.

$$\text{Le repère étant orthonormé : } AC = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{81}{16} + \frac{144}{16}} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}.$$

$$CB = \sqrt{\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}.$$

Comme $AC = CB$, le triangle ABC est isocèle en C.

A.1.b Montrer que l'aire du triangle ABC est 6,75 m².

Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal C est aussi une médiane : elle passe par I, milieu de [AB], de coordonnées $\left(\frac{9}{4}; 0; 0\right)$.

$$AB = \frac{9}{2} \text{ et } CI = \sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} = 3.$$

$$\text{Aire} = \frac{AB \times CI}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 3 = \mathbf{6,75 \text{ m}^2}.$$

A.2.a Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $z = 0$.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ont des coordonnées non proportionnelles : A, B, C ne sont pas alignés et définissent un plan.

Comme $z_A = z_B = z_C = 0$, **une équation cartésienne du plan (ABC) est bien $z = 0$.**

A.2.b Montrer que $H\left(\frac{3}{2}; 1; 0\right)$ est le projeté orthogonal de D sur (ABC).

$z_H = 0$, donc H appartient à (ABC).

$\overrightarrow{HD} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, normal à (ABC) (car l'équation du plan est $z = 0$) : la droite (HD) est donc orthogonale à (ABC).

H est donc bien le projeté orthogonal de D sur (ABC).

A.3 En déduire le volume du module.

En choisissant ABC comme base, la hauteur associée est $DH = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = 3$.

$$V = \frac{1}{3} \times 6,75 \times 3 = \mathbf{6,75 \text{ m}^3}.$$

B.1.a Montrer que $\vec{n}(4; 3; 3)$ est normal au plan (BCD).

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : B, C, D définissent bien un plan.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \times \left(-\frac{9}{4}\right) + 3 \times 3 + 3 \times 0 = -9 + 9 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 4 \times (-3) + 3 \times 1 + 3 \times 3 = -12 + 3 + 9 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD) : **$\vec{n}$ est donc normal à (BCD).**

B.1.b En déduire qu'une équation cartésienne de (BCD) est $4x + 3y + 3z - 18 = 0$.

Une équation de (BCD) est de la forme $4x + 3y + 3z + d = 0$. Comme $B\left(\frac{9}{2}; 0; 0\right) \in (BCD)$: $4 \times \frac{9}{2} + d = 0$, donc $d = -18$.

Une équation cartésienne de (BCD) est donc bien $4x + 3y + 3z - 18 = 0$.

B.1.c Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale à (BCD) passant par D.

$$\Delta \text{ est dirigée par } \vec{n}(4; 3; 3) \text{ et passe par } D\left(\frac{3}{2}; 1; 3\right) : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

B.2 Montrer que L a pour coordonnées $\left(-\frac{5}{2}; -2; 0\right)$.

L, point de Δ , a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2} + 4t_0; 1 + 3t_0; 3 + 3t_0\right)$ pour un certain t_0 , et vérifie l'équation de (ABC), soit $z = 0$.

$$3 + 3t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = -1.$$

En remplaçant : $x = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}$, $y = 1 - 3 = -2$, $z = 0$: L a bien pour coordonnées $\left(-\frac{5}{2}; -2; 0\right)$.

B.3 Montrer que le module est adapté aux débutants.

$$\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DL} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DL} = 0 \times (-4) + 0 \times (-3) + (-3) \times (-3) = 9.$$

Or $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DL} = DH \times DL \times \cos(\widehat{LDH})$, avec $DH = 3$ et $DL = \sqrt{16 + 9 + 9} = \sqrt{34}$.

$$\cos(\widehat{LDH}) = \frac{9}{3\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}, \text{ donc } \widehat{LDH} \approx 59,04^\circ.$$

Comme $59,04^\circ < 60^\circ$, le module est bien adapté aux débutants.

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 2)

Partie A — ABCDEFGH est un cube d'arête 1 ; I, J, K, L, M sont les milieux respectifs de [AB], [BF], [AE], [CD], [DH]. Affirmation 1 : $\vec{JH} = 2\vec{BI} + \vec{DM} - \vec{CB}$. Vraie ou fausse ?

$$\vec{JH} = \vec{JF} + \vec{FE} + \vec{EH} = \frac{1}{2}\vec{BF} + \vec{BA} + \vec{BC}.$$

Or $\frac{1}{2}\vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{DH} = \vec{DM}$ (M milieu de [DH]) et $\vec{BA} + \vec{BC} = 2\vec{BI} - \vec{CB}$ (I milieu de [AB]), donc $\vec{JH} = \vec{DM} + 2\vec{BI} - \vec{CB}$.

L'affirmation est vraie.

Partie A — Affirmation 2 : le triplet de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG})$ est une base de l'espace.

Vraie ou fausse ?

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} : \overrightarrow{AG}$ s'exprime comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$.

Les trois vecteurs sont donc coplanaires : **l'affirmation est fausse.**

Partie A — Affirmation 3 : $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = -\frac{1}{4}$. Vraie ou fausse ?

$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{IK}$, donc $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IK}$.

K se projette orthogonalement en A sur (AB), donc $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IA}$, or ces deux vecteurs sont colinéaires de sens contraires : $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IA} = -IB \times IA = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ (arête de longueur 1, I milieu de [AB]).

L'affirmation est vraie.

Partie B — Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère le plan P : $2x - y + 3z + 6 = 0$, A(2 ; 0 ; -1) et B(5 ; -3 ; 7). Affirmation 4 : le plan P et la droite (AB) sont parallèles. Vraie ou fausse ?

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ dirige (AB) ; $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal à P.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 3 \times 2 + (-3) \times (-1) + 8 \times 3 = 6 + 3 + 24 = 33 \neq 0.$$

Le vecteur normal au plan et le vecteur directeur de la droite ne sont pas orthogonaux : **l'affirmation est fausse** (le plan et la droite ne sont pas parallèles).

Partie B — Affirmation 5 : le plan P' parallèle à P passant par B a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$. Vraie ou fausse ?

P et P' étant parallèles, $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est aussi normal à P' : une équation de P' est de la forme $2x - y + 3z + d = 0$.

$$\text{Le point B appartient à P'} : 2 \times 5 - (-3) + 3 \times 7 + d = 0 \iff 10 + 3 + 21 + d = 0 \iff d = -34.$$

P' a donc pour équation $2x - y + 3z - 34 = 0$, soit, en multipliant par -1 : $-2x + y - 3z + 34 = 0$.

L'affirmation est vraie.

Partie B — Affirmation 6 : la distance du point A au plan P est égale à $\sqrt{\frac{14}{2}}$. Vraie ou fausse ?

Notons H le projeté orthogonal de A sur P : $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dirige la droite Δ orthogonale à P passant par A, de représentation paramétrique $x = 2+2t$, $y = -t$, $z = -1+3t$.

L'intersection avec P vérifie $2(2+2t) - (-t) + 3(-1+3t) + 6 = 0 \iff 14t = -7 \iff t = -\frac{1}{2}$, donc $H \left(1 ; \frac{1}{2} ; -\frac{5}{2} \right)$.

$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, donc $\|\overrightarrow{AH}\|^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{14}{4}$, soit $AH = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

L'affirmation est vraie.

Partie B — On note (d) la droite de représentation paramétrique $x = -12+2k$, $y = 6$, $z = 3-5k$ (k réel). Affirmation 7 : les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. Vraie ou fausse ?

(d) est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et (AB) par $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont ni parallèles ni confondues.

(AB) a pour représentation paramétrique $x = 2+3t$, $y = -3t$, $z = -1+8t$. Chercher un point commun revient à résoudre $2+3t = -12+2k$, $-3t = 6$, $-1+8t = 3-5k$, soit $t = -2$ et $k = 4$ dans les trois équations : le système admet une solution.

Les droites sont donc sécantes, au point $C(-4 ; 6 ; -17)$, donc coplanaires. **L'affirmation est fausse.**

Bac Terminale 2025 — Asie (jour 1)

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne α réel, $A(1 ; 1 ; 0)$, $B(2 ; 1 ; 0)$, $C(\alpha ; 3 ; \alpha)$, et (d) : $x=1+t$, $y=2t$, $z=-t$. **Affirmation 1 :** pour toute valeur de α , A, B, C définissent un plan dont un vecteur normal est $\mathbf{j}(0 ; 1 ; 0)$. Vraie ou fausse ?

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$ ne sont jamais colinéaires (leurs deuxièmes coordonnées sont 0 et 2) : A, B, C définissent bien un plan quel que soit α .

Le repère étant orthonormé : $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{j} = (\alpha-1) \times 0 + 2 \times 1 + \alpha \times 0 = 2 \neq 0$.

$\vec{j}$ n'est donc pas orthogonal à $\overrightarrow{AC}$, donc ce n'est pas un vecteur normal au plan (ABC). **L'affirmation est fausse.**

Affirmation 2 : il existe exactement une valeur de α telle que (AC) et (d) soient parallèles.

Vraie ou fausse ?

(d) est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et (AC) par $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ont la même deuxième coordonnée (2), donc pour qu'ils soient colinéaires, il faudrait qu'ils soient égaux.

Cela exigerait $\alpha - 1 = 1$ (soit $\alpha = 2$) et $\alpha = -1$ simultanément, ce qui est impossible.

Quel que soit α , les vecteurs ne sont donc jamais colinéaires : **l'affirmation est fausse.**

Affirmation 3 : une mesure de l'angle OAB est 135° . Vraie ou fausse ?

$\overrightarrow{AO} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \times 1 + (-1) \times 0 + 0 \times 0 = -1$.

$AO = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $AB = \sqrt{1^2} = 1$, donc $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = AO \times AB \times \cos(\widehat{OAB}) = \sqrt{2} \cos(\widehat{OAB})$.

$-1 = \sqrt{2} \cos(\widehat{OAB}) \iff \cos(\widehat{OAB}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui correspond à un angle de $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, soit 135° . **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 4 : le projeté orthogonal de A sur (d) est le point H(1 ; 2 ; 2). Vraie ou fausse ?

Pour que $x_H = 1 + t$ avec $x_H = 1$, il faut $t = 0$; mais alors $y = 2 \times 0 = 0 \neq 2$ et $z = -0 = 0 \neq 2$: H ne vérifie pas la représentation paramétrique de (d), donc **H n'appartient même pas à (d)** : l'affirmation est fausse.

Affirmation 5 : la sphère de centre O et de rayon 1 rencontre (d) en deux points distincts.

Vraie ou fausse ?

Un point M_t de (d) vérifie $OM_t = \sqrt{(1+t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2} = \sqrt{6t^2 + 2t + 1}$.

$OM_t = 1 \iff 6t^2 + 2t + 1 = 1 \iff 6t^2 + 2t = 0 \iff 2t(3t + 1) = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = -\frac{1}{3}$.

Cette équation a deux solutions distinctes : la sphère rencontre bien (d) en deux points. **L'affirmation est vraie.**

Bac Terminale 2025 — Polynésie française (jour 2)

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne $A(1; 3; 0)$, $B(-1; 4; 5)$, $C(0; 1; 0)$, $D(-2; 2; 1)$. Montrer que A , B , C déterminent un plan.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : A , B , C ne sont pas alignés, ils déterminent bien un plan.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times (-1) + 1 \times (-2) + 5 \times 0 = 2 - 2 + 0 = 0$: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, donc le triangle ABC est rectangle en A .

3.a Soit Δ la droite passant par D , de vecteur directeur $u(2; -1; 1)$. Démontrer que Δ est orthogonale au plan (ABC) .

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-2) + (-1) \times 1 + 1 \times 5 = -4 - 1 + 5 = 0$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 1 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$.

$\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : Δ (dirigée par $\vec{u}$) est donc orthogonale au plan (ABC) .

3.b Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $2x - y + z + 1 = 0$.

$\vec{u}$ étant normal à (ABC) , ce plan a une équation de la forme $2x - y + z + d = 0$; A appartient au plan : $2 \times 1 - 3 + 0 + d = 0 \iff d = 1$, soit $2x - y + z + 1 = 0$.

3.c Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

Δ passe par D et est dirigée par $\vec{u}$: $x = -2 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 1 + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

4. On appelle H le point de coordonnées $(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3})$. Vérifier que H est le projeté orthogonal de D sur (ABC) .

Le point de Δ appartenant à (ABC) vérifie $2(-2 + 2t) - (2 - t) + (1 + t) + 1 = 0 \iff 6t - 4 = 0 \iff t = \frac{2}{3}$.

Pour $t = \frac{2}{3}$: $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $z = \frac{5}{3}$: on retrouve H . Comme $\Delta \perp (ABC)$, H est bien le projeté orthogonal de D sur (ABC) .

5.a Montrer que $DH = 2\sqrt{\frac{6}{3}}$.

$$DH = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

5.b En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

En prenant ABC (rectangle en A) comme base : son aire est $B = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{30} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$.

La hauteur relative à cette base est $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, donc $V = \frac{1}{3} \times B \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2}\sqrt{6} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{10}{3} \approx 3,33$.

6. On considère la droite d : $x=1-2k$, $y=-3k$, $z=1+k$. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

d est dirigée par $\vec{u}' \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 2 \times (-2) + (-1) \times (-3) + 1 \times 1 = -4 + 3 + 1 = 0$.

$\vec{u}'$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{u}$ du plan (ABC), donc $\vec{u}'$ dirige une droite parallèle au plan.

Le point $E(1 ; 0 ; 1)$ de d (pour $k = 0$) ne vérifie pas $2 \times 1 - 0 + 1 + 1 = 4 \neq 0$: E n'appartient pas au plan, donc d est strictement parallèle au plan (ABC).

Brevet 2024 — Asie

QCM (une seule réponse exacte par question, aucune justification n'était demandée sur la copie). 1. Parmi les nombres 1, 21, 37 et 54, lequel est un nombre premier ? Réponses proposées : A. 1 B. 21 C. 37 D. 54

1 n'est pas premier : il n'a qu'un seul diviseur (lui-même).

21 est divisible par 1, 3, 7 et 21 : il a donc plus de deux diviseurs.

54 est divisible par 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 et 54 : il a lui aussi plus de deux diviseurs.

37 n'admet que deux diviseurs : 1 et 37. C'est donc le seul nombre premier de la liste. **Réponse C.**

2. Un cube a pour arête 5 cm. Quelle est l'aire totale de son patron ? Réponses proposées : A. 125 cm² B. 150 cm² C. 120 cm² D. 100 cm²

Le patron d'un cube est constitué de 6 faces carrées, chacune de côté 5 cm.

L'aire d'une face est $5^2 = 25$ cm², donc l'aire totale du patron est $6 \times 25 = 150$ cm². **Réponse B.**

3. Quelle est une forme factorisée de l'expression $4x^2 - 9$? Réponses proposées : A. $(4x - 3)(4x + 3)$ B. $(2x - 3)(2x + 3)$ C. $(2x - 3)^2$ D. $(4x - 9)(4x + 9)$

On reconnaît une différence de deux carrés : $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2$.

D'après l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, on obtient $(2x - 3)(2x + 3)$. **Réponse B.**

4. Un écran de télévision est au format 16 : 9 (rapport longueur/largeur). Sa longueur mesure 110 cm. Quelle est sa largeur, arrondie ? Réponses proposées : A. 62 cm B. 103 cm C. 196 cm D. 94 cm

On cherche la largeur ℓ telle que $\frac{110}{\ell} = \frac{16}{9}$, ce qui revient à résoudre le tableau de proportionnalité

$$\text{longueur/largeur} = \frac{16}{9} = 110/\ell.$$

Par produit en croix : $\ell = \frac{110 \times 9}{16} = 61,875$, soit environ **62 cm. Réponse A.**

5. On donne la série de valeurs : 4,1 ; 3,67 ; 4,23 ; 4,5 ; 3,4. Quelle est la médiane de cette série ? Réponses proposées : A. 0,83 B. 4,1 C. 4,23 D. 3,98

On range d'abord les valeurs dans l'ordre croissant : 3,4 ; 3,67 ; 4,1 ; 4,23 ; 4,5.

