

Intégration — Tous les corrigés

LOGIMATHS

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 1)

A.1 Justifier que $a = 1$.

Le point $A(0; 1)$ appartient à la courbe, donc $f(0) = 1$. Or $f(0) = a + \frac{b \ln(1)}{1} = a + 0 = a$. Donc $a = 1$.

A.2.a En utilisant le graphique, donner la valeur de $f'(0)$. Justifier.

La tangente T_A passe par $A(0; 1)$ et semble également passer par le point de coordonnées $(0,5; 3)$ (lecture graphique).

Son coefficient directeur est donc $\frac{3 - 1}{0,5 - 0} = \frac{2}{0,5} = 4$.

$f'(0) = 4$ (coefficient directeur de la tangente en A).

A.2.b En utilisant le graphique, donner le signe de $f''(1)$. Justifier.

Le graphique montre que la courbe atteint son maximum peu avant $x = 1$, puis décroît en restant concave (tournée vers le bas) au voisinage de $x = 1$.

Le signe de $f''(1)$ correspond donc au sens de variation de f' (la pente) à cet endroit, qui diminue juste après le maximum.

$f''(1)$ est négatif.

A.3.a Montrer que, pour tout réel x appartenant à $] -1; +\infty[$, on a $f'(x) = b(1 - \ln(x+1))/(x+1)^2$.

On dérive $\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ par la formule du quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = \ln(x+1)$ et $v = x+1$.

$u' = \frac{1}{x+1}$ et $v' = 1$, donc $u'v - uv' = \frac{1}{x+1} \times (x+1) - \ln(x+1) \times 1 = 1 - \ln(x+1)$.

Donc $f'(x) = b \times \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

A.3.b En déduire la valeur de b .

D'après la question 2.a, $f'(0) = 4$. Or $f'(0) = b \times \frac{1 - \ln(1)}{1^2} = b \times 1 = b$. Donc $b = 4$.

B.1 Justifier que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de f .

Quand $x \rightarrow +\infty$, on sait que $\frac{\ln(x+1)}{x+1} \rightarrow 0$ (limite usuelle du type $\frac{\ln(t)}{t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$).

Donc $f(x) = 1 + \frac{4\ln(x+1)}{x+1} \rightarrow 1 + 0 = 1$ quand $x \rightarrow +\infty$.

La droite d'équation $y = 1$ est donc asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

B.2 Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x+1) > 0$ sur $] -1; +\infty[$.

$1 - \ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) < 1 \Leftrightarrow x+1 < e$ (la fonction $\ln$ étant strictement croissante), soit $x < e - 1$.

L'ensemble des solutions, en tenant compte du domaine $x > -1$, est $] -1; e - 1[$.

B.3 Dresser le tableau de variation complet de f , en indiquant la valeur exacte de son extremum.

Le signe de $f'(x) = \frac{4(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}$ est celui de $1 - \ln(x+1)$ (le dénominateur est toujours positif).

D'après la question précédente, $f'(x) > 0$ sur $] -1; e - 1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]e - 1; +\infty[$: f est donc croissante puis décroissante, avec un maximum en $x = e - 1$.

$f(e - 1) = 1 + \frac{4\ln(e)}{e} = 1 + \frac{4}{e}$ (valeur exacte du maximum).

Aux bornes : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ (admis) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (question B.1).

Tableau : f décroît de $-\infty$ à -1 (exclu), croît de $-\infty$ à $1 + \frac{4}{e}$ sur $] -1; e - 1]$, puis décroît de $1 + \frac{4}{e}$ vers 1 (sans l'atteindre) sur $[e - 1; +\infty[$.

B.4 Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution dans $[2; +\infty[$. En donner une valeur approchée à 10^{-1} .

Sur $[2; +\infty[$ (inclus dans $]e - 1; +\infty[$ puisque $e - 1 \approx 1,72 < 2$), f est continue et strictement décroissante.

$f(2) = 1 + \frac{4\ln(3)}{3} \approx 2,46$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Comme 1,5 est compris entre ces deux valeurs, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), **l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution dans $[2; +\infty[$.**

À l'aide de la calculatrice, on trouve une valeur approchée de cette solution : $x_0 \approx \mathbf{25,1}$.

B.5.a Montrer que l'intégrale de $\ln(x+1)/(x+1)$ entre 0 et 2 est égale à $(\frac{1}{2})(\ln 3)^2$.