Il y a 5 valeurs (nombre impair), la médiane est donc la valeur du milieu, en position $\frac{5+1}{2} = 3$: c'est **4,1. Réponse B.**

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 1)

1. Dans un repère orthonormé (unité 1 cm), on donne A(3 ; -1 ; 1), B(4 ; -1 ; 0), C(0 ; 3 ; 2), D(4 ; 3 ; -2) et S(2 ; 1 ; 4). Montrer que A, B, C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (les premières coordonnées donneraient un rapport -3, mais $0 \times (-3) \neq 4$) : **A, B, C ne sont pas alignés.**

2.a Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ vérifie $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$: c'est une combinaison linéaire de vecteurs du plan (ABC).

Le point C appartenant au plan (ABC), D y appartient aussi : **les quatre points sont coplanaires.**

2.b Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].

$\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$ montre que (AB) et (CD) sont strictement parallèles (C n'est pas sur (AB)) : ABDC est un quadrilatère plan non croisé dont deux côtés opposés sont parallèles, c'est-à-dire **un trapèze de bases [AB] et [CD].**

3.a Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 + 0 - 2 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -6 + 4 + 2 = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, donc **normal à (ABC).**

3.b En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

(ABC) a une équation de la forme $2x + y + 2z + d = 0$; A(3; -1; 1) y appartient : $6 - 1 + 2 + d = 0 \iff d = -7$. D'où $2x + y + 2z - 7 = 0$.

3.c Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par S et orthogonale au plan (ABC).

Δ est dirigée par $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passe par S(2; 1; 4) : $x = 2 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = 4 + 2t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

3.d Montrer que le point I d'intersection de Δ et (ABC) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$, puis que $SI = 2$ cm.

En substituant dans l'équation du plan : $2(2+2t) + (1+t) + 2(4+2t) - 7 = 9t + 6 = 0 \iff t = -\frac{2}{3}$.

D'où $I\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$, et $SI = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{9}} = 2$ cm.

4.a Vérifier que le projeté orthogonal H de B sur la droite (CD) a pour coordonnées H(3; 3; -1), et montrer que $HB = 3\sqrt{2}$ cm.

$\vec{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifie $\vec{CD} \cdot \vec{BH} = -4 + 0 + 4 = 0$: (BH) est orthogonale à (CD).

$\vec{CH} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\vec{CD}$: H est bien sur la droite (CD). **H est donc le projeté orthogonal de B sur (CD).**

$$HB = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ cm.}$$

4.b Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.

$AB = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$ et $CD = 4AB = 4\sqrt{2}$ (bases du trapèze), la hauteur étant $HB = 3\sqrt{2}$.

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \text{ cm}^2.$$

5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABDC} \times SI = \frac{1}{3} \times 15 \times 2 = 10 \text{ cm}^3.$$

Bac Terminale 2024 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. ABCDEFGH est un cube d'arête 1 cm ; I est le milieu de [AB], J le milieu de [CG]. Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de I et J.

$$I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 0\right) \text{ et } J\left(1 ; 1 ; \frac{1}{2}\right).$$

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI).

$$\overrightarrow{EJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \overrightarrow{FH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{FI} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FH} = -1 + 1 + 0 = 0$ et $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FI} = -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 0$: $\overrightarrow{EJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, donc **normal à (FHI)**.

3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (FHI) est $-2x - 2y + z + 1 = 0$.

$-2\overrightarrow{EJ} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi normal au plan : l'équation est de la forme $-2x - 2y + z + d = 0$; $F(1 ; 0 ; 1)$ donne $-2 + 1 + d = 0 \iff d = 1$. D'où $-2x - 2y + z + 1 = 0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EJ).

(EJ) passe par E(0 ; 0 ; 1) et est dirigée par $\overrightarrow{EJ} : x = t, y = t, z = 1 - \frac{1}{2}t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

5.a On note K le projeté orthogonal de E sur le plan (FHI). Calculer ses coordonnées.

En substituant dans l'équation du plan : $-2t - 2t + 1 - \frac{1}{2}t + 1 = 0 \iff -\frac{9}{2}t = -2 \iff t = \frac{4}{9}$.

D'où $K\left(\frac{4}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{7}{9}\right)$.

5.b Montrer que le volume de la pyramide EFHI est $\frac{1}{6} \text{ cm}^3$ (on utilisera L, milieu de [EF], projeté orthogonal de I sur (EFH)).

Avec le triangle EFH comme base : EFH est rectangle en E, d'aire $\frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.

La hauteur correspondante est IL, avec $L\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 1\right) : IL = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1$.

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6} \text{ cm}^3.$$

5.c Dédire des deux questions précédentes l'aire du triangle FHI.

En reprenant le volume avec FHI comme base et EK comme hauteur : $EK = \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{4}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{FHI} \times \frac{2}{3}$ donne $\mathcal{A}_{FHI} = \frac{3}{4} \text{ cm}^2$.

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 1)

1.a Dans un repère orthonormé, on donne A(5 ; 5 ; 0), B(0 ; 5 ; 0), C(0 ; 0 ; 10) et D(0 ; 0 ; - $\frac{5}{2}$). Montrer que $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan (CAD).

$\vec{CA} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ et $\vec{DC} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{25}{2} \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires ; $\vec{n}_1 \cdot \vec{CA} = 5 - 5 + 0 = 0$ et $\vec{n}_1 \cdot \vec{DC} = 0$: $\vec{n}_1$ est normal au plan (CAD).

1.b En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne $x - y = 0$.

L'équation est de la forme $x - y + d = 0$; C(0 ; 0 ; 10) donne $0 - 0 + d = 0 \iff d = 0$. D'où $x - y = 0$.

2.a La droite $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique $x = \frac{5}{2}t$, $y = 5 - \frac{5}{2}t$, $z = 0$. Justifier que son intersection H avec (CAD) a pour coordonnées $(\frac{5}{2} ; \frac{5}{2} ; 0)$.

En substituant : $\frac{5}{2}t - (5 - \frac{5}{2}t) = 0 \iff 5t = 5 \iff t = 1$, d'où $H(\frac{5}{2} ; \frac{5}{2} ; 0)$.

2.b Démontrer que H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

Pour $t = 0$, $\mathcal{D}$ passe par $(0 ; 5 ; 0) = B$, et son vecteur directeur $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \vec{n}_1$ est normal au plan (CAD).

$\mathcal{D}$ est donc la droite orthogonale à (CAD) passant par B, et H son point d'intersection avec le plan : **H est le projeté orthogonal de B sur (CAD).**

3.a Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

$\overrightarrow{HA} \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HB} = -\frac{5}{2}\vec{n}_1$ vérifient $\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{HA} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$: les droites (BH) et (HA) sont perpendiculaires, le triangle ABH est rectangle en H.

3.b En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.

$$BH = HA = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \text{ donc } \mathcal{A} = \frac{BH \times HA}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{50}{4} = \frac{25}{4}.$$

4.a Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C.

A, B, H ont une cote nulle : ils sont dans le plan $z = 0$; C est sur l'axe $(O ; \vec{k})$, perpendiculaire à ce plan. (CO) est donc la hauteur issue de C.

4.b En déduire le volume du tétraèdre ABCH.

$$CO = 10, \text{ donc } V = \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10 = \frac{125}{6}.$$

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. En déduire la distance du point H au plan (ABC).

$$BA = 5 \text{ et } BC = \sqrt{25 + 100} = 5\sqrt{5}, \text{ donc } \mathcal{A}(ABC) = \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{En égalant les deux expressions du volume : } \frac{125}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{25\sqrt{5}}{2} \times d, \text{ d'où } d = \frac{125}{6} \times \frac{6}{25\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Brevet 2023 — Amérique du Nord**Situation 1. Donner la décomposition de 780 en produit de facteurs premiers (aucune justification attendue).**

On divise successivement par les plus petits nombres premiers : $780 = 2 \times 390 = 2 \times 2 \times 195 = 2 \times 2 \times 3 \times 65 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13$.

La décomposition en produit de facteurs premiers est donc $780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$.

Situation 2.a Dans un jeu de 32 cartes (quatre familles de huit cartes chacune : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as), on tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir le 8 de pique (aucune justification attendue) ?

Le tirage est équiprobable sur les 32 cartes, et une seule carte correspond à l'évènement (le 8 de pique).

La probabilité d'obtenir le 8 de pique est donc $\frac{1}{32}$.

Situation 2.b Quelle est la probabilité d'obtenir un roi ou un cœur (aucune justification attendue) ?

Il y a 4 rois (un par famille) et 8 cœurs, mais le roi de cœur est compté dans les deux catégories : il ne faut donc le compter qu'une seule fois.

Le nombre d'issues favorables est $4 + 8 - 1 = 11$, sur un total de 32 issues équiprobables.

La probabilité d'obtenir un roi ou un cœur est donc $\frac{11}{32}$.

Situation 3. Développer et réduire l'expression $A = (2x + 5)(3x - 4)$.

On développe chaque produit : $A = 2x \times 3x + 2x \times (-4) + 5 \times 3x + 5 \times (-4) = 6x^2 - 8x + 15x - 20$.

En réduisant les termes de même degré : $A = 6x^2 + 7x - 20$.

Situation 4.a Un prisme droit a pour base un triangle rectangle de côtés 60 cm et 80 cm (les deux côtés de l'angle droit), et pour hauteur 120 cm. Quel est le volume, en cm^3 , de ce prisme droit ?

L'aire du triangle rectangle de base est $\mathcal{A}_{\text{base}} = \frac{60 \times 80}{2} = 2\,400 \text{ cm}^2$.

Le volume du prisme droit est $\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = 2\,400 \times 120 = 288\,000 \text{ cm}^3$.

Situation 4.b Convertir ce volume en litre (rappel : $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$).

On convertit d'abord les cm^3 en dm^3 , sachant que $1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$: $288\,000 \text{ cm}^3 = 288 \text{ dm}^3$.

Comme $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$, le volume du prisme est donc de **288 L**.

Situation 5. Le polygone 2 est un agrandissement du polygone 1, de coefficient 3. L'aire du polygone 1 est 11 cm^2 . Quelle est l'aire du polygone 2 ?

Lors d'un agrandissement de coefficient k , les aires sont multipliées par k^2 (et non par k).

Ici $k = 3$, donc les aires sont multipliées par $3^2 = 9$.

L'aire du polygone 2 est donc $9 \times 11 = \mathbf{99 \text{ cm}^2}$.

Bac Terminale 2023 — Asie (jour 2)

Partie A — 1. Deux cubes ABCDEFGH et BKLCFJMG sont accolés ; dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a par exemple $F(1 ; 0 ; 1)$, $G(1 ; 1 ; 1)$ et $J(2 ; 0 ; 1)$; le point I est le milieu de [EF]. Montrer que le volume du tétraèdre FIGB vaut $\frac{1}{12}$ (unité de volume), sachant que $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.

Les arêtes des cubes valent toutes 1, donc $BF = FG = 1$; comme I est le milieu de [EF], la longueur FI vaut $\frac{1}{2} \times EF = \frac{1}{2}$.

En choisissant le triangle rectangle isocèle BFG comme base (aire = $\frac{1}{2} \times BF \times FG = \frac{1}{2}$) et [FI] comme hauteur associée (FI est perpendiculaire au plan (BFG), donc à la base) : $V_{FIGB} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Donc, la réponse est $V_{FIGB} = \frac{1}{12}$ unité de volume.

Partie A — 2. Déterminer les coordonnées du point I.

On décompose $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$). Donc, la réponse est $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$.

Partie A — 3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est normal au plan (BIG).

Avec $J(2; 0; 1)$ et $D(0; 1; 0)$, on obtient $\overrightarrow{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'autre part $\overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (car $B(1; 0; 0)$ et $I(\frac{1}{2}; 0; 1)$) et $\overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (car $G(1; 1; 1)$).

On calcule les produits scalaires : $\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BI} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 0 + 1 = 0$, et $\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BG} = 2 \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$.

$\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles) et dirigent le plan (BIG) : $\overrightarrow{DJ}$ leur est orthogonal, donc $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BIG).

Partie A — 4. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BIG) est $2x - y + z - 2 = 0$.

Puisque $\overrightarrow{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (BIG), ce plan admet une équation de la forme $2x - y + z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Le point $B(1; 0; 0)$ appartient au plan, donc $2 \times 1 - 0 + 0 + d = 0$, soit $d = -2$.

Donc, la réponse est $2x - y + z - 2 = 0$.

Partie A — 5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d , orthogonale à (BIG) et passant par F.

La droite d , orthogonale au plan (BIG), admet pour vecteur directeur le vecteur normal $\overrightarrow{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et passe par $F(1; 0; 1)$.

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient à d si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{FM} = t \overrightarrow{DJ}$.

$$\text{Donc, la réponse est } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Partie A — 6.a La droite d coupe le plan (BIG) au point L' . Montrer que L' a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{6} ; \frac{5}{6}\right)$.

On remplace x, y, z par leurs expressions paramétriques dans l'équation du plan (BIG) : $2(1+2t) - (-t) + (1+t) - 2 = 0$.

En développant : $2 + 4t + t + 1 + t - 2 = 0$, soit $6t + 1 = 0$, donc $t = -\frac{1}{6}$.

En reportant dans les équations paramétriques : $x = 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $y = -\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$, $z = 1 + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$.

Donc, la réponse est $L' \left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{6} ; \frac{5}{6}\right)$.

Partie A — 6.b Calculer la longueur FL' .

On calcule $\overrightarrow{FL'} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ (différence des coordonnées de L' et de F).

$$FL'^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Donc, la réponse est $FL' = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Partie A — 6.c En déduire l'aire du triangle BIG.

Le segment $[FL']$ est la hauteur du tétraèdre FIGB relative à la base (BIG), puisque d est orthogonale à ce plan.

Avec la formule du volume : $V_{FIGB} = \frac{1}{3} \times \text{aire}(\text{BIG}) \times FL'$, donc $\text{aire}(\text{BIG}) = \frac{3 V_{FIGB}}{FL'} = \frac{3 \times \frac{1}{12}}{\frac{\sqrt{6}}{6}} =$

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{6}} = \frac{1}{4} \times \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{6}{4\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6}}{24} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Donc, la réponse est $\text{aire}(\text{BIG}) = \frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

1. On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE trapèze rectangle en A, muni du repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ défini par $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$, avec de plus $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. On note I le milieu de [EF] et J le milieu de [AE]. Donner les coordonnées de I et J.

Dans ce repère, les sommets du prisme ont pour coordonnées : A(0 ; 0 ; 0), B(4 ; 0 ; 0), C(4 ; 4 ; 0), D(0 ; 4 ; 0), E(0 ; 0 ; 8), F(4 ; 0 ; 4), G(4 ; 4 ; 4), H(0 ; 4 ; 8).

I est le milieu de [EF], donc $I\left(\frac{0+4}{2} ; \frac{0+0}{2} ; \frac{8+4}{2}\right)$, soit **I(2 ; 0 ; 6)**.

J est le milieu de [AE], donc $J\left(\frac{0+0}{2} ; \frac{0+0}{2} ; \frac{0+8}{2}\right)$, soit **J(0 ; 0 ; 4)**.

2.a Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).

$$\overrightarrow{IG} \begin{pmatrix} 4-2 \\ 4-0 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-0 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IGJ).}$$

Le repère étant orthonormé, on calcule les produits scalaires par les coordonnées : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IG} = -1 \times 2 + 1 \times 4 + 1 \times (-2) = -2 + 4 - 2 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IJ} = -1 \times (-2) + 1 \times 0 + 1 \times (-2) = 2 + 0 - 2 = 0$.

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IGJ) : c'est donc un vecteur normal à ce plan.

2.b Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).

Un vecteur normal étant $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, une équation du plan (IGJ) est de la forme $-x + y + z + d = 0$.

Le point G(4 ; 4 ; 4) appartient au plan, donc $-4 + 4 + 4 + d = 0$, soit $d = -4$.

Donc, la réponse est $-x + y + z - 4 = 0$.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d , perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.

La droite d est dirigée par le vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et passe par $H(0; 4; 8)$, d'où la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 4 + t \\ z = 8 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4. On note L le projeté orthogonal de H sur le plan (IGJ). Montrer que L a pour coordonnées $\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

L est le point d'intersection de la droite d (perpendiculaire au plan et passant par H) avec le plan (IGJ). On cherche donc le paramètre t du point de d qui vérifie l'équation du plan.

$$-(-t) + (4 + t) + (8 + t) - 4 = 0 \iff 3t + 8 = 0 \iff t = -\frac{8}{3}.$$

En reportant dans la représentation paramétrique : $x = -\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$, $y = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$, $z = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$.

Donc, la réponse est $L\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

5. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).

La distance de H au plan (IGJ) est la longueur HL, où L est le projeté orthogonal de H sur ce plan.

Le repère étant orthonormé :

$$HL = \sqrt{\left(\frac{8}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{16}{3} - 8\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{3 \times \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

Donc, la réponse est $HL = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

6. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.

$$\vec{IG} \cdot \vec{IJ} = 2 \times (-2) + 4 \times 0 + (-2) \times (-2) = -4 + 0 + 4 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{IG}$ et $\vec{IJ}$ sont non nuls et orthogonaux, donc les droites (IG) et (IJ), sécantes en I, sont perpendiculaires. Donc, la réponse est que le triangle IGJ est rectangle en I.

7. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

Le triangle IGJ étant rectangle en I, son aire vaut $\mathcal{A} = \frac{IG \times IJ}{2}$, avec $IG = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ et $IJ = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$$\mathcal{A} = \frac{2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}.$$

En prenant IGJ pour base et H comme sommet, la hauteur du tétraèdre est la distance HL calculée en question 5, soit $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. Le volume vaut donc $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times HL = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{4 \times 8 \times 3}{9} = \frac{96}{9} = \frac{32}{3}$.

Donc, la réponse est $V = \frac{32}{3}$ (soit environ **10,7** unités de volume, au dixième près).

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 1)

1. ABCDEFGH est un cube d'arête 1, M est le centre de la face BCGF et N le centre de la face EFGH. Dans le repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$, donner sans justification les coordonnées de F et de C.

En suivant les arêtes du cube depuis D : $F(1; 1; 1)$ et $C(0; 1; 0)$.

2. Calculer les coordonnées de M et de N.

M est le centre de la face BCGF, donc le milieu du segment $[CF]$ (l'une des diagonales de cette face carrée) : $M\left(\frac{0+1}{2} ; \frac{1+1}{2} ; \frac{0+1}{2}\right)$, soit $M\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$.

N est le centre de la face EFGH, donc le milieu du segment $[FH]$, avec $H(1; 0; 0)$: $N\left(\frac{1+1}{2} ; \frac{1+0}{2} ; \frac{1+0}{2}\right)$, soit $N\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

3.a Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (HFC).

Les points H, F, C ne sont pas alignés, donc $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{CF}$ dirigent le plan (HFC), avec $\overrightarrow{HF} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (en utilisant $H(1; 0; 0)$).

De plus, avec $A(0; 0; 1)$ et $G(1; 1; 0)$, on a $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On calcule les produits scalaires : $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{HF} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CF} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 1 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (HFC) : **il est normal à ce plan.**

3.b En déduire une équation cartésienne du plan (HFC).

Le plan (HFC) passe par F(1;1;1) et admet $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal : un point $X(x; y; z)$ appartient à ce plan si et seulement si $\overrightarrow{FX} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$.

$$\overrightarrow{FX} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{FX} \cdot \overrightarrow{AG} = (x-1) + (y-1) - (z-1) = x + y - z - 1.$$

Le plan (HFC) a donc pour équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).

La droite (AG) passe par A(0;0;1) et admet $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur, d'où la représen-

$$\text{tation paramétrique : } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

5. Démontrer que le point R de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal de G sur le plan (HFC).

Le projeté orthogonal de G sur (HFC), qu'on note R, est l'unique point qui appartient à la fois au plan (HFC) et à la droite passant par G orthogonale à ce plan — or cette droite est justement (AG), puisque $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (question 3.a).

Les coordonnées de R vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de (AG) et l'équation du plan : $t + t - (1 - t) - 1 = 0$, soit $3t - 2 = 0$, donc $t = \frac{2}{3}$.

En reportant dans la représentation paramétrique : $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. On retrouve bien les coordonnées annoncées : **R est le projeté orthogonal de G sur (HFC).**

6. La droite (FG) admet pour représentation paramétrique $x = 1, y = 1, z = t$ ($t \in \mathbb{R}$). Démontrer qu'il existe un unique point K de (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.

Un point K de (FG) s'écrit $K(1; 1; t)$. Le triangle KMN est rectangle en K si et seulement si $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KN} = 0$.

$$\text{Avec } M\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) : \overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} - t \end{pmatrix}. \text{ Avec } N\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) : \overrightarrow{KN} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - t \end{pmatrix}.$$

$$\text{Le produit scalaire vaut } \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KN} = 0 + 0 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Cette expression s'annule si et seulement si $t = \frac{1}{2}$: il existe donc un **unique** point K, de coordonnées $\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$, tel que KMN soit rectangle en K.

7. Quelle fraction du volume du cube ABCDEFGH le volume du tétraèdre FNKM représente-t-il ?

Le tétraèdre FNKM admet pour base le triangle rectangle KMN et pour hauteur associée la distance FK, puisque $F(1; 1; 1)$ et $K\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$ ont la même abscisse et la même ordonnée : $FK = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

Dans le triangle KMN rectangle en K : $KM = \left\|\overrightarrow{KM}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 0^2} = \frac{1}{2}$ et de même $KN = \frac{1}{2}$. Son aire vaut donc $\frac{KM \times KN}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$.

Le volume d'un tétraèdre étant $\frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$, celui de FNKM vaut $\frac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{48}$.

Le cube ayant pour volume $1^3 = 1$ (unité de volume), le tétraèdre FNKM représente donc $\frac{1}{48}$ du volume du cube.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 2)

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère le point $A(1; 1; 0)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, ainsi que la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Déterminer une représentation paramétrique de (d).

Un point $M(x; y; z)$ appartient à (d) si et seulement si $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ pour un certain réel t , ce qui

$$\text{donne la représentation paramétrique } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 4y + 2z + 1 = 0$. Justifier que la droite (d) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un point B de coordonnées $(1; -1; 1)$.

En substituant les coordonnées paramétriques de (d) dans l'équation de $\mathcal{P}$: $1 + 4(1 + 2t) + 2(-t) + 1 = 0$, soit $1 + 4 + 8t - 2t + 1 = 0$, c'est-à-dire $6t + 6 = 0$, d'où $t = -1$.

En reportant $t = -1$ dans la représentation paramétrique de (d) : $x = 1$, $y = 1 - 2 = -1$, $z = 1$. Le système admet donc une unique solution, ce qui montre que (d) et $\mathcal{P}$ sont sécants, au point B(1 ; -1 ; 1).

3.a On considère le point C(1 ; -1 ; -1). Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ont la même première et la même deuxième coordonnée mais des troisièmes coordonnées différentes ($1 \neq -1$) : ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et définissent bien un plan (ABC).

3.b Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

On calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 0 + 0 \times (-2) + 0 \times 1 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 0 + 0 \times (-2) + 0 \times (-1) = 0$. Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il lui est normal.

3.c Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Le plan (ABC) admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal, donc une équation de la forme $x + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$. Comme A(1 ; 1 ; 0) appartient au plan : $1 + d = 0$, soit $d = -1$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $x - 1 = 0$.

4.a Justifier que le triangle ABC est isocèle en A.

On a $AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 0^2 + (-2)^2 + 1^2 = 5$ et $AC^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2 = 5$. Donc $AB^2 = AC^2$, c'est-à-dire $AB = AC$: le triangle ABC est isocèle en A.

4.b Soit H le milieu du segment [BC]. Calculer la longueur AH puis l'aire du triangle ABC.

Les coordonnées de H sont la moyenne de celles de B et C : $H \left(\frac{1+1}{2} ; \frac{-1-1}{2} ; \frac{1-1}{2} \right)$, soit H(1 ; -1 ; 0).

On obtient $AH^2 = (1-1)^2 + (-1-1)^2 + (0-0)^2 = 4$, d'où $AH = 2$.

Le triangle ABC étant isocèle en A, la médiane issue de A est aussi la hauteur relative au côté [BC], donc $\mathcal{A}(ABC) = \frac{BC \times AH}{2}$. Or $BC^2 = (1-1)^2 + (-1+1)^2 + (-1-1)^2 = 4$, d'où $BC = 2$.

Donc, la réponse est $\mathcal{A}(ABC) = \frac{2 \times 2}{2} = 2$ unité d'aire.

5.a Soit D le point de coordonnées (0 ; -1 ; 1). Montrer que la droite (BD) est une hauteur de la pyramide ABCD.

On calcule $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BD} = -\vec{n}$. Comme $\vec{n}$ est normal au plan (ABC), $\overrightarrow{BD}$ l'est aussi : la droite (BD), orthogonale au plan de base (ABC) et passant par le sommet D, est donc bien une hauteur de la pyramide ABCD.

5.b En déduire le volume de la pyramide ABCD (on rappelle que le volume d'une pyramide vaut $V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée).

On prend pour base le triangle (ABC), d'aire $\mathcal{A}(ABC) = 2$, et pour hauteur la longueur BD.

$BD^2 = \|\overrightarrow{BD}\|^2 = (-1)^2 + 0^2 + 0^2 = 1$, donc $BD = 1$.

Donc, la réponse est $V(ABCD) = \frac{1}{3} \times 2 \times 1 = \frac{2}{3}$ unité de volume.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 1)

1. On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1, muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Donner les coordonnées des points E, C et G dans ce repère.

En suivant les arêtes du cube depuis A : E $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et G $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: c'est un vecteur directeur de la droite (EC), qui passe par E(0 ; 0 ; 1).

Donc, la réponse est : (EC) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

Les points G, B, D ne sont pas alignés, donc (GBD) est un plan, dirigé par exemple par $\overrightarrow{GB} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{GB} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) = 0 - 1 + 1 = 0, \text{ donc } \overrightarrow{EC} \perp \overrightarrow{GB}.$$

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + (-1) \times 0 = -1 + 1 + 0 = 0, \text{ donc } \overrightarrow{EC} \perp \overrightarrow{BD}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (GBD), donc la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

4.a Justifier qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est $x + y - z - 1 = 0$.

Comme (EC) est orthogonale à (GBD), tout vecteur directeur de (EC) est un vecteur normal à (GBD); en particulier $\overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient.

Le plan (GBD) a donc une équation de la forme $x + y - z + d = 0$. En écrivant que B(1 ; 0 ; 0) appartient à ce plan : $1 + 0 - 0 + d = 0$, donc $d = -1$.

Donc, la réponse est : le plan (GBD) a pour équation $x + y - z - 1 = 0$.

4.b Montrer que le point I, intersection de (EC) et (GBD), a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Les coordonnées de I vérifient à la fois la représentation paramétrique de (EC) et l'équation de (GBD) : $x = t, y = t, z = 1 - t$ et $x + y - z - 1 = 0$.

$$\text{En substituant : } t + t - (1 - t) - 1 = 0 \iff 3t - 2 = 0 \iff t = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Donc, la réponse est : } I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right), \text{ car } x_I = t = \frac{2}{3}, y_I = t = \frac{2}{3} \text{ et } z_I = 1 - t = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

4.c En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

La droite (EC) étant orthogonale au plan (GBD) et le coupant en I, la distance de E au plan (GBD) est la longueur EI.

$$EI^2 = \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

$$EI = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \text{ Donc, la réponse est : la distance de E au plan (GBD) vaut } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

5.a Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.

Les segments $[BD]$, $[DG]$ et $[GB]$ sont chacun la diagonale d'une face du cube (respectivement ABCD, CDHG et BCGF), qui sont trois carrés de même côté 1, donc superposables. Leurs diagonales ont donc toutes la même longueur $\sqrt{2}$: le triangle BDG, ayant ses trois côtés égaux, est équilatéral.

5.b Calculer l'aire du triangle BDG, en utilisant le point J milieu de $[BD]$.

Dans un triangle équilatéral, la médiane issue d'un sommet est aussi la hauteur : $[GJ]$ est donc la hauteur issue de G, et l'aire du triangle vaut $\mathcal{A} = \frac{BD \times GJ}{2}$.

$B(1 ; 0 ; 0)$ et $D(0 ; 1 ; 0)$ donnent $J\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 0\right)$, milieu de $[BD]$.

$$GJ^2 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (0 - 1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}, \text{ donc } GJ = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$[BD]$ est la diagonale d'un carré de côté 1, donc $BD = \sqrt{2}$.

$$\text{Donc, la réponse est : } \mathcal{A} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6. Justifier que le volume du tétraèdre EGBD est égal à $\frac{1}{3}$.

En prenant le triangle BDG comme base, d'aire $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et EI comme hauteur associée (E est le sommet opposé, et EI est la distance de E au plan de la base), le volume vaut $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times EI = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 3}{6} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$. Donc, la réponse est : le volume du tétraèdre EGBD vaut $\frac{1}{3}$.

Bac Terminale 2023 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

1. On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1, muni du repère orthonormé $(A ; \vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AE})$, et K le milieu de $[HG]$. Justifier que les points C, F et K définissent un plan.

Dans ce repère : $A(0 ; 0 ; 0)$, $D(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 1 ; 0)$, $E(0 ; 0 ; 1)$.

Donc $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{AB}$ donne $C(1 ; 1 ; 0)$, $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AE}$ donne $F(0 ; 1 ; 1)$, et $\vec{AH} = \vec{AD} + \vec{AE}$, $\vec{AG} = \vec{AD} + \vec{AB} + \vec{AE}$ donnent $H(1 ; 0 ; 1)$ et $G(1 ; 1 ; 1)$.

K est le milieu de $[HG]$ donc $K\left(1 ; \frac{1}{2} ; 1\right)$.

On a $\vec{CF} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{CK} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (aucun coefficient ne convertit l'un en l'autre).

Donc les points C, F et K ne sont pas alignés : ils définissent bien un plan.

2.a Donner, sans justification, les longueurs KG, GF et GC.

$KG = \frac{1}{2}$, $GF = 1$ et $GC = 1$ (déplacements le long des arêtes ou des diagonales de faces du cube d'arête 1).

2.b Calculer l'aire du triangle FGC.

Le triangle FGC est rectangle en G (deux arêtes du cube perpendiculaires), donc son aire vaut $\mathcal{A} = \frac{GF \times GC}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ unité d'aire.

2.c Calculer le volume du tétraèdre FGCK, sachant que le volume d'un tétraèdre vaut $V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée.

En prenant pour base le triangle FGC (aire $\frac{1}{2}$) et pour hauteur $KG = \frac{1}{2}$ (K étant sur la droite (GH) , perpendiculaire au plan (FGC)) : $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ unité de volume.

3.a On pose $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (CFK).

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{CF} = 1 \times (-1) + 2 \times 0 + 1 \times 1 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{CF}.$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{CK} = 1 \times 0 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times 1 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{CK}.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CFK) : c'est donc un vecteur normal à ce plan.

3.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (CFK) est $x + 2y + z - 3 = 0$.