On pose $u = \ln(x+1)$, donc $du = \frac{1}{x+1}dx$; quand $x = 0$, $u = \ln(1) = 0$ et quand $x = 2$, $u = \ln(3)$.

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \int_0^{\ln(3)} u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{\ln(3)} = \frac{(\ln 3)^2}{2} - 0 = \frac{1}{2}(\ln 3)^2.$$

B.5.b En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

Sur $[0; 2]$, la fonction f est strictement positive (elle vaut 1 en $x = 0$ et reste au-dessus de 2,4 ensuite) : l'aire cherchée est donc $\int_0^2 f(x) dx$.

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 1 dx + 4 \int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = [x]_0^2 + 4 \times \frac{1}{2}(\ln 3)^2 = 2 + 2(\ln 3)^2.$$

L'aire cherchée est $2 + 2(\ln 3)^2$ **unités d'aire**, soit environ 4,41 u.a.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)

A.1.a À l'aide du graphique, donner $f'(1)$ (la courbe admet une tangente horizontale au point C d'abscisse 1).

La tangente en C (abscisse 1) est parallèle à l'axe des abscisses, donc de coefficient directeur nul : $f'(1) = 0$.

A.1.b Donner la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$ (la courbe coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse $\frac{1}{2}$).

La courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'au point A, d'abscisse $\frac{1}{2}$: la solution de $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$ est $\frac{1}{2}$.

A.2 Déterminer $f'(\frac{1}{2})$ (la tangente en $A(\frac{1}{2}; 0)$ passe par $B(1; e^2)$).

$f'(\frac{1}{2})$ est le coefficient directeur de la tangente en A, c'est-à-dire de la droite (AB) :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{e^2 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = 2e^2.$$

A.3 Parmi les courbes C1, C2 et C3, indiquer lesquelles représentent des primitives de f.

Deux primitives d'une même fonction diffèrent uniquement d'une constante : leurs courbes se déduisent l'une de l'autre par une translation verticale.

C'est le cas de C_1 et C_2 , qui ont la même forme décalée verticalement.

C_3 est décroissante là où f est positive (autour de $x = 0,5$ à $0,7$), ce qui est incompatible avec une primitive de f à cet endroit.

Les courbes C_1 et C_2 représentent des primitives de f .

B.1.a Vérifier que, pour tout x de $[0; +\infty[$, $f(x) = e^2 \times (2x-1)/e^{2x-1}$ (avec $f(x) = (2x-1)e^{-2x+3}$).

On remarque que $-2x + 3 = -(2x - 1) + 2$, donc $e^{-2x+3} = e^{-(2x-1)} \times e^2$.

$$f(x) = (2x - 1) \times e^{-(2x-1)} \times e^2 = e^2 \times \frac{2x - 1}{e^{2x-1}}.$$

B.1.b En déduire la limite de f en $+\infty$ (on pourra poser $X = 2x-1$).

Quand $x \rightarrow +\infty$, $X = 2x - 1 \rightarrow +\infty$, et par croissances comparées $\frac{X}{e^X} \rightarrow 0$.

Donc $\frac{2x-1}{e^{2x-1}} \rightarrow 0$, puis $f(x) = e^2 \times \frac{2x-1}{e^{2x-1}} \rightarrow 0$.

B.2.a Montrer que, pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x) = (-4x+4)e^{-2x+3}$.

En dérivant le produit $f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3}$:

$$f'(x) = 2 \times e^{-2x+3} + (2x - 1) \times (-2)e^{-2x+3} = (2 - 2(2x - 1))e^{-2x+3} = (2 - 4x + 2)e^{-2x+3} = (-4x + 4)e^{-2x+3}.$$

B.2.b Construire le tableau complet des variations de f sur $[0; +\infty[$.

L'exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $(-4x + 4)$, positif avant $x = 1$ et négatif après.

f est donc croissante sur $[0; 1]$ puis décroissante sur $[1; +\infty[$.

$$f(0) = (0 - 1)e^3 = -e^3 \text{ et } f(1) = (2 - 1)e^1 = e.$$

Tableau : f croît de $-e^3$ à e sur $[0; 1]$, puis décroît de e vers 0 (sans l'atteindre) sur $[1; +\infty[$.

B.3 Justifier que la contrainte du client se traduit par $f(\alpha) = 0,15$, puis montrer qu'il existe une unique valeur de α dans $[1; +\infty[$ vérifiant cette égalité. En donner une valeur arrondie au dixième.