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient au plan (CFK) si et seulement si $\overrightarrow{CM} \cdot \vec{n} = 0$, avec $\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}$
(car $C(1 ; 1 ; 0)$).

$$\overrightarrow{CM} \cdot \vec{n} = 0 \iff (x-1) + 2(y-1) + z = 0 \iff x + 2y + z - 3 = 0.$$

Donc, la réponse est : le plan (CFK) a pour équation cartésienne $x + 2y + z - 3 = 0$.

4. On note Δ la droite passant par G et orthogonale au plan (CFK). Démontrer qu'une représentation paramétrique de Δ est $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 + t$ (avec $t \in \mathbb{R}$).

Δ étant orthogonale au plan (CFK), elle admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur, et elle passe par $G(1 ; 1 ; 1)$.

$M(x ; y ; z) \in \Delta \iff \overrightarrow{GM} = t\vec{n}$ pour un réel t , c'est-à-dire $x - 1 = t$, $y - 1 = 2t$, $z - 1 = t$.

Donc, la réponse est : Δ a pour représentation paramétrique $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 + t$, $t \in \mathbb{R}$.

5.a Soit L le point d'intersection de Δ et du plan (CFK). Déterminer les coordonnées de L.

Les coordonnées de L vérifient à la fois le système paramétrique de Δ et l'équation du plan (CFK) :
 $(1 + t) + 2(1 + 2t) + (1 + t) - 3 = 0$.

Cela donne $1 + t + 2 + 4t + 1 + t - 3 = 0$, soit $6t + 1 = 0$, donc $t = -\frac{1}{6}$.

On en tire $x = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, $y = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$, $z = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} : L \left(\frac{5}{6} ; \frac{2}{3} ; \frac{5}{6} \right)$.

5.b En déduire que $LG = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

$$\begin{aligned} LG &= \sqrt{(x_G - x_L)^2 + (y_G - y_L)^2 + (z_G - z_L)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{6}{36}} = \frac{\sqrt{6}}{6}. \end{aligned}$$

Donc, la réponse est : $LG = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

6. En utilisant la question précédente, déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle CFK.

Le tétraèdre FGCK admet aussi pour base le triangle CFK, d'aire $\mathcal{B}$, et pour hauteur associée LG (puisque $(GL) \perp (\text{CFK})$) : son volume vaut donc $\frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times LG$.

Ce volume valant $\frac{1}{12}$ (question 2.c) : $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{18} \mathcal{B}$.

$$\text{D'où } \mathcal{B} = \frac{18}{12\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Donc, la réponse est : l'aire du triangle CFK vaut $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 1)

1.a. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère la droite d_1 passant par $H(2; 3; 0)$ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et la droite d_2 de représentation paramétrique $x = 2k - 3, y = k, z = 5$ ($k \in \mathbb{R}$). Donner un vecteur directeur $\vec{v}$ de d_2 .

Les coefficients de k dans les coordonnées de d_2 fournissent un vecteur directeur : $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (obtenu en prenant $k = 0$ puis $k = 1$, ce qui donne les points $(-3; 0; 5)$ et $(-1; 1; 5)$, de vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$).

1.b. Montrer que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont clairement pas colinéaires (il n'existe pas de réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, car la troisième coordonnée de $\vec{v}$ est nulle alors que celle de $\vec{u}$ ne l'est pas). Donc, la réponse est que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

1.c. Montrer que d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

Une représentation paramétrique de d_1 est $x = 2 + t, y = 3 - t, z = t$ ($t \in \mathbb{R}$). Un point commun à d_1 et d_2 vérifierait $2 + t = 2k - 3, 3 - t = k$ et $t = 5$.

La troisième équation donne $t = 5$, la deuxième donne $k = 3 - 5 = -2$. En reportant dans la première : $2 + 5 = 7$ d'une part, et $2 \times (-2) - 3 = -7$ d'autre part : $7 \neq -7$, contradiction.

Donc, la réponse est que d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

1.d. Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ?

Deux droites non parallèles et non sécantes ne peuvent pas être coplanaires. Donc, la réponse est que d_1 et d_2 sont non coplanaires.

2.a. Vérifier que le vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

On calcule les produits scalaires : $\vec{w} \cdot \vec{u} = -1 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 1 = -1 - 2 + 3 = 0$ et $\vec{w} \cdot \vec{v} = -1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$. Donc, la réponse est que $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

2.b. Soit P le plan passant par H et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{w}$; on admet que P a pour équation cartésienne $5x + 4y - z - 22 = 0$. Montrer que P coupe d_2 au point $M(3 ; 3 ; 5)$.

Un point de d_2 (de coordonnées $x = 2k - 3$, $y = k$, $z = 5$) appartient à P si $5(2k - 3) + 4k - 5 - 22 = 0$, soit $10k - 15 + 4k - 27 = 0$, c'est-à-dire $14k = 42$ donc $k = 3$.

Pour $k = 3$, on obtient $x = 2 \times 3 - 3 = 3$, $y = 3$, $z = 5$. Donc, la réponse est que le point d'intersection est bien $M(3 ; 3 ; 5)$.

3.a. Soit Δ la droite de vecteur directeur $\vec{w}$ passant par M , de représentation paramétrique $x = -r + 3$, $y = 2r + 3$, $z = 3r + 5$ ($r \in \mathbb{R}$). Justifier que Δ et d_1 sont perpendiculaires en un point L dont on donnera les coordonnées.

Les vecteurs directeurs $\vec{w}$ et $\vec{u}$ de Δ et d_1 sont orthogonaux (question 2.a), donc si ces deux droites se coupent, elles sont perpendiculaires.

Un point commun vérifierait (avec la représentation $x = 2 + t$, $y = 3 - t$, $z = t$ de d_1) : $2 + t = -r + 3$, $3 - t = 2r + 3$, $t = 3r + 5$.

En reportant $t = 3r + 5$ dans la deuxième équation : $3 - (3r + 5) = 2r + 3 \iff -3r - 2 = 2r + 3 \iff -5 = 5r \iff r = -1$, d'où $t = 3 \times (-1) + 5 = 2$.

On vérifie la première équation : $2 + 2 = 4$ et $-(-1) + 3 = 4$: l'égalité est vérifiée, donc les droites se coupent bien.

En remplaçant $t = 2$ dans les coordonnées de d_1 , on obtient le point d'intersection $L(4 ; 1 ; 2)$. Donc, la réponse est que Δ et d_1 sont perpendiculaires au point $L(4 ; 1 ; 2)$.

3.b. Expliquer pourquoi Δ résout le problème posé (trouver une droite perpendiculaire commune à d_1 et d_2).

La droite Δ passe par M , point d'intersection avec d_2 , avec un vecteur directeur $\vec{w}$ orthogonal à celui de d_2 : Δ est donc perpendiculaire à d_2 . Elle passe aussi par L , point d'intersection avec d_1 , avec $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$: Δ est donc aussi perpendiculaire à d_1 . Donc, la réponse est que Δ est bien la perpendiculaire commune à d_1 et d_2 recherchée.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 2)

1.a Une salle d'exposition est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH, muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associé aux dimensions de la pièce, avec $A(6 ; 0 ; 2)$, $R(6 ; 3 ; 4)$ et $T(3 ; 0 ; 4)$. Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.

$$\overrightarrow{AR} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AT} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$AR = \sqrt{0^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{ et } AT = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Comme $AR = AT$, le triangle ART est isocèle en A.

1.b Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT}$.

$$\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = 0 \times (-3) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 0 + 0 + 4 = 4.$$

1.c En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.

$$\text{D'après la formule du produit scalaire : } \overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = AR \times AT \times \cos(\widehat{RAT}), \text{ donc } \cos(\widehat{RAT}) = \frac{4}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}} = \frac{4}{13}.$$

$$\text{Donc, } \widehat{RAT} = \arccos\left(\frac{4}{13}\right) \approx 72,1^\circ.$$

2.a Justifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ART).

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AR} = 2 \times 0 + (-2) \times 3 + 3 \times 2 = 0 - 6 + 6 = 0.$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AT} = 2 \times (-3) + (-2) \times 0 + 3 \times 2 = -6 + 0 + 6 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$, deux vecteurs non colinéaires du plan (ART) : donc, $\vec{n}$ est normal au plan (ART).

2.b En déduire une équation cartésienne du plan (ART).

Le plan (ART), de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, a une équation de la forme $2x - 2y + 3z + d = 0$.

$$\text{Comme } A(6; 0; 2) \text{ appartient au plan : } 2 \times 6 - 2 \times 0 + 3 \times 2 + d = 0 \iff 12 + 6 + d = 0 \iff d = -18.$$

Donc, une équation cartésienne du plan (ART) est $2x - 2y + 3z - 18 = 0$.

3.a Un rayon laser orthogonal au plan (ART) est émis du point S de coordonnées $\left(3; \frac{5}{2}; 0\right)$. Justifier que le système $x = 3 + 2k$, $y = \frac{5}{2} - 2k$, $z = 3k$ ($k \in \mathbb{R}$) est une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ART) passant par S.

La droite Δ , orthogonale au plan (ART), admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur ; elle passe par

$S\left(3; \frac{5}{2}; 0\right)$. Une représentation paramétrique de Δ est donc $x = 3 + 2k$, $y = \frac{5}{2} - 2k$, $z = 0 + 3k$, soit $x = 3 + 2k$, $y = \frac{5}{2} - 2k$, $z = 3k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

3.b Soit **L** le point d'intersection de Δ et du plan (ART). Démontrer que **L** a pour coordonnées $\left(5 ; \frac{1}{2} ; 3\right)$.

On remplace les coordonnées paramétriques dans l'équation du plan (ART) : $2(3+2k)-2\left(\frac{5}{2}-2k\right)+3 \times 3k-18=0$.

En développant : $6+4k-5+4k+9k-18=0 \iff 17k-17=0 \iff k=1$.

En remplaçant $k=1$: $x=3+2=5$, $y=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$, $z=3$.

Donc, **L** a pour coordonnées $\left(5 ; \frac{1}{2} ; 3\right)$.

4.a Un rail est représenté par le segment [DK], où **K** est le milieu de [EH] et **D**(0 ; 8 ; 0). Montrer que, pour tout réel t de $[0 ; 1]$, le point **N** de coordonnées $(0 ; 8-4t ; 4t)$ appartient au segment [DK].

Avec **E**(0 ; 0 ; 4) et **H**(0 ; 8 ; 4), le milieu **K** de [EH] a pour coordonnées $(0 ; 4 ; 4)$.

$\overrightarrow{DK} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DN} \begin{pmatrix} 0 \\ -4t \\ 4t \end{pmatrix}$: on remarque que $\overrightarrow{DN} = t \times \overrightarrow{DK}$, donc **D**, **N** et **K** sont alignés.

Comme $t \in [0 ; 1]$, le point **N** se situe entre **D** (obtenu pour $t=0$) et **K** (obtenu pour $t=1$) : **N** appartient donc bien au segment [DK].

4.b Calculer les coordonnées exactes du point **N** pour lesquelles les rayons laser représentés par [SL] et [SN] sont perpendiculaires.

$\overrightarrow{SL} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SN} \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{11}{2}-4t \\ 4t \end{pmatrix}$.

Les segments [SL] et [SN] sont perpendiculaires si, et seulement si, $\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SN} = 0$: $2 \times (-3) + (-2) \times \left(\frac{11}{2}-4t\right) + 3 \times 4t = 0$.

En développant : $-6-11+8t+12t=0 \iff 20t-17=0 \iff t=\frac{17}{20}$.

En remplaçant dans les coordonnées de **N** : $x=0$, $y=8-4 \times \frac{17}{20}=\frac{23}{5}$, $z=4 \times \frac{17}{20}=\frac{17}{5}$.

Donc, **N** a pour coordonnées $\left(0 ; \frac{23}{5} ; \frac{17}{5}\right)$.

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 1)

1. ABCDEFGH est un cube. Dans le repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne $B(3 ; 0 ; 0)$, $D(0 ; 3 ; 0)$, $E(0 ; 0 ; 3)$, et on considère les points $P(0 ; 0 ; 1)$, $Q(0 ; 2 ; 3)$ et $R(1 ; 0 ; 3)$. Placer les points P, Q et R sur la figure du cube.

P est sur l'arête [AE] (à un tiers de A en partant vers E), Q est sur la face (DHGC)... plus précisément Q se place à partir de E en avançant de 2 selon $\vec{j}$ et en montant de 3 selon $\vec{k}$ à partir de A, et R se place à 1 selon $\vec{i}$ et 3 selon $\vec{k}$: les trois points sont sur les faces du cube, respectivement sur l'arête [AE] pour P, et sur les faces supérieures pour Q et R (voir figure en annexe du sujet).

2. Montrer que le triangle PQR est isocèle en R.

$$\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$RP^2 = \|\overrightarrow{RP}\|^2 = (-1)^2 + 0^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5 \text{ et } RQ^2 = \|\overrightarrow{RQ}\|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 0^2 = 1 + 4 = 5.$$

Donc $RP = RQ = \sqrt{5}$: **le triangle PQR est isocèle en R.**

3. Justifier que les points P, Q et R définissent un plan.

Les coordonnées de $\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnelles (par exemple $0 \times 0 \neq (-2) \times 2$), donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : **les points P, Q et R ne sont pas alignés et définissent donc un plan.**

4.a Montrer que le vecteur $\vec{u}(2 ; 1 ; -1)$ est normal au plan (PQR).

En posant $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (deux vecteurs non colinéaires du plan (PQR)) : $\overrightarrow{PR} \cdot \vec{u} = 1 \times 2 + 0 \times 1 + 2 \times (-1) = 2 + 0 - 2 = 0$.

$$\overrightarrow{QR} \cdot \vec{u} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + 0 \times (-1) = 2 - 2 + 0 = 0.$$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQR), donc $\vec{u}(2 ; 1 ; -1)$ **est normal au plan (PQR).**

4.b En déduire une équation cartésienne du plan (PQR).

Le plan (PQR) admet $\vec{u}(2 ; 1 ; -1)$ pour vecteur normal, donc une équation de la forme $2x + y - z = d$. Comme $P(0 ; 0 ; 1) \in (PQR)$, on a $2 \times 0 + 0 - 1 = d$, soit $d = -1$. Donc, la réponse est que le plan (PQR) a pour équation cartésienne $2x + y - z = -1$.

4.c Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point E et orthogonale au plan (PQR).

La droite (d) est orthogonale au plan (PQR), donc dirigée par le vecteur normal $\vec{u}(2 ; 1 ; -1)$.

Comme elle passe par $E(0 ; 0 ; 3)$, une représentation paramétrique de (d) est :
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases},$$

$t \in \mathbb{R}$.

4.d Montrer que le point $L\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{8}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR).

Le projeté orthogonal de E sur (PQR) est l'unique point appartenant à la fois à la droite (d) et au plan (PQR). Il suffit donc de résoudre le système formé par la représentation paramétrique de (d) et l'équation de (PQR).

En substituant $x = 2t$, $y = t$, $z = 3 - t$ dans $2x + y - z = -1$: $2(2t) + t - (3 - t) = -1 \iff 4t + t - 3 + t = -1 \iff 6t = 2 \iff t = \frac{1}{3}$.