Le point $(\alpha; f(\alpha))$ et son symétrique $(\alpha; -f(\alpha))$ par rapport à l'axe des abscisses sont distants verticalement de $2f(\alpha)$.

Cette distance doit valoir 0,3 cm : $2f(\alpha) = 0,3 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0,15$.

Sur $[1; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, de $f(1) = e \approx 2,7$ vers 0 (sans l'atteindre).

Comme $0 < 0,15 < e$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), **l'équation $f(x) = 0,15$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$.**

À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 3,3$.

C.1 À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale I de f entre 0,5 et 3,3 est, arrondie au dixième, égale à 3,6.

On pose $u(x) = 2x - 1$ et $v'(x) = e^{-2x+3}$, donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$.

$$I = [u(x)v(x)]_{0,5}^{3,3} - \int_{0,5}^{3,3} u'(x)v(x) dx = \left[-\frac{1}{2}(2x-1)e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} + \int_{0,5}^{3,3} e^{-2x+3} dx$$

Le crochet vaut $-\frac{1}{2}(5,6e^{-3,6} - 0) = -2,8e^{-3,6}$.

L'intégrale restante vaut $\left[-\frac{1}{2}e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} = -\frac{1}{2}e^{-3,6} + \frac{1}{2}e^2$.

$$I = -2,8e^{-3,6} - 0,5e^{-3,6} + 0,5e^2 = 0,5e^2 - 3,3e^{-3,6} \approx \mathbf{3,6}.$$

C.2 Déterminer le volume du porte-clé en cm^3 , arrondi au dixième (volume = aire du logo $\times$ épaisseur de 0,2 cm).

Le logo est symétrique par rapport à l'axe des abscisses : son aire est le double de l'aire sous la courbe de f entre 0,5 et 3,3, c'est-à-dire $2I \approx 2 \times 3,6 = 7,2 \text{ cm}^2$.

$$\text{Volume} \approx 7,2 \times 0,2 = \mathbf{1,4 \text{ cm}^3}.$$

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)

A.1 Donner les variations de F_2 sur $]0; 3]$.

F_2 est une primitive de f_2 , donc ses variations sont données par le signe de f_2 . D'après le graphique, **F_2 est décroissante sur $]0; 0,3]$, croissante sur $[0,3; 2,5]$, puis décroissante sur $[2,5; 3]$.**

A.2 Identifier les courbes représentant f_2 et f_2' .

f_2 admet un maximum en $x \approx 0,75$ (là où F_2 change de croissante à décroissante) : sa dérivée doit s'y annuler. C'est la **courbe 1** qui s'annule vers 0,75 : elle représente f_2' .

Le point A (point d'inflexion de $\mathcal{C}_2$) est situé vers $x \approx 1,6$: la dérivée seconde s'y annule. C'est la **courbe 2** qui s'annule vers 1,6 : elle représente f_2'' .

B.1.a Montrer que $f_1(x) = -1 - \ln(x)/x^2$.

$f_1 = w + \frac{u}{v}$ avec $w(x) = 1 - x$, $u(x) = 1 + \ln x$, $v(x) = x$, donc $w'(x) = -1$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v'(x) = 1$.

$$f_1'(x) = w'(x) + \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} = -1 + \frac{1 - (1 + \ln x)}{x^2} = -1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

B.1.b Déterminer la limite de $f_1(x)$ en $+\infty$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1'(x) = -1$.

B.2.a Justifier les variations de f_1 et la valeur de l'extremum.

$f_1''(x)$ a le signe de $2 \ln x - 1$ (car $x^3 > 0$), positif pour $x > e^{\frac{1}{2}}$.

f_1' est donc décroissante sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$ puis croissante sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$.

$$f_1'(e^{\frac{1}{2}}) = -1 - \frac{\ln(e^{\frac{1}{2}})}{e} = -1 - \frac{1}{2e} : \text{c'est bien la valeur du minimum du tableau.}$$

B.2.b Justifier la limite de f_1 en 0.

Quand $x \rightarrow 0^+$: $-\ln(x) \rightarrow +\infty$ et $x^2 \rightarrow 0^+$, donc par quotient puis somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1'(x) = +\infty$.

B.2.c Montrer qu'il existe une unique solution α à $f_1(x) = 0$, puis que f_1 admet un maximum.

Sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$, f_1' est continue et strictement décroissante, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1'(x) = +\infty > 0$ et $f_1'(e^{\frac{1}{2}}) = -1 - \frac{1}{2e} < 0$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_1'(x) = 0$ y admet une unique solution.

Sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$, f_1' est strictement croissante et tend vers -1 , donc reste toujours strictement négative : pas de solution sur cet intervalle.

Il existe donc **une unique solution** α à $f_1'(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$, et f_1 **admet un maximum en** α (signe de f_1' positif puis négatif).

B.2.d Compléter le script Python calculant une valeur approchée de α .

- Condition de la boucle « while » : **while d(u) > 0 :**
- Instruction dans la boucle : **u = u + 0.01**

C.1 Montrer que H est une primitive de h .

H est de la forme $\frac{1}{2}u^2$ avec $u(x) = 1 + \ln x$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$, et $H'(x) = u'(x)u(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x) = h(x)$.

H est donc bien une primitive de h sur $]0; +\infty[$.

C.2 Existe-t-il k tel que la valeur moyenne de f sur $[1; e]$ soit nulle ?

La valeur moyenne est $\mu = \frac{1}{e-1} \int_1^e f_k(x) dx = \frac{1}{e-1} \int_1^e (1-x+kh(x)) dx = \frac{1}{e-1} \left[x - \frac{x^2}{2} + kH(x) \right]_1^e$.

$$= \frac{1}{e-1} \left(\left(e - \frac{e^2}{2} + k \frac{(1+1)^2}{2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} + k \frac{(1+0)^2}{2} \right) \right) = \frac{2e - e^2 + 3k - 1}{2(e-1)}.$$

$$\mu = 0 \Leftrightarrow 2e - e^2 + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{e^2 - 2e + 1}{3} = \frac{(e-1)^2}{3}.$$

Oui, il existe une unique valeur $k = \frac{(e-1)^2}{3}$ pour laquelle la valeur moyenne de f_k sur $[1; e]$ est nulle.

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 2)

Partie A — 1.a On considère $f(x) = e \sin(x)$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. Démontrer que $f'(x) = e [\sin(x) + \cos(x)]$ sur cet intervalle.

f est un produit de fonctions dérivables : $f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) = e^x [\sin(x) + \cos(x)]$.

Partie A — 1.b Justifier que f est strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$, et ils ne s'annulent jamais simultanément (sin ne s'annule qu'en 0 où $\cos(0) = 1$, cos ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$ où $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$) : donc $\sin(x) + \cos(x) > 0$ sur cet intervalle.

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , $f'(x) > 0$ comme produit de deux facteurs strictement positifs : f est strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Partie A — 2.a Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.

$$f(0) = e^0 \sin(0) = 0 \text{ et } f'(0) = e^0 [\sin(0) + \cos(0)] = 1.$$

La tangente en 0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$, soit $y = x$.

Partie A — 2.b Démontrer que f est convexe sur $[0; \pi/2]$.

Pour tout réel x : $f''(x) = e^x[\sin(x) + \cos(x)] + e^x[\cos(x) - \sin(x)] = 2e^x \cos(x)$.

Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \geq 0$ et $e^x > 0$, donc $f''(x) \geq 0$: f est convexe sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Partie A — 2.c En déduire que, pour tout réel x de $[0; \pi/2]$, $e \sin(x) \geq x$.

La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier au-dessus de la tangente T d'équation $y = x$ au point d'abscisse 0.

Donc, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $f(x) \geq x$, c'est-à-dire $e^x \sin(x) \geq x$.

Partie A — 3. Justifier que le point d'abscisse $\pi/2$ de la courbe de f est un point d'inflexion.

$f''(x) = 2e^x \cos(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = \frac{\pi}{2}$ (positive avant, négative après, car $\cos$ change de signe en $\frac{\pi}{2}$) : le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est donc un point d'inflexion de la courbe de f .

Partie B — On note $I = \int_0^{\pi/2} e^x \sin(x) dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx$. En intégrant par parties de deux manières différentes, établir $I = 1 + J$ et $I = e^{\pi/2} - J$.

En posant $u(x) = e^x$, $v'(x) = \sin(x)$ (donc $u'(x) = e^x$, $v(x) = -\cos(x)$), l'intégration par parties donne : $I = [-\cos(x)e^x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx = 0 + 1 + J = 1 + J$.

En posant $u(x) = \sin(x)$, $v'(x) = e^x$ (donc $u'(x) = \cos(x)$, $v(x) = e^x$), l'intégration par parties donne : $I = [\sin(x)e^x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx = e^{\pi/2} - J$.

On obtient donc bien $I = 1 + J$ et $I = e^{\pi/2} - J$.

Partie B — En déduire que $I = (1 + e^{\pi/2}) / 2$.

En additionnant les deux relations : $2I = 1 + J + e^{\pi/2} - J = 1 + e^{\pi/2}$, donc $I = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2}$.

Partie B — On note $g(x) = x$. Calculer l'aire exacte du domaine hachuré entre les courbes de f et g sur $[0; \pi/2]$.

D'après la partie A, $f(x) \geq g(x)$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, donc l'aire cherchée est $\mathcal{A} = \int_0^{\pi/2} (f(x) - x) dx =$

$$I - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/2}.$$

$$\mathcal{A} = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2} - \frac{\pi^2}{8} \text{ unités d'aire } (\approx 1,67 \text{ u.a.}).$$

Bac Terminale 2025 — Asie (jour 1)

1.a On considère $g(x) = e^{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$, et $f(x) = e^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$. Montrer que $g'(x) = f(x)$.

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables : $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = f(x)$.

1.b Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)/(4x\sqrt{x})$.

f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$. En dérivant $f = \frac{g}{2\sqrt{x}}$ (avec

$$g' = f) : f'(x) = \frac{f(x) \times 2\sqrt{x} - g(x) \times \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x}.$$

$$\text{En réduisant au même dénominateur : } f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}.$$

2.a Déterminer la limite de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{x} = 0^+, \text{ avec } f(x) > 0 : \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

2.b Interpréter graphiquement ce résultat.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote verticale d'équation $x = 0$** .

3.a Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Par croissances comparées, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$; en posant $u = \sqrt{x}$ (qui tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$), par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3.b Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

Pour tout $x > 0$, $e^{\sqrt{x}} > 0$ et $4x\sqrt{x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{x} - 1$.

$\sqrt{x} - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$: f est donc décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$, avec un minimum $f(1) = \frac{e}{2}$.

3.c Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[1; +\infty[$, avec une valeur approchée à 10^{-1} près.

Sur $[1; +\infty[$, f est continue et strictement croissante, de $f(1) = \frac{e}{2} \approx 1,36$ à $+\infty$.

Comme $2 \in \left[\frac{e}{2}; +\infty\right]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$.

À la calculatrice, $\alpha \approx 4,6$.

4.a On pose $I = \int_1^2 f(x) \, dx$. Calculer I .

D'après la question 1.a, g est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

$$I = [g(x)]_1^2 = \left[e^{\sqrt{x}} \right]_1^2 = e^{\sqrt{2}} - e.$$

4.b Interpréter graphiquement ce résultat.

f étant positive, $I = e^{\sqrt{2}} - e$ représente l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = 2$, en unités d'aire.

5.a On admet que $f''(x) = e^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)/(8x^2\sqrt{x})$. En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ sur $]0; +\infty[$.

En posant $X = \sqrt{x}$, l'expression devient $X^2 - 3X + 3$, un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$.

Comme $\Delta < 0$ et que le coefficient dominant est positif, $X^2 - 3X + 3 > 0$ pour tout réel X , donc $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ pour tout $x > 0$.

5.b Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$: $e^{\sqrt{x}} > 0$, $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ (question précédente) et $8x^2\sqrt{x} > 0$, donc $f''(x) > 0$: f est convexe sur $]0; +\infty[$.

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 2)

Partie A — 1. On considère $f(x) = 1/(a + e^{-bx})$ sur $[0; +\infty[$, avec $a, b > 0$. Par lecture graphique (points A(0 ; 0,5), B(10 ; 1) sur la courbe), donner une valeur approchée de $f(10)$.

Par lecture graphique, $f(10) \approx 0,9$.

Partie A — 2. On admet que la limite de f en $+\infty$ est 1. Interpréter graphiquement.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

Partie A — 3. Justifier que $a = 1$.

$f(0) = \frac{1}{a+1}$, et le point A(0 ; 0,5) appartient à la courbe, donc $\frac{1}{a+1} = 0,5 \iff a+1 = 2 \iff a = 1$.

Partie A — 4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0,5}{10 - 0} = \frac{0,5}{10} = 0,05.$$

Partie A — 5.a Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et b .

f est de la forme $\frac{1}{1+e^{-bx}}$, de dérivée $-\frac{-be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2} = \frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$.