On obtient alors $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ et $z = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$, ce qui correspond bien aux coordonnées de L. Donc, la réponse est que **L est le projeté orthogonal de E sur le plan (PQR).**

4.e Déterminer la distance entre le point E et le plan (PQR).

$$\overrightarrow{EL} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - 0 \\ \frac{1}{3} - 0 \\ \frac{8}{3} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$EL^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

La distance de E au plan (PQR) est $EL = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

5. En choisissant le triangle EQR comme base, montrer que le volume du tétraèdre EPQR est $\frac{2}{3}$ (on rappelle que le volume d'un tétraèdre est $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur correspondante}$).

$$\overrightarrow{EQ} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{ER} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux (leur produit scalaire vaut 0) : le triangle EQR est rectangle}$$

$$\text{en E, d'aire } \mathcal{A}(\text{EQR}) = \frac{EQ \times ER}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1.$$

En prenant EQR comme base, la hauteur correspondante est la distance du point P au plan (EQR),

c'est-à-dire $PE : \overrightarrow{PE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $PE = 2$ (P et E ont même abscisse et ordonnée, seule l'altitude diffère).

$$\text{Donc } V(\text{EPQR}) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{EQR}) \times PE = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 = \frac{2}{3}.$$

6. À l'aide des deux questions précédentes, trouver l'aire du triangle PQR.

Le volume du tétraèdre EPQR peut aussi s'exprimer avec (PQR) comme base et EL comme hauteur correspondante : $V(\text{EPQR}) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{PQR}) \times EL$.

$$\text{On a donc } \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{PQR}) \times \frac{\sqrt{6}}{3} \iff \mathcal{A}(\text{PQR}) = \frac{2 \times 3}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Donc, la réponse est que l'aire du triangle PQR est $\sqrt{6}$ (en unités d'aire).

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 2)

1.a Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points A(-3 ; 1 ; 3), B(2 ; 2 ; 3), C(1 ; 7 ; -1), D(-4 ; 6 ; -1) et K(-3 ; 14 ; 14). Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

On calcule chaque vecteur en soustrayant les coordonnées de l'origine à celles de l'extrémité :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - (-3) \\ 2 - 1 \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De même, } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 1 - (-4) \\ 7 - 6 \\ -1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Enfin, } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -4 - (-3) \\ 6 - 1 \\ -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc, la réponse est } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1.b Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

D'après la question précédente, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme.

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5 \times (-1) + 1 \times 5 + 0 \times (-4) = -5 + 5 + 0 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont donc orthogonaux : le parallélogramme ABCD possède deux côtés consécutifs perpendiculaires.

Donc, la réponse est que ABCD est un rectangle.

1.c Calculer l'aire du rectangle ABCD.

On calcule les longueurs des côtés à l'aide des normes des vecteurs : $AB^2 = 5^2 + 1^2 + 0^2 = 26$, donc $AB = \sqrt{26}$.

De même, $AD^2 = (-1)^2 + 5^2 + (-4)^2 = 1 + 25 + 16 = 42$, donc $AD = \sqrt{42}$.

L'aire du rectangle ABCD vaut $AB \times AD = \sqrt{26} \times \sqrt{42} = \sqrt{26 \times 42} = \sqrt{1092}$.

En factorisant, $1092 = 4 \times 273$, donc $\sqrt{1092} = 2\sqrt{273}$.

Donc, la réponse est $\mathcal{A}(\text{ABCD}) = 2\sqrt{273}$ (unité d'aire).

2.a Justifier que les points A, B et D définissent un plan.

D'après la question 1.a, les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ ne sont clairement pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles), donc les points A, B et D ne sont pas alignés. Donc, la réponse est qu'ils définissent bien un plan.

2.b Montrer que le vecteur $\vec{n}(-2 ; 10 ; 13)$ est un vecteur normal au plan (ABD).

On calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 \times 5 + 10 \times 1 + 13 \times 0 = -10 + 10 + 0 = 0$.

On calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = -2 \times (-1) + 10 \times 5 + 13 \times (-4) = 2 + 50 - 52 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD), $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Donc, la réponse est que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABD).

2.c En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).

Le plan (ABD) admet $\vec{n}(-2 ; 10 ; 13)$ pour vecteur normal, donc il a une équation de la forme $-2x + 10y + 13z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Le point $B(2 ; 2 ; 3)$ appartient au plan (ABD), donc ses coordonnées vérifient cette équation : $-2 \times 2 + 10 \times 2 + 13 \times 3 = d$, soit $-4 + 20 + 39 = d$, donc $d = 55$.

Donc, la réponse est que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $-2x + 10y + 13z = 55$.

3.a Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ABD) et qui passe par le point K(-3 ; 14 ; 14).

La droite Δ , orthogonale au plan (ABD), admet le vecteur normal $\vec{n}(-2 ; 10 ; 13)$ comme vecteur directeur, et elle passe par le point K.

$$\text{Donc, la réponse est } \Delta : \begin{cases} x = -2t - 3 \\ y = 10t + 14 \\ z = 13t + 14 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

3.b Déterminer les coordonnées du point I, projeté orthogonal du point K sur le plan (ABD).

Le point I, projeté orthogonal de K sur le plan (ABD), est l'unique point d'intersection de la droite Δ (perpendiculaire au plan et passant par K) avec ce plan.

On remplace les coordonnées paramétriques de Δ dans l'équation du plan (ABD) : $-2(-2t - 3) + 10(10t + 14) + 13(13t + 14) = 55$.

Cela donne $4t + 6 + 100t + 140 + 169t + 182 = 55$, soit $273t + 328 = 55$, donc $273t = -273$, d'où $t = -1$.

En reportant $t = -1$ dans le système paramétrique : $x = -2 \times (-1) - 3 = 2 - 3 = -1$, $y = 10 \times (-1) + 14 = 4$ et $z = 13 \times (-1) + 14 = 1$.

Donc, la réponse est $I(-1 ; 4 ; 1)$.

3.c Montrer que la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD et de sommet K vaut $\sqrt{273}$.

ABCD est un rectangle (question 1.b), donc le point D appartient bien au plan (ABD). La hauteur de la pyramide KABCD, relative à la base ABCD, est donc la longueur KI, où I est le projeté orthogonal de K sur ce plan.

$$\overrightarrow{KI} \begin{pmatrix} -1 - (-3) \\ 4 - 14 \\ 1 - 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -13 \end{pmatrix}, \text{ donc } KI^2 = 2^2 + (-10)^2 + (-13)^2 = 4 + 100 + 169 = 273.$$

Donc, la réponse est $KI = \sqrt{273}$.

4. Calculer le volume V de la pyramide KABCD. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.

On applique la formule avec l'aire de la base ABCD (question 1.c) et la hauteur KI (question 3.c) :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{ABCD}) \times KI = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{273} \times \sqrt{273}.$$

$$\text{Or } \sqrt{273} \times \sqrt{273} = 273, \text{ donc } V = \frac{1}{3} \times 2 \times 273 = \frac{546}{3} = 182.$$

Donc, la réponse est $V = 182$ (unité de volume).

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

1.a Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne $A(2; 0; 3)$, $B(0; 2; 1)$, $C(-1; -1; 2)$ et $D(3; -3; -1)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles :

$$\frac{-2}{-3} \neq \frac{2}{-1}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

1.b Calculer les longueurs AB et AC.

$$AB^2 = (-2)^2 + 2^2 + (-2)^2 = 4 + 4 + 4 = 12, \text{ donc } AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$AC^2 = (-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 9 + 1 + 1 = 11, \text{ donc } AC = \sqrt{11}.$$

1.c À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$, puis une valeur approchée de sa mesure au dixième de degré.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \times (-3) + 2 \times (-1) + (-2) \times (-1) = 6 - 2 + 2 = 6.$$

$$\text{Or, par définition du produit scalaire, } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

$$\text{Donc } 6 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{11} \times \cos(\widehat{BAC}) \iff \cos(\widehat{BAC}) = \frac{6}{2\sqrt{33}} = \frac{3}{\sqrt{33}}.$$

La calculatrice donne alors $\widehat{BAC} \approx 58,5^\circ$ au dixième de degré près.

2.a Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, puisque $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Avec $\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix}$, cette condition s'écrit $-2(x+1) + 2(y+1) - 2(z-2) = 0$.

En divisant par -2 : $(x+1) - (y+1) + (z-2) = 0 \iff x - y + z - 2 = 0$.

Une équation du plan $\mathcal{P}$ est donc $x - y + z - 2 = 0$.

2.b Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

La droite (AB) passe par A(2 ; 0 ; 3) et admet $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, ou plus simplement le vecteur colinéaire $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, comme vecteur directeur.

Une représentation paramétrique de (AB) est donc :
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2.c En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathcal{P}$.

Les coordonnées de E vérifient à la fois l'équation de $\mathcal{P}$ et la représentation paramétrique de (AB).

On remplace x, y, z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation de $\mathcal{P}$:

$$(2-t) - t + (3-t) - 2 = 0 \iff 3 - 3t = 0 \iff t = 1.$$

En remplaçant $t = 1$ dans la représentation paramétrique : $x = 2 - 1 = 1, y = 1, z = 3 - 1 = 2$.

Donc, E a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).

2.d Calculer l'aire du triangle ABC.

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } BC^2 = (-1)^2 + (-3)^2 + 1^2 = 1 + 9 + 1 = 11, \text{ d'où } BC = \sqrt{11}.$$

Comme $AC = BC = \sqrt{11}$, le triangle ABC est isocèle en C. Puisque E est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), le segment [CE] est donc la hauteur issue de C dans ce triangle isocèle.

$$\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } CE^2 = 2^2 + 2^2 + 0^2 = 8, \text{ d'où } CE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{L'aire du triangle ABC vaut donc } \mathcal{A}(\text{ABC}) = \frac{AB \times CE}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}.$$

3.a Soit le point F(1 ; -1 ; 3). Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.

Les points A, B, C, F sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Le système à résoudre, en utilisant les deux premières coordonnées, est } \begin{cases} -1 = -2\alpha - 3\beta \\ -1 = 2\alpha - \beta \end{cases}.$$

De la deuxième équation, $\beta = 2\alpha + 1$. En reportant dans la première : $-1 = -2\alpha - 3(2\alpha + 1) = -2\alpha - 6\alpha - 3 = -8\alpha - 3$, d'où $8\alpha = -2$, soit $\alpha = -\frac{1}{4}$, puis $\beta = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{1}{2}$.

On vérifie avec la troisième coordonnée : $\alpha \times (-2) + \beta \times (-1) = -\frac{1}{4} \times (-2) + \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, ce qui correspond bien à la troisième coordonnée de $\overrightarrow{AF}$, qui vaut 0.

Donc $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$: les points A, B, C et F sont coplanaires.

3.b Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

$$\overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ (puisque D(3 ; -3 ; -1) et F(1 ; -1 ; 3)).}$$

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-2) + (-2) \times 2 + (-4) \times (-2) = -4 - 4 + 8 = 0.$$

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-3) + (-2) \times (-1) + (-4) \times (-1) = -6 + 2 + 4 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), donc il est orthogonal à ce plan : la droite (FD) est bien orthogonale au plan (ABC).

3.c Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multipliée par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Prenons pour base le triangle ABC, d'aire $\mathcal{A}(\text{ABC}) = 2\sqrt{6}$ (question 2.d). Comme (FD) est orthogonale au plan (ABC) et que F appartient à ce plan (question 3.a), la longueur FD est la hauteur du tétraèdre relative à cette base.

$$FD^2 = 2^2 + (-2)^2 + (-4)^2 = 4 + 4 + 16 = 24, \text{ donc } FD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Le volume du tétraèdre ABCD est donc } \mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{ABC}) \times FD = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} = \frac{4 \times 6}{3} = 8.$$

Donc, le volume du tétraèdre ABCD vaut **8** (en unités de volume).

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

1.a Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathbf{O} ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $\mathbf{A}(-1 ; 1 ; 3)$

et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
 On admet que $\mathbf{A}$ n'appartient pas à $\mathcal{D}$. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$.

En lisant les coefficients de t dans la représentation paramétrique, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1.b Montrer que le point $\mathbf{B}(-1 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

$$\mathbf{B} \text{ appartient à } \mathcal{D} \text{ si, et seulement si, il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ 3 = 2 - t \\ 0 = 2 + 2t \end{cases}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\begin{cases} 2t = -2 \\ -t = 1 \\ 2t = -2 \end{cases}, \text{ ce qui donne } t = -1 \text{ dans chacune des trois équations. Cette valeur commune } t = -1$$

existe bien, donc **$\mathbf{B}$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.**

1.c Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \vec{u}$.

$$\text{Avec } \mathbf{A}(-1 ; 1 ; 3) \text{ et } \mathbf{B}(-1 ; 3 ; 0), \text{ on a } \overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \text{ Donc } \overrightarrow{\text{AB}} \cdot \vec{u} = 0 \times 2 + 2 \times (-1) + (-3) \times 2 =$$

$$0 - 2 - 6 = -8.$$

2.a On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A et orthogonal à $\mathcal{D}$, et H le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$ (H est donc le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$). Montrer que $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $2x - y + 2z - 3 = 0$.

Le plan $\mathcal{P}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$, donc le vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{D}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc de la forme $2x - y + 2z + d = 0$. Comme $A(-1 ; 1 ; 3)$ appartient à $\mathcal{P}$: $2 \times (-1) - 1 + 2 \times 3 + d = 0 \iff -2 - 1 + 6 + d = 0 \iff d = -3$. Donc, $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $2x - y + 2z - 3 = 0$.

2.b En déduire que H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$.

H est l'unique point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$. On substitue les coordonnées paramétriques de $\mathcal{D}$ dans l'équation de $\mathcal{P}$: $2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0$.

En développant : $2 + 4t - 2 + t + 4 + 4t - 3 = 0 \iff 9t + 1 = 0 \iff t = -\frac{1}{9}$.

En remplaçant dans la représentation paramétrique : $x = 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{9}$, $y = 2 - \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{19}{9}$,

$z = 2 + 2 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{9}$.

Donc, H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$.

2.c Calculer la longueur AH (valeur exacte).

Avec $A(-1 ; 1 ; 3)$ et $H\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$, on a $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ \frac{10}{9} \\ -\frac{11}{9} \end{pmatrix}$. Donc $AH = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(-\frac{11}{9}\right)^2} =$

$\sqrt{\frac{256 + 100 + 121}{81}} = \sqrt{\frac{477}{81}} = \frac{\sqrt{477}}{9}$. Comme $477 = 9 \times 53$, $\sqrt{477} = 3\sqrt{53}$, donc $AH = \frac{3\sqrt{53}}{9} = \frac{\sqrt{53}}{3}$.

3.a On souhaite retrouver les coordonnées de H , projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$, par une autre méthode. On rappelle que B appartient à $\mathcal{D}$ et que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

Les points H et B appartiennent tous deux à la droite $\mathcal{D}$, donc le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, tout comme $\vec{u}$. Deux vecteurs directeurs d'une même droite étant colinéaires, il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

3.b Montrer que $k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u}$.

Or A et H appartiennent au plan $\mathcal{P}$, orthogonal à $\mathcal{D}$ (donc à $\vec{u}$) : le vecteur $\overrightarrow{AH}$, contenu dans $\mathcal{P}$, est donc orthogonal à $\vec{u}$, d'où $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = (k\vec{u}) \cdot \vec{u} = k \|\vec{u}\|^2$, d'où, puisque $\vec{u} \neq \vec{0}$, $k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

3.c Calculer la valeur de k et retrouver les coordonnées de H.

On a $\|\vec{u}\|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 2^2 = 4 + 1 + 4 = 9$, et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = -8$ (question 1.c). Donc $k = \frac{-8}{9}$.

En notant $H(x ; y ; z)$, on a $\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} -1-x \\ 3-y \\ -z \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{HB} = k\vec{u} = -\frac{8}{9}\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ \frac{8}{9} \\ -\frac{16}{9} \end{pmatrix}$.

En identifiant coordonnée par coordonnée : $-1-x = -\frac{16}{9} \iff x = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9}$; $3-y = \frac{8}{9} \iff y = 3 - \frac{8}{9} = \frac{19}{9}$; $-z = -\frac{16}{9} \iff z = \frac{16}{9}$.

On retrouve bien $H\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$, comme à la question 2.b.