Partie A — 5.b En déduire la valeur de b .

(AB) étant tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0, son coefficient directeur est $f'(0) = \frac{b}{(1+1)^2} = \frac{b}{4}$.

$$\frac{b}{4} = 0,05 \iff b = 0,2.$$

Partie B — 1. On admet que $f(x) = 1/(1+e^{-0,2x})$ sur $[0; +\infty[$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,2x} = 0$ (par composition), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Partie B — 2. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{0,2e^{-0,2x}}{(1+e^{-0,2x})^2} \text{ (même calcul que ci-dessus avec } b = 0,2\text{)}.$$

Pour tout $x \geq 0$, le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs : $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Partie B — 3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0,97$.

$f(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$: f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Comme $0,97 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,97$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.

Partie B — 4. À l'aide de la calculatrice, encadrer α par deux entiers consécutifs et interpréter.

À la calculatrice, $\alpha \approx 17,4$, donc $\alpha \in]17; 18[$.

Partie C — 1. Montrer que, pour tout x de $[0; +\infty[$, $f(x) = e^{0,2x} / (1 + e^{0,2x})$.

En multipliant numérateur et dénominateur de $f(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}}$ par $e^{0,2x}$: $f(x) = \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x} + 1}$.

Partie C — 2. En déduire une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

En écrivant $f(t) = \frac{1}{0,2} \times \frac{0,2e^{0,2t}}{1+e^{0,2t}} = 5 \times \frac{0,2e^{0,2t}}{1+e^{0,2t}}$, on reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u(t) = 1+e^{0,2t} > 0$), de primitive $\ln(u)$.

Une primitive de f est donc $F(t) = 5 \ln(1 + e^{0,2t})$.

Partie C — 3. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0 ; 40]$ (valeur exacte puis approchée au millième).

$$I = \frac{1}{40} \int_0^{40} f(t) dt = \frac{1}{40} [5 \ln(1 + e^{0,2t})]_0^{40} = \frac{5}{40} (\ln(e^8 + 1) - \ln(2)).$$

$$I = \frac{1}{8} \ln\left(\frac{e^8 + 1}{2}\right) \approx \mathbf{0,913}.$$

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 1)

Partie A — 1. On donne la courbe de f , avec la tangente T_A en $A(1 ; 2)$ passant par $C(3 ; 0)$. Déterminer $f'(1)$.

$$f'(1) \text{ est le coefficient directeur de } T_A : \frac{0 - 2}{3 - 1} = -1.$$

Partie A — 2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle sur $]0 ; 3]$?

$f'(x) = 0$ correspond aux points où la tangente est horizontale : d'après le graphique, cela se produit **2 fois** sur $]0 ; 3]$.

Partie A — 3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Sur $[0 ; 0,5]$, la courbe semble concave d'après le graphique, donc $f''(0,2) < 0$.

Partie B — 1. On admet que $f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$ sur $]0 ; +\infty[$. Résoudre $2X^2 - 3X + 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$, et en déduire que la courbe de f ne coupe pas l'axe des abscisses.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0 : \text{l'équation } 2X^2 - 3X + 2 = 0 \text{ n'a pas de solution réelle.}$$

$f(x) = 0 \iff x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2] = 0$. Comme $x > 0$, cela équivaut à $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$, soit, en posant $X = \ln x$, à $2X^2 - 3X + 2 = 0$, qui n'a pas de solution.

L'équation $f(x) = 0$ n'a donc pas de solution : **la courbe de f ne coupe pas l'axe des abscisses.**

Partie B — 2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$ (on admet que la limite en 0 est 0).

$$f(x) = x(\ln x)^2 \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2}\right) = 2.$$

Par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B — 3.a On admet que $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$. Montrer que $f''(x) = (1/x)(4\ln x + 1)$.

$$f''(x) = 2 \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(4 \ln x + 1).$$

Partie B — 3.b Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$ et préciser l'abscisse exacte du point d'inflexion.

Sur $]0; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $4 \ln x + 1$.

$$4 \ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{4} \iff x = e^{-\frac{1}{4}}; 4 \ln x + 1 > 0 \iff x > e^{-\frac{1}{4}}.$$

f est donc **concave** sur $\left]0; e^{-\frac{1}{4}}\right]$ et **convexe** sur $\left[e^{-\frac{1}{4}}; +\infty\right[$, avec un point d'inflexion d'abscisse exacte $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,779$.