4. On considère un point C du plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$. Calculer l'aire du triangle ACH. (Rappel : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée.)

Les points A, C et H appartiennent tous au plan $\mathcal{P}$: le triangle ACH est donc une base possible du tétraèdre ABCH, et la hauteur associée est la distance de B à ce plan, c'est-à-dire BH (puisque H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$, donc aussi sur toute perpendiculaire à $\mathcal{P}$... plus directement : BH est la longueur du segment [BH], avec $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$ orthogonal à $\mathcal{P}$).

D'après la question 3.c, $\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ \frac{8}{9} \\ -\frac{16}{9} \end{pmatrix}$, donc $BH = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{256 + 64 + 256}{81}} =$

$$\sqrt{\frac{576}{81}} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

On applique la formule du volume avec $\mathcal{B} = \text{Aire}(\text{ACH})$ et $h = BH$: $\frac{8}{9} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(\text{ACH}) \times \frac{8}{3}$, d'où

$$\text{Aire}(\text{ACH}) = \frac{3 \times \frac{8}{9}}{\frac{8}{3}} = \frac{\frac{24}{9}}{\frac{8}{3}} = \frac{24}{9} \times \frac{3}{8} = 1.$$

Donc, l'aire du triangle ACH vaut 1 unité d'aire.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 2)

On considère un cube $ABCDEFGH$ et K le milieu du segment $[BC]$. L'espace est muni du repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, et on s'intéresse au tétraèdre $EFGK$. On rappelle que le volume d'un tétraèdre vaut $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base. **1. Donner les coordonnées des points E, F, G et K.**

Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, le cube $ABCDEFGH$ a pour sommets $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $F(1; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$ et $H(0; 1; 1)$; K , milieu de $[BC]$, a donc pour coordonnées $E(0; 0; 1)$, $F(1; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$ et $K\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$.

2. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK) .

D'après les coordonnées précédentes, $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EK} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = 2 \times 1 + (-2) \times 1 + 1 \times 0 = 2 - 2 + 0 = 0$, donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont orthogonaux.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{EK} = 2 \times 1 + (-2) \times \frac{1}{2} + 1 \times (-1) = 2 - 1 - 1 = 0$, donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont orthogonaux.

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGK) : $\vec{n}$ est donc orthogonal au plan (EGK) .

3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne $2x - 2y + z - 1 = 0$.

D'après la question précédente, $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EGK) , qui admet donc une équation cartésienne de la forme $2x - 2y + z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Comme $E(0; 0; 1)$ appartient au plan (EGK) : $2 \times 0 - 2 \times 0 + 1 + d = 0 \iff d = -1$.

Donc, une équation cartésienne du plan (EGK) est $2x - 2y + z - 1 = 0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) et passant par F.

La droite (d) , orthogonale au plan (EGK) , admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur ; elle passe par $F(1; 0; 1)$.

Donc, une représentation paramétrique de (d) est :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right)$.

L est l'unique point d'intersection de la droite (d) et du plan (EGK) . On remplace les coordonnées paramétriques de (d) dans l'équation du plan (EGK) : $2(1 + 2t) - 2(-2t) + (1 + t) - 1 = 0$.

En développant : $2 + 4t + 4t + 1 + t - 1 = 0 \iff 9t + 2 = 0 \iff t = -\frac{2}{9}$.

En remplaçant $t = -\frac{2}{9}$ dans les équations de (d) : $x = 1 + 2 \times \left(-\frac{2}{9}\right) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$; $y = -2 \times \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}$; $z = 1 + \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{7}{9}$.

Donc, L a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right)$.

6. Justifier que la longueur LF est égale à $\frac{2}{3}$.

Avec $L\left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right)$ et $F(1; 0; 1)$, on a $\overrightarrow{LF} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

Donc, $LF = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{4}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

7. Calculer l'aire du triangle EFG . En déduire que le volume du tétraèdre $EFGK$ est égal à $\frac{1}{6}$.

On a $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$: le triangle EFG est rectangle en F , avec $EF = 1$ et $FG = 1$.

Son aire vaut donc $\mathcal{A}(EFG) = \frac{EF \times FG}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.

Le triangle EFG est situé dans le plan d'équation $z = 1$ (contenant E , F et G) ; la hauteur du tétraèdre $EFGK$ relative à cette base est donc la distance de K , d'altitude $z = 0$, à ce plan, soit $h = 1$.

Donc, $\mathcal{V}(EFGK) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(EFG) \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$.

8. Dédurre des questions précédentes l'aire du triangle EGK.

Le volume du tétraèdre EFGK peut aussi se calculer en prenant pour base le triangle EGK et pour hauteur la longueur LF, puisque L est le projeté orthogonal de F sur le plan (EGK) : $\mathcal{V}(\text{EFGK}) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{EGK}) \times \text{LF}$.

D'après les questions précédentes, $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{EGK}) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \times \mathcal{A}(\text{EGK})$.

Donc, $\mathcal{A}(\text{EGK}) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{6} \times \frac{9}{2} = \frac{3}{4}$.

9. On considère les points P, milieu de [EG], M, milieu de [EK], et N, milieu de [GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.

D'après le théorème des milieux appliqué dans le triangle EGK, les côtés du triangle PMN mesurent chacun la moitié des côtés correspondants du triangle EGK.

L'aire du triangle PMN vaut donc $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ fois celle du triangle EGK : $\mathcal{A}(\text{PMN}) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$.

Les points P, M et N appartiennent tous les trois au plan (EGK) : la hauteur du tétraèdre FPMN relative à la base PMN est donc la même que celle du tétraèdre EFGK relative à la base EGK, à savoir $\text{LF} = \frac{2}{3}$.

Donc, $\mathcal{V}(\text{FPMN}) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{PMN}) \times \text{LF} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{24}$.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS, avec $DC = 6$ et $DA = DH = 4$. On pose $\vec{i} = \overrightarrow{DI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, $\vec{j} = \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}$, et l'on se place dans le repère orthonormé $(D ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On admet que $S(3 ; 2 ; 6)$. **1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.**

D'après la géométrie du solide (arêtes parallèles aux vecteurs de base) : $B(6 ; 4 ; 0)$, $E(0 ; 4 ; 4)$, $F(6 ; 4 ; 4)$, $G(6 ; 0 ; 4)$.

2. Démontrer que le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison. On rappelle que le volume d'une pyramide vaut $\frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}$.

La base EFGH est un rectangle de côtés $EF = 6$ et $FG = 4$ (d'après les coordonnées de la question 1), donc d'aire $\mathcal{A}(\text{EFGH}) = 6 \times 4 = 24$.

Le sommet S a pour cote 6, tandis que le plan de la base EFGH est à la cote 4 (coordonnées de E, F, G, H) : la hauteur de la pyramide vaut donc $6 - 4 = 2$.

Le volume de la pyramide vaut donc $V(\text{EFGHS}) = \frac{1}{3} \times 24 \times 2 = 16$.

Le parallélépipède ABCDEFGH a pour arêtes 6, 4 et 4, donc pour volume $V(\text{ABCDEFGH}) = 6 \times 4 \times 4 = 96$.

Le volume total de la maison vaut donc $16 + 96 = 112$.

Enfin, $\frac{V(\text{EFGHS})}{V(\text{maison})} = \frac{16}{112} = \frac{1}{7}$, ce qui est le résultat attendu.

3.a Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS).

On calcule $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (car $F - E = (6, 4, 4) - (0, 4, 4)$) et $\overrightarrow{ES} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (car $S - E = (3, 2, 6) - (0, 4, 4)$).

On a $\overrightarrow{EF} \cdot \vec{n} = 6 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$, et $\overrightarrow{ES} \cdot \vec{n} = 3 \times 0 + (-2) \times 1 + 2 \times 1 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EFS) (les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{ES}$ ne sont manifestement pas proportionnelles) : $\vec{n}$ est donc **normal** au plan (EFS).

3.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.

Comme $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS), une équation cartésienne de ce plan est de la forme

$0x + 1y + 1z + d = 0$, soit $y + z + d = 0$, où d est une constante réelle à déterminer.

Le point $E(0 ; 4 ; 4)$ appartient au plan (EFS), donc ses coordonnées vérifient l'équation : $4 + 4 + d = 0 \iff d = -8$.

L'équation cartésienne du plan (EFS) est donc $y + z - 8 = 0$, ce qui est le résultat attendu.

4.a On installe une antenne représentée par le segment [PQ], avec P dans le plan (EFS), $Q(2 ; 3 ; 5,5)$, et la droite (PQ) dirigée par le vecteur $\vec{k}$. Justifier qu'une représentation paramétrique de (PQ) est $x = 2, y = 3, z = 5,5 + t$ ($t \in \mathbb{R}$).

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient à la droite (PQ), passant par Q et dirigée par $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{QM} = t\vec{k}$.

Cette égalité vectorielle équivaut à $x - 2 = 0, y - 3 = 0$ et $z - 5,5 = t$, c'est-à-dire à $x = 2, y = 3$ et $z = 5,5 + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Donc, la réponse est confirmée : $x = 2$, $y = 3$, $z = 5,5 + t$ ($t \in \mathbb{R}$) est bien une représentation paramétrique de (PQ).

4.b En déduire les coordonnées du point P.

Le point P appartient à la fois à la droite (PQ) et au plan (EFS) (d'équation $y + z - 8 = 0$). Ses coordonnées vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de (PQ) et l'équation du plan.

En substituant $y = 3$ et $z = 5,5 + t$ dans l'équation du plan : $3 + (5,5 + t) - 8 = 0 \iff t + 0,5 = 0 \iff t = -0,5$.

On obtient alors $x = 2$, $y = 3$, $z = 5,5 + (-0,5) = 5$.

Donc, la réponse est P(2 ; 3 ; 5).

4.c En déduire la longueur PQ de l'antenne.

On calcule $PQ^2 = (2 - 2)^2 + (3 - 3)^2 + (5,5 - 5)^2 = 0 + 0 + 0,25 = 0,25$.

Donc $PQ = \sqrt{0,25} = 0,5$.

5. Un oiseau vole selon une trajectoire modélisée par la droite Δ de représentation paramétrique $x = -4 + 6s$, $y = 7 - 4s$, $z = 2 + 4s$ ($s \in \mathbb{R}$). Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ , puis dire si l'oiseau va percuter l'antenne représentée par le segment [PQ].

La droite (PQ) est dirigée par $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la droite Δ est dirigée par $\vec{\delta} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (les coordonnées de $\vec{k}$ nulles en x et y ne peuvent être proportionnelles à celles, non nulles, de $\vec{\delta}$) : les droites (PQ) et Δ ne sont donc pas parallèles.

Cherchons un éventuel point d'intersection en résolvant $x = 2 = -4 + 6s$, ce qui donne $6s = 6$, soit $s = 1$. On vérifie avec l'ordonnée : pour $s = 1$, $y = 7 - 4 \times 1 = 3$, ce qui correspond bien à $y = 3$ sur (PQ). Les droites sont donc sécantes.

Pour $s = 1$, la cote sur Δ vaut $z = 2 + 4 \times 1 = 6$. Sur (PQ), cette cote correspond à $5,5 + t = 6$, soit $t = 0,5$.

Le point d'intersection des deux droites a donc pour coordonnées (2 ; 3 ; 6), et correspond au paramètre $t = 0,5$ sur la droite (PQ).

Or, d'après la représentation paramétrique de (PQ) et les points P et Q trouvés précédemment, le point P correspond à $t = -0,5$ et le point Q correspond à $t = 0$: le segment [PQ] correspond donc exactement aux valeurs de t comprises entre $-0,5$ et 0 .

Comme le paramètre $t = 0,5$ du point d'intersection n'appartient pas à cet intervalle $[-0,5 ; 0]$, le point d'intersection des deux droites n'appartient pas au segment $[PQ]$.

Donc, la réponse est : l'oiseau ne va pas percuter l'antenne représentée par le segment $[PQ]$; sa trajectoire croise la droite (PQ) en un point situé au-delà de Q , à une demi-unité de distance au-dessus de l'extrémité Q de l'antenne.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 1)

1. Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ surmonté d'un prisme $EFIHGJ$, de base triangulaire EIF isocèle en I , avec $AB=3$, $AD=2$, $AE=1$. On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{AD}$, $\vec{k} = \vec{AE}$. Donner les coordonnées du point G .

Dans ce repère, on a $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 1\vec{k}$, donc les coordonnées de G sont **$G(3 ; 2 ; 1)$** .

2. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2 ; 0 ; -3)$ est normal au plan (EHI) . Déterminer une équation cartésienne du plan (EHI) .

Une équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(2 ; 0 ; -3)$ est de la forme $2x + 0y - 3z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Dans le repère choisi, on a $E(0 ; 0 ; 1)$ (puisque $\vec{AE} = \vec{k}$), et E appartient au plan (EHI) , donc $2 \times 0 - 3 \times 1 = d$, soit $d = -3$.

Donc, une équation cartésienne du plan (EHI) est $2x - 3z = -3$.

3. Déterminer les coordonnées du point I .

Le triangle EIF est isocèle en I , donc le projeté orthogonal de I sur la droite (EF) est le milieu de $[EF]$.

Or, dans le repère choisi, $E(0 ; 0 ; 1)$ et $F(3 ; 0 ; 1)$ (F ayant même ordonnée et cote que E , avec l'abscisse de B), donc le milieu de $[EF]$ a pour abscisse $\frac{0+3}{2} = 1,5$ et pour ordonnée 0 .

Le point I a donc la même abscisse $(1,5)$ et la même ordonnée (0) que ce projeté, par symétrie du toit par rapport au plan d'équation $y = 0$ contenant A, B, E, F .

Il reste à déterminer la cote de I : puisque I appartient au plan (EHI) d'équation $2x - 3z = -3$, on a $2 \times 1,5 - 3z = -3 \iff 3 - 3z = -3 \iff 3z = 6 \iff z = 2$.

Donc, les coordonnées du point I sont **$I(1,5 ; 0 ; 2)$** .

4. Déterminer une mesure au degré près de l'angle $\widehat{\text{EIF}}$.

Avec $\text{I}(1,5 ; 0 ; 2)$, $\text{E}(0 ; 0 ; 1)$ et $\text{F}(3 ; 0 ; 1)$, on calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{\text{IE}}(-1,5 ; 0 ; -1)$ et $\vec{\text{IF}}(1,5 ; 0 ; -1)$.

On calcule les normes : $\text{IE}^2 = (-1,5)^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2,25 + 1 = 3,25 = \frac{13}{4}$, donc $\text{IE} = \frac{\sqrt{13}}{2}$; de même $\text{IF} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ (le triangle EIF est bien isocèle en I).

On calcule le produit scalaire : $\vec{\text{IE}} \cdot \vec{\text{IF}} = (-1,5) \times 1,5 + 0 \times 0 + (-1) \times (-1) = -2,25 + 1 = -1,25$.

Or $\vec{\text{IE}} \cdot \vec{\text{IF}} = \text{IE} \times \text{IF} \times \cos(\widehat{\text{EIF}})$, donc $\cos(\widehat{\text{EIF}}) = \frac{-1,25}{\frac{\sqrt{13}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{-1,25}{\frac{13}{4}} = -\frac{5}{13}$.

La calculatrice donne alors $\widehat{\text{EIF}} = \arccos\left(-\frac{5}{13}\right) \approx 112,6^\circ$, soit **113°** au degré près.

5.a. On souhaite creuser une tranchée depuis un relais électrique R de coordonnées $(6 ; -3 ; -1)$, assimilée à un segment de la droite Δ passant par R et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-3 ; 4 ; 1)$. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ .

Un point $\text{M}(x ; y ; z)$ appartient à Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\vec{\text{RM}} = t\vec{u}$, ce qui

donne la représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = -1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.b. On admet qu'une équation du plan (BFG) est $x = 3$. Soit K le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (BFG). Déterminer les coordonnées de K.