Partie B — 3.c Montrer que la courbe de f est au-dessus de la tangente T_B sur $]1; +\infty[$.

Comme $e^{-\frac{1}{4}} < 1$, f est convexe sur $[1; +\infty[$: sur cet intervalle, la courbe est donc au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier T_B .

Partie C — 1. Justifier que la tangente T_B (au point d'abscisse e) a pour équation réduite $y = 2x - e$.

$$f'(e) = 2(\ln e)^2 + \ln e - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 \text{ et } f(e) = e(2 \times 1 - 3 + 2) = e \times 1 = e.$$

La tangente en e a pour équation $y = f'(e)(x - e) + f(e) = 2(x - e) + e = 2x - e$.

Partie C — 2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale de $x \ln x$ entre 1 et e vaut $(e^2 + 1)/4$.

On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$ (donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$).

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\ln x \times \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Partie C — 3. On admet que l'intégrale de $x(\ln x)^2$ entre 1 et e vaut $(e^2 - 1)/4$. En déduire l'aire A du domaine entre la courbe de f , la tangente T_B et les droites $x=1$ et $x=e$.

Sur $[1; e]$, la courbe est au-dessus de T_B , donc $\mathcal{A} = \int_1^e [f(x) - (2x - e)] \, dx = \int_1^e [2x(\ln x)^2 - 3x \ln x + e] \, dx$.

Par linéarité : $\mathcal{A} = 2 \times \frac{e^2 - 1}{4} - 3 \times \frac{e^2 + 1}{4} + [ex]_1^e = \frac{-e^2 - 5}{4} + (e^2 - e)$.

$\mathcal{A} = \frac{3e^2 - 4e - 5}{4}$ unités d'aire (soit environ 1,57 u.a.).

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 2)

Partie A — 1. D'après le graphique (courbe de d , la distance parcourue par un chariot en zone de freinage), au bout de combien de temps le chariot a-t-il parcouru 15 m ?

Par lecture graphique, $d(2) \approx 15$: le chariot a parcouru 15 m au bout de **2 secondes**.

Partie A — 2. Quelle longueur minimale prévoir pour la zone de freinage ?

L'asymptote horizontale Δ de la courbe est proche de $y = 23$: une zone de **23 mètres** semble suffisante.

Partie A — 3. Que vaut $d'(4,7)$? Interpréter.

Le coefficient directeur de la tangente T (passant par $(0 ; 16,5)$ et $(4,7 ; 21)$) vaut $\frac{21 - 16,5}{4,7} \approx 0,96$: $d'(4,7) \approx 0,96$ m/s, c'est la vitesse instantanée du chariot à $t = 4,7$ s.

Partie B — 1.a On modélise la vitesse v , solution de (E) : $y' + 0,6y = e^{-0,6t}$, avec $v(0)=12$. Résoudre (E') : $y' + 0,6y = 0$.

Les solutions de (E') sont les fonctions $t \mapsto Ke^{-0,6t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Partie B — 1.b Soit $g(t) = te^{-0,6t}$. Vérifier que g est solution de (E).

$$g'(t) = e^{-0,6t} - 0,6te^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 0,6t).$$

$$g'(t) + 0,6g(t) = e^{-0,6t}(1 - 0,6t) + 0,6te^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 0,6t + 0,6t) = e^{-0,6t}.$$

g est bien solution de (E).

Partie B — 1.c En déduire les solutions de (E) sur $[0 ; +\infty[$.

Les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto e^{-0,6t}(t + K)$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Partie B — 1.d En déduire que $v(t) = (12 + t)e^{-0,6t}$.

v est de cette forme et vérifie $v(0) = 12 : e^0(0 + K) = 12 \iff K = 12$, donc $v(t) = (12 + t)e^{-0,6t}$.

Partie B — 2.a Montrer que $v'(t) = (-6,2 - 0,6t)e^{-0,6t}$.

v vérifie (E) : $v'(t) + 0,6v(t) = e^{-0,6t}$, donc $v'(t) = e^{-0,6t} - 0,6(12 + t)e^{-0,6t} = e^{-0,6t}(1 - 7,2 - 0,6t) = e^{-0,6t}(-6,2 - 0,6t)$.