Le point K appartient à la fois à Δ et au plan (BFG), donc ses coordonnées vérifient à la fois la représentation paramétrique de Δ et l'équation $x = 3$.

En substituant $x = 6 - 3t$ dans $x = 3$, on obtient $6 - 3t = 3 \iff 3t = 3 \iff t = 1$.

On reporte $t = 1$ dans les deux autres équations : $y = -3 + 4 \times 1 = 1$ et $z = -1 + 1 = 0$.

Donc, les coordonnées du point K sont **$\text{K}(3 ; 1 ; 0)$** .

5.c. Le point K appartient-il à l'arête [BC] ?

Dans le repère choisi, $\text{B}(3 ; 0 ; 0)$ et $\text{C}(3 ; 2 ; 0)$ (C ayant même abscisse et cote que B, et l'ordonnée de D).

Le milieu de [BC] a pour coordonnées $\left(\frac{3+3}{2} ; \frac{0+2}{2} ; \frac{0+0}{2}\right) = (3 ; 1 ; 0)$, qui sont exactement les coordonnées de K.

Donc K est le milieu de [BC], et en particulier, K appartient bien à l'arête [BC] : la tranchée atteindra donc la maison au niveau de cette arête.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 1)

L'espace est muni d'un repère orthonormal. On considère les points $A(2 ; -1 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; -3)$, $C(6 ; 6 ; 1)$, $E(1 ; 2 ; 4)$, et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1.a Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ à partir de celles de A, B et C : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 0 - (-1) \\ -3 - 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ 6 - (-1) \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Leur produit scalaire vaut $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \times 4 + 1 \times 7 + (-3) \times 1 = -4 + 7 - 3 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc orthogonaux. Donc, la réponse est que le triangle ABC est bien **rectangle en A**.

1.b Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.

$$\text{On a } \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ (l'opposé de } \overrightarrow{AB}) \text{ et } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 6 - 1 \\ 6 - 0 \\ 1 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Leur produit scalaire vaut $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \times 5 + (-1) \times 6 + 3 \times 4 = 5 - 6 + 12 = 11$.

On calcule ensuite les normes : $BA = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$, et $BC = \sqrt{5^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 36 + 16} = \sqrt{77}$.

1.c En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$, arrondie au degré.

D'après la formule du produit scalaire avec les normes et le cosinus de l'angle formé : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$.

On remarque que $\sqrt{77} = \sqrt{11 \times 7} = \sqrt{11} \times \sqrt{7}$, donc l'égalité devient $11 = \sqrt{11} \times \sqrt{11} \times \sqrt{7} \times \cos(\widehat{ABC}) = 11\sqrt{7} \times \cos(\widehat{ABC})$.

On en déduit $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{1}{\sqrt{7}}$, d'où, à la calculatrice, $\widehat{ABC} \approx 68$ degrés (au degré près).

2.a Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC).

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, d'équation $2x - y - z + 4 = 0$, est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (les coefficients de x , y et z).

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires puisque ABC est un triangle (question 1.a), donc ils dirigent le plan (ABC).

On calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-1) + (-1) \times 1 + (-1) \times (-3) = -2 - 1 + 3 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 4 + (-1) \times 7 + (-1) \times 1 = 8 - 7 - 1 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : c'est un vecteur normal à ce plan, mais aussi au plan $\mathcal{P}$ par définition. Deux plans de même vecteur normal sont parallèles.

Donc, la réponse est que le plan $\mathcal{P}$ est bien **parallèle** au plan (ABC).

2.b En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Le plan (ABC), parallèle au plan $\mathcal{P}$ et admettant le même vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, a une équation cartésienne de la forme $2x - y - z + d = 0$, où d est une constante à déterminer.

Comme A(2 ; -1 ; 0) appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient l'équation : $2 \times 2 - (-1) - 0 + d = 0 \iff 4 + 1 + d = 0 \iff d = -5$.

Donc, la réponse est que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x - y - z - 5 = 0$.

2.c Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.

La droite $\mathcal{D}$, orthogonale au plan (ABC), admet pour vecteur directeur le vecteur normal de ce plan, soit $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{EM} = t\vec{n}$ pour un certain réel t , avec E(1 ; 2 ; 4), c'est-à-dire $x - 1 = 2t$, $y - 2 = -t$ et $z - 4 = -t$.

Donc, la réponse est que la droite $\mathcal{D}$ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

2.d Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4 ; \frac{1}{2} ; \frac{5}{2}\right)$.

Le point H, projeté orthogonal de E sur le plan (ABC), est l'unique point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ (orthogonale au plan et passant par E) avec le plan (ABC).

Ses coordonnées vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ et l'équation $2x - y - z - 5 = 0$ du plan (ABC). En substituant $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 4 - t$ dans cette équation : $2(1 + 2t) - (2 - t) - (4 - t) - 5 = 0$.

En développant : $2 + 4t - 2 + t - 4 + t - 5 = 0 \iff 6t - 9 = 0 \iff t = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

En remplaçant $t = \frac{3}{2}$ dans la représentation paramétrique : $x = 1 + 2 \times \frac{3}{2} = 4$, $y = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, $z = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Donc, la réponse est que H a bien pour coordonnées $\left(4 ; \frac{1}{2} ; \frac{5}{2}\right)$.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée. Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE vaut 16,5 unités de volume.

Le triangle ABC est rectangle en A (question 1.a), donc son aire vaut $\mathcal{B} = \frac{AB \times AC}{2}$, avec $AB = \sqrt{11}$ (calculée à la question 1.b) et $AC = \sqrt{4^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 49 + 1} = \sqrt{66}$.

On a donc $\mathcal{B} = \frac{\sqrt{11} \times \sqrt{66}}{2} = \frac{\sqrt{726}}{2}$. Comme $726 = 121 \times 6 = 11^2 \times 6$, on obtient $\sqrt{726} = 11\sqrt{6}$, d'où $\mathcal{B} = \frac{11\sqrt{6}}{2}$.

La droite (HE) est orthogonale au plan (ABC) par construction : la hauteur de la pyramide ABCE, associée à la base ABC, est donc la longueur HE.

On calcule $\overrightarrow{HE} = \begin{pmatrix} 1 - 4 \\ 2 - \frac{1}{2} \\ 4 - \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, d'où $HE = \sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36 + 9 + 9}{4}} = \sqrt{\frac{54}{4}} = \frac{\sqrt{54}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Le volume de la pyramide ABCE vaut donc $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times HE = \frac{1}{3} \times \frac{11\sqrt{6}}{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{33 \times 6}{4} = \frac{33 \times 6}{12} = \frac{198}{12}$.

Donc, la réponse est que le volume de la pyramide ABCE vaut bien $\mathcal{V} = 16,5$ unités de volume.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 2)

Partie 1 (première méthode) — On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1, muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$, K le centre du carré $ADHE$ et O le milieu du segment $[AG]$. On donne $I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 1\right)$ et $K\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$. Le but de l'exercice est de calculer, de deux manières différentes, la distance du point B au plan (AIG) . 1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A , B et G .

Le repère étant $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et le cube ayant pour arête 1, on lit directement : $A(0 ; 0 ; 0)$ (origine du repère), $B(1 ; 0 ; 0)$ et $G(1 ; 1 ; 1)$.

2. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG) .

Les points A , I , G ne sont pas alignés (I n'est ni sur (AG) , ni confondu avec A ou G), donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ forment une base du plan (AIG) .

On calcule les coordonnées : $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0,5-0 \\ 0,5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

Le repère étant orthonormé, on calcule les produits scalaires à l'aide des coordonnées : $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AI} = (-1) \times 0,5 + 0,5 \times 0 + 0,5 \times 1 = -0,5 + 0 + 0,5 = 0$.

De même, $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AG} = (-1) \times 1 + 0,5 \times 1 + 0,5 \times 1 = -1 + 0,5 + 0,5 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{BK}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AIG) : il est donc orthogonal à ce plan tout entier, donc la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG) .

3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est $2x - y - z = 0$.

D'après la question précédente, la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG) , donc tout vecteur directeur de (BK) est un vecteur normal à (AIG) . Le vecteur $\vec{n} = -2\overrightarrow{BK}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, est donc normal à (AIG) .

Le plan (AIG) admet donc une équation cartésienne de la forme $2x - y - z + d = 0$, où d est un réel à déterminer.

Comme $A(0 ; 0 ; 0)$ appartient au plan (AIG) , ses coordonnées vérifient l'équation : $2 \times 0 - 0 - 0 + d = 0 \iff d = 0$.

Donc, la réponse est qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est bien $2x - y - z = 0$.

4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BK).

La droite (BK) passe par B(1 ; 0 ; 0) et est dirigée par $\overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

Donc, la réponse est que (BK) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0,5t \\ z = 0,5t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

5. En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées $L\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

On cherche la valeur du paramètre t pour laquelle le point de (BK) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$: d'après la représentation paramétrique, $1 - t = \frac{1}{3}$ donne $t = \frac{2}{3}$, et on vérifie que $0,5 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ pour les deux autres coordonnées. Le point L de coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ appartient donc bien à la droite (BK).

On vérifie aussi que L appartient au plan (AIG), d'équation $2x - y - z = 0$ (question 3) : $2 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$. Les coordonnées de L vérifient donc l'équation du plan.

Le point L appartient donc à la fois à la droite (BK) et au plan (AIG) : c'est le point d'intersection de cette droite et de ce plan. Comme (BK) est orthogonale à (AIG) (question 2), L est donc bien le projeté orthogonal de B sur le plan (AIG).

6. Déterminer la distance du point B au plan (AIG).

La distance de B au plan (AIG) est la distance BL, puisque L est le projeté orthogonal de B sur ce plan. Le repère étant orthonormé, on calcule cette distance à partir des coordonnées de B(1 ; 0 ; 0) et L $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$:

$$BL = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Donc, la réponse est que la distance du point B au plan (AIG) vaut $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Partie 2 (deuxième méthode) — On rappelle que le volume V d'une pyramide vaut $V = \frac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée. 1.a Justifier que, dans le tétraèdre ABIG, $[GF]$ est la hauteur relative à la base AIB.

Le triangle AIB est inclus dans le plan (ABF), qui est le plan contenant la face avant du cube ABFE (car A, I, B appartiennent tous trois à cette face, I étant le milieu de [EF]).

Comme ABCDEFGH est un cube, l'arête $[GF]$ est perpendiculaire à la face ABFE, donc perpendiculaire au plan (AIB). Le segment $[GF]$ joint le sommet G du tétraèdre au plan de la base AIB en formant un angle droit avec ce plan : c'est donc bien la hauteur du tétraèdre ABIG relative à la base AIB.

1.b En déduire le volume du tétraèdre ABIG.

Le triangle AIB a pour base $[AB]$, de longueur 1 (arête du cube), et pour hauteur associée la distance de I à la droite (AB), qui vaut ici 1 (même longueur que l'arête $[AE]$, puisque I est le milieu de [EF] à la même hauteur que E et F). Son aire est donc $b_{AIB} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.

La hauteur du tétraèdre relative à cette base est $h_{GF} = GF = 1$ (arête du cube).

Donc, la réponse est $V_{ABIG} = \frac{1}{3} \times b_{AIB} \times h_{GF} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$.

2. On admet que $AI = IG = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et que $AG = \sqrt{3}$. Démontrer que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

Le triangle AIG est isocèle en I (car $AI = IG$), donc la hauteur issue de I est aussi la médiane issue de I : elle passe par le milieu O du côté $[AG]$, qui est précisément le point défini dans l'énoncé comme le milieu de $[AG]$.

On calcule la longueur IO à l'aide des coordonnées : $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ et O, milieu de $[AG]$ avec $A(0; 0; 0)$ et $G(1; 1; 1)$, a pour coordonnées $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

$$IO = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'aire du triangle AIG, dont $[AG]$ est la base et $[IO]$ la hauteur associée, vaut donc $A_{AIG} =$

$$\frac{AG \times IO}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Donc, la réponse est que l'aire du triangle AIG est bien $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

3. En déduire la distance du point B au plan (AIG).

On peut aussi calculer le volume du tétraèdre ABIG en considérant le triangle AIG comme base : la hauteur associée est alors la distance h du point B au plan (AIG), c'est-à-dire la distance cherchée.

D'après les questions précédentes, $V_{ABIG} = \frac{1}{6}$ et $A_{AIG} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, donc : $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times A_{AIG} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{4} \times h$.

On en déduit $h = \frac{1}{6} \times \frac{3 \times 4}{\sqrt{6}} = \frac{12}{6\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Donc, la réponse est que l'on retrouve bien la distance du point B au plan (AIG) égale à $\frac{\sqrt{6}}{3}$, ce qui confirme le résultat obtenu par la première méthode.

Bac Terminale 2021 — Métropole, Mayotte, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

Partie I — Cécile sort des gâteaux du congélateur, où ils étaient à -19°C , pour les poser sur une terrasse à 25°C . Au bout de 10 minutes, ils sont à $1,3^\circ\text{C}$. En supposant que la température augmente à vitesse constante (même hausse chaque minute), quelle serait la température des gâteaux au bout de 25 minutes ? Ce modèle est-il pertinent ?

En 10 minutes, la température a augmenté de $1,3 - (-19) = 20,3^\circ\text{C}$, soit une hausse constante supposée de $\frac{20,3}{10} = 2,03^\circ\text{C}$ par minute.

Au bout de 25 minutes, la hausse totale serait de $25 \times 2,03 = 50,75^\circ\text{C}$, donc une température de $-19 + 50,75 = 31,75^\circ\text{C}$.

Or la température de la terrasse est de 25°C : les gâteaux ne peuvent pas dépasser cette température ambiante. Donc, **ce modèle n'est pas pertinent**.

Partie II — On note T_n la température des gâteaux, en degré Celsius, n minutes après leur sortie du congélateur, avec $T_0 = -19$. On admet la relation $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$ pour tout entier naturel n . 1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$.

En développant : $T_{n+1} - T_n = -0,06T_n + 0,06 \times 25 = -0,06T_n + 1,5$.

D'où $T_{n+1} = T_n - 0,06T_n + 1,5 = 0,94T_n + 1,5$.

2. Calculer T_1 et T_2 (arrondir au dixième).

Avec $n = 0$: $T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = -17,86 + 1,5 = -16,36$, soit $T_1 \approx -16,4$.

Avec $n = 1$: $T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5 = -15,3784 + 1,5 = -13,8784$, soit $T_2 \approx -13,9$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $T_n \leq 25$. Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'énoncé ?

Initialisation. $T_0 = -19 \leq 25$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons que, pour un entier n , $T_n \leq 25$. En multipliant par $0,94 > 0$: $0,94 T_n \leq 0,94 \times 25 = 23,5$.

En ajoutant 1,5 aux deux membres : $0,94 T_n + 1,5 \leq 25$, soit $T_{n+1} \leq 25$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $T_n \leq 25$.

Ce résultat était prévisible : la température des gâteaux ne peut pas dépasser la température ambiante de la terrasse, qui est justement de 25°C .

4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n) .

D'après la relation de récurrence, $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$.

D'après la question précédente, $T_n \leq 25$ pour tout n , donc $T_n - 25 \leq 0$, donc $-0,06 \times (T_n - 25) \geq 0$.

Ainsi $T_{n+1} - T_n \geq 0$ pour tout n : la suite (T_n) est **croissante**.

5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.

La suite (T_n) est croissante (question précédente) et majorée par 25 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite ℓ vérifiant $\ell \leq 25$.

6.a On pose, pour tout entier naturel n , $U_n = T_n - 25$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94 T_n + 1,5 - 25 = 0,94 T_n - 23,5$.

Or $0,94 \times (T_n - 25) = 0,94 T_n - 23,5$, donc $U_{n+1} = 0,94 \times (T_n - 25) = 0,94 U_n$.

La suite (U_n) est donc **géométrique de raison** 0,94, de premier terme $U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44$.

6.b En déduire que, pour tout entier naturel n , $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$.

Comme (U_n) est géométrique de raison 0,94 et de premier terme -44 : $U_n = -44 \times 0,94^n$ pour tout n .

Or $U_n = T_n - 25$, donc $T_n = U_n + 25 = -44 \times 0,94^n + 25$.

6.c En déduire la limite de la suite (T_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Comme $0 < 0,94 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$, donc par somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 25$.

Cela signifie que la température des gâteaux se rapproche indéfiniment de la température ambiante de la terrasse, 25°C , sans jamais la dépasser, ce qui est cohérent avec la situation physique.

7.a Le fabricant conseille de consommer les gâteaux une demi-heure après leur sortie du congélateur. Quelle température ont-ils alors atteinte (arrondir à l'entier le plus proche) ?

Avec $n = 30$ minutes : $T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25 \approx 18,1$. Donc, les gâteaux ont atteint une température d'environ **18 °C**.

7.b Cécile aime déguster ces gâteaux encore frais, à 10°C . Donner un encadrement, entre deux entiers consécutifs, du nombre de minutes après lesquelles elle doit les déguster.

À la calculatrice, $T_{17} \approx 9,6$ et $T_{18} \approx 10,6$: la température franchit donc 10°C entre les minutes 17 et 18.

Donc, Cécile doit déguster son gâteau **entre la 17^e et la 18^e minute** après sa sortie du congélateur.

7.c Le programme Python suivant doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geq 10$. Recopier et compléter les lignes manquantes.

- `def seuil() :`
- `n = 0`
- `T = -19`
- `while T < 10 :`
- `T = 0.94 * T + 1.5`
- `n = n + 1`
- `return n`

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 1)

1. Une influenceuse compte $u_0 = 1\,000$ abonnés en 2020. Chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés puis en gagne 250 nouveaux. On note u_n le nombre d'abonnés en l'année $(2020 + n)$. Calculer u_1 .

Perdre 10 % revient à multiplier par 0,9. Donc $u_1 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = \mathbf{1\,150}$ abonnés.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

Multiplier par 0,9 traduit la perte de 10 % des abonnés d'une année sur l'autre.

On ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

3. Une fonction Python 'suite(n)' initialise 'u = 1000', puis répète 'n' fois 'u = 0.9*u + 250', avant de renvoyer 'u'. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la valeur renvoyée par l'appel 'suite(10)'.

La fonction calcule u_{10} , c'est-à-dire le nombre d'abonnés estimé en l'année 2030 ; la calculatrice donne $u_{10} \approx 1\,977$ abonnés.

4.a Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

Initialisation : $u_0 = 1\,000 \leq 2\,500$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq 2\,500$. Comme $0,9 > 0$, la multiplication conserve l'ordre : $0,9u_n \leq 0,9 \times 2\,500 = 2\,250$, puis en ajoutant 250 aux deux membres, $0,9u_n + 250 \leq 2\,500$, soit $u_{n+1} \leq 2\,500$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

4.b Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.

Or, d'après la question précédente, $u_n \leq 2\,500$, donc $0,1u_n \leq 250$, soit $-0,1u_n + 250 \geq 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est **croissante**.

4.c Dédire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 500 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

5.a On pose $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n . Montrer que (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1\,500$.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500 = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9(u_n - 2\,500) = 0,9v_n$.

La relation $v_{n+1} = 0,9v_n$, vraie pour tout entier naturel n , montre que (v_n) est géométrique de raison 0,9.

Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

5.b Exprimer v_n en fonction de n , puis montrer que $u_n = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

Comme (v_n) est géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $v_0 = -1\,500$, pour tout entier naturel n : $v_n = -1\,500 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 2\,500$, donc $u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

5.c Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Comme $0 < 0,9 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc par produit puis somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\,500$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que le nombre d'abonnés de l'influenceuse **se stabilise autour de 2 500** au fil des années.

6. Écrire un programme qui détermine en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200, puis donner cette année.

- $n = 0$
- $u = 1000$
- tant que $u \leq 2200$:
- $u = 0.9 * u + 250$
- $n = n + 1$
- renvoyer n
- En simulant l'évolution terme à terme, on obtient $u_{15} \approx 2\,191,2 \leq 2\,200$ et $u_{16} \approx 2\,222,0 > 2\,200$: le programme renvoie $n = 16$.
- Donc, la réponse est que le nombre d'abonnés dépasse 2 200 la seizième année suivant 2020, c'est-à-dire en **2036**.

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 2)

1. On considère un pavé droit ABCDEFGH avec $AB = AD = 1$ et $AE = 2$. I est le milieu de $[AE]$, K le milieu de $[DC]$, et L le point défini par $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. On se place dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, dans lequel $L \left(0 ; 1 ; \frac{3}{2} \right)$. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.

Dans ce repère, $C(1 ; 1 ; 0)$ et $D(0 ; 1 ; 0)$ (ABCD est un rectangle de côtés AB et AD). K, milieu de $[DC]$, a donc pour coordonnées $K \left(\frac{1}{2} ; 1 ; 0 \right)$.

On en déduit $\overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'après l'énoncé, $\overrightarrow{AL} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ (coordonnées de L, puisque A est l'origine du repère).

2.a Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6 ; -3 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AK} = 6 \times \frac{1}{2} + (-3) \times 1 + 2 \times 0 = 3 - 3 + 0 = 0.$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AL} = 6 \times 0 + (-3) \times 1 + 2 \times \frac{3}{2} = 0 - 3 + 3 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AK}$ et à $\overrightarrow{AL}$, deux vecteurs non colinéaires du plan (AKL) : $\vec{n}$ est donc un vecteur normal au plan (AKL).

2.b En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).

Le plan (AKL) admet $\vec{n}(6 ; -3 ; 2)$ pour vecteur normal, donc une équation de la forme $6x - 3y + 2z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Comme $A(0 ; 0 ; 0)$ appartient au plan : $6 \times 0 - 3 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0$, soit $d = 0$.

Une équation cartésienne du plan (AKL) est $6x - 3y + 2z = 0$.

2.c Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).

La droite Δ passe par $D(0 ; 1 ; 0)$ et admet $\vec{n}(6 ; -3 ; 2)$ pour vecteur directeur (puisque'elle est perpendiculaire au plan (AKL), donc dirigée par sa normale).

$$\text{Un système d'équations paramétriques de } \Delta \text{ est : } \begin{cases} x = 6t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

2.d En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49} ; \frac{40}{49} ; \frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

Le projeté orthogonal de D sur le plan (AKL) est le point d'intersection de la droite Δ (perpendiculaire au plan et passant par D) avec ce plan.

On remplace les coordonnées paramétriques de Δ dans l'équation du plan : $6 \times 6t - 3 \times (1 - 3t) + 2 \times 2t = 0$.

$$\text{Soit } 36t - 3 + 9t + 4t = 0 \iff 49t = 3 \iff t = \frac{3}{49}.$$

$$\text{En reportant dans le système paramétrique : } x = 6 \times \frac{3}{49} = \frac{18}{49}, y = 1 - 3 \times \frac{3}{49} = \frac{49 - 9}{49} = \frac{40}{49},$$

$$z = 2 \times \frac{3}{49} = \frac{6}{49}.$$

Le point d'intersection a bien pour coordonnées $\left(\frac{18}{49}; \frac{40}{49}; \frac{6}{49}\right)$: c'est donc le point N, projeté orthogonal de D sur le plan (AKL).

3.a On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}$. Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.

Le triangle ADK est rectangle en D, car (DA) et (DC) sont deux arêtes perpendiculaires du pavé et K appartient à (DC).

On a $AD = 1$ et $DK = \frac{1}{2}$ (K milieu de [DC] avec $DC = AB = 1$), donc l'aire du triangle ADK est $\mathcal{A}(\text{ADK}) = \frac{AD \times DK}{2} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

La hauteur du tétraèdre relative à cette base est DL, avec $DL = \frac{3}{2} \times AI = \frac{3}{2}$ (d'après la définition de L, et $AI = 1$ la norme du troisième vecteur de base).

$$\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{8} \text{ (unité de volume)}.$$

3.b Calculer la distance du point D au plan (AKL).

La distance de D au plan (AKL) est la longueur DN, où N est le projeté orthogonal de D sur ce plan.

$$\overrightarrow{DN} = \begin{pmatrix} \frac{18}{49} \\ \frac{40}{49} - 1 \\ \frac{6}{49} - 1 \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{DN} = \begin{pmatrix} \frac{18}{49} \\ -\frac{9}{49} \\ -\frac{6}{49} \end{pmatrix}.$$

$$DN^2 = \left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(-\frac{9}{49}\right)^2 + \left(-\frac{6}{49}\right)^2 = \frac{324 + 81 + 36}{49^2} = \frac{441}{2401} = \left(\frac{21}{49}\right)^2.$$

$$\text{Donc } DN = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}.$$

3.c En déduire l'aire du triangle AKL.

En prenant cette fois le triangle AKL comme base du tétraèdre, la hauteur associée est DN, donc $\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{AKL}) \times DN$.

D'après les questions précédentes, $\frac{1}{8} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{AKL}) \times \frac{3}{7}$, soit $\frac{1}{8} = \frac{\mathcal{A}(\text{AKL})}{7}$.

$$\mathcal{A}(\text{AKL}) = \frac{7}{8} \text{ (unité d'aire)}.$$

Bac Terminale 2021 — Polynésie française

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1, muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, et le point M défini par $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$. 1. Donner, par lecture graphique, les coordonnées des points B, D, E, G et H.

Dans ce repère : B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1).

2.a Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

Les segments [EG], [GD] et [ED] sont chacun la diagonale d'une face carrée de côté 1 du cube, donc $EG = GD = ED = \sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1) : le triangle EGD est équilatéral, de côté $\sqrt{2}$.

2.b On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Avec $c = \sqrt{2}$, l'aire du triangle EGD vaut $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

$$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de H moins celles de B), donc } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Comme } \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}, \text{ on obtient } x_M - 1 = -\frac{1}{3}, y_M = \frac{1}{3} \text{ et } z_M = \frac{1}{3}.$$

Donc, la réponse est que M a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

4.a Justifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EGD).

$$\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de G moins celles de E), donc } \vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = -1 + 1 + 0 = 0.$$

$$\overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de D moins celles de E), donc } \vec{n} \cdot \overrightarrow{ED} = 0 + 1 - 1 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD) : **c'est donc un vecteur normal à ce plan.**

4.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est $-x + y + z - 1 = 0$.

Un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $-x + y + z + d = 0$, avec d réel à déterminer.

Le point $E(0; 0; 1)$ appartient au plan (EGD), donc ses coordonnées vérifient cette équation : $-0 + 0 + 1 + d = 0 \iff d = -1$.

Donc, la réponse est que le plan (EGD) a pour équation $-x + y + z - 1 = 0$.

4.c Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) passant par M. Montrer qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan (EGD), elle est donc dirigée par le vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de ce plan ; elle passe de plus par $M(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$.

Un point $P(x; y; z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MP} = t\vec{n}$ pour un certain réel t , c'est-à-dire $x - \frac{2}{3} = -t$, $y - \frac{1}{3} = t$ et $z - \frac{1}{3} = t$.

Donc, la réponse est que $\mathcal{D}$ admet pour représentation paramétrique $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

5.a Soit K le pied de la hauteur issue de M dans la pyramide GEDM. Démontrer que les coordonnées de K sont $(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3})$.

La droite $\mathcal{D}$ passe par M et est perpendiculaire au plan (EGD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue de M, et son pied K est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan (EGD).

Les coordonnées de K vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ et l'équation du plan (EGD) : en substituant $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$ dans $-x + y + z - 1 = 0$, on obtient $-(\frac{2}{3} - t) + \frac{1}{3} + t + \frac{1}{3} + t - 1 = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \frac{1}{3}$.

En remplaçant t par $\frac{1}{3}$: $x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Donc, la réponse est que K a pour coordonnées $(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3})$.

5.b En déduire le volume de la pyramide GEDM. On rappelle que le volume d'une pyramide est $V = \frac{b \times h}{3}$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée.

$$\overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de M moins celles de K), donc } KM^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}, \text{ d'où } KM = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

K est le pied de la hauteur issue de M pour la base EGD, donc $h = KM = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $b = \mathcal{A}(\text{EGD}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (question 2.b).

Le volume de la pyramide GEDM vaut donc $V = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{\frac{3}{6}}{3} = \frac{1}{6}$.

Donc, la réponse est que la pyramide GEDM a un volume égal à $\frac{1}{6}$.

Brevet 2020 — Amérique du Nord

1. Si on multiplie la longueur de chaque arête d'un cube par 3, par quel nombre le volume est-il multiplié ?

Un cube d'arête a a pour volume $V = a^3$. Avec une arête $3a$, le volume devient $(3a)^3 = 3^3 \times a^3 = 27 \times a^3$: le volume est multiplié par **27**.

2. Lorsque $x = -4$, que vaut $x^2 + 3x + 4$?

$$(-4)^2 + 3 \times (-4) + 4 = 16 - 12 + 4 = \mathbf{8}.$$

3. Calculer $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

En réduisant au même dénominateur 12 : $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$.

4. Donner la notation scientifique de 1 500 000 000.

$$1\,500\,000\,000 = 1,5 \times 10^9.$$

5. Développer $(x - 2) \times (x + 2)$.

Identité remarquable $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ avec $a = x$ et $b = 2$: $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$.

Brevet 2019 — Métropole, Antilles et Guyane

1. Deux programmes de calcul sont proposés. Programme 1 : choisir un nombre, le multiplier par 3, ajouter 1. Programme 2 : choisir un nombre, soustraire 1 d'un côté et ajouter 2 de l'autre côté au même nombre choisi, puis multiplier les deux résultats obtenus. Vérifier qu'en partant de 5, le programme 1 donne 16 et le programme 2 donne 28.

Programme 1 avec 5 : $5 \times 3 = 15$, puis $15 + 1 = 16$.

Programme 2 avec 5 : $5 - 1 = 4$ et $5 + 2 = 7$, puis $4 \times 7 = 28$.

2.a On note $A(x)$ le résultat du programme 1 pour un nombre de départ x . Exprimer $A(x)$ en fonction de x .

En suivant les étapes du programme 1, on obtient $A(x) = 3x + 1$.

2.b Quel nombre de départ permet d'obtenir 0 comme résultat du programme 1 ?

On résout $A(x) = 0$, soit $3x + 1 = 0$, donc $3x = -1$, d'où $x = -\frac{1}{3}$.

Il faut choisir $-\frac{1}{3}$ au départ.

3. On note $B(x) = (x - 1)(x + 2)$ le résultat du programme 2 en fonction du nombre de départ x . Développer et réduire $B(x)$.

$$B(x) = (x - 1)(x + 2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2.$$

4.a Montrer que $B(x) - A(x) = (x + 1)(x - 3)$.

$$\text{D'une part, } B(x) - A(x) = (x^2 + x - 2) - (3x + 1) = x^2 + x - 2 - 3x - 1 = x^2 - 2x - 3.$$

$$\text{D'autre part, } (x + 1)(x - 3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3.$$

Les deux expressions sont égales : $B(x) - A(x) = (x + 1)(x - 3)$.

4.b Quels nombres de départ permettent d'obtenir le même résultat avec les deux programmes ?

Les deux programmes donnent le même résultat lorsque $A(x) = B(x)$, c'est-à-dire lorsque $B(x) - A(x) = 0$, soit $(x + 1)(x - 3) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si (et seulement si) l'un au moins des facteurs est nul : $x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$, donc $x = -1$ ou $x = 3$.

Les nombres de départ possibles sont -1 et 3 .