Partie B — 2.b En admettant que $v(t) = 12e^{-0,6t} + t/e^{0,6t}$, déterminer la limite de v en $+\infty$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} 12e^{-0,6t} = 0$, et par croissances comparées $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{0,6t}} = 0$: par somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$ (le chariot finit par s'arrêter).

Partie B — 2.c Étudier le sens de variation de v sur $[0; +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

$e^{-0,6t} > 0$ pour tout t , donc $v'(t)$ est du signe de $-6,2 - 0,6t$, qui est strictement négatif pour tout $t \geq 0$.

v est donc strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, de $v(0) = 12$ vers 0.

Partie B — 2.d Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une unique solution α , avec une valeur approchée au dixième.

v est continue (dérivable) et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, de 12 à 0 ; comme $1 \in]0; 12]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $v(t) = 1$ admet une unique solution α .

À la calculatrice : $v(4) \approx 1,5$, $v(5) \approx 0,85$ (donc $4 < \alpha < 5$) ; $v(4,6) \approx 1,05$, $v(4,7) \approx 0,995$: $\alpha \approx 4,7$.

Partie B — 3. Déterminer, en justifiant, au bout de combien de temps le système d'arrêt se déclenche (vitesse ≤ 1 m/s).

D'après la question précédente, $v(t) = 1$ pour $t = \alpha \approx 4,7$ s, et v étant décroissante, $v(t) \leq 1$ pour $t \geq \alpha$: le système se déclenche au bout d'environ 4,7 secondes.

Partie C — 1. On admet que $d(t) = \int_0^t v(x) dx$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $d(t) = e^{-0,6t} \left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}$.

On pose $u(x) = 12 + x$ et $v'(x) = e^{-0,6x}$ (donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\frac{1}{0,6}e^{-0,6x}$).

$$d(t) = \left[-(12 + x) \times \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} \right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} dx = \left[-(12 + x) \times \frac{1}{0,6} e^{-0,6x} - \frac{1}{0,36} e^{-0,6x} \right]_0^t.$$

En simplifiant ($\frac{1}{0,6} = \frac{5}{3}$ et $\frac{1}{0,36} = \frac{25}{9}$) : $d(t) = e^{-0,6t} \left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}$.

Partie C — 2. Déterminer, au centième près, la distance parcourue par le chariot avant le déclenchement du dispositif d'arrêt.

Le dispositif se déclenche à $t \approx 4,7$ s : $d(4,7) = e^{-0,6 \times 4,7} \left(-\frac{5}{3} \times 4,7 - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9} \approx 20,95$ m.

Bac Terminale 2025 — Polynésie française (jour 2)

On donne $E = 1, \dots, 7$ et $F = 0, \dots, 9$. Affirmation 1 : il y a plus de 3-uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F . Vraie ou fausse ?

Les 3-uplets d'éléments distincts de E (ordre compté, sans répétition) : $\frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

Les combinaisons à 4 éléments de F : $\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$.

Les deux quantités sont égales ($210 = 210$), pas l'une supérieure à l'autre : **l'affirmation est fausse**.

On représente la fonction carré f et un carré ABCD de côté 3. Affirmation 2 : la zone hachurée (sous la courbe de f entre 0 et 3) et le carré ABCD ont la même aire. Vraie ou fausse ?

L'aire du carré ABCD est $3^2 = 9$ unités d'aire.

L'aire sous la courbe (f positive) est $\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9$ unités d'aire.

Les deux aires sont égales : **l'affirmation est vraie**.

On considère J , l'intégrale de $x \ln(x)$ entre 1 et 2. Affirmation 3 : une intégration par parties donne $J = \frac{7}{11}$. Vraie ou fausse ?

On pose $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $v(x) = \ln(x)$ (donc $u'(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$).

$$J = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x dx = 2 \ln(2) - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 2 \ln(2) - \frac{3}{4} \approx 0,636.$$

Or $\frac{7}{11} \approx 0,6364$: $J \neq \frac{7}{11}$ (l'écart est réel bien que très faible). **L'affirmation est fausse**.

On considère (E) : $y' = 2y - e^x$. Affirmation 4 : $f(x) = e^x + e^{2x}$ est solution de (E). Vraie ou fausse ?

$$f'(x) = e^x + 2e^{2x}.$$

$$2f(x) - e^x = 2(e^x + e^{2x}) - e^x = e^x + 2e^{2x} = f'(x).$$

f vérifie bien (E) : **l'affirmation est vraie**.

Soit $x \in [0 ; 1[$. On pose $u_n = (x - 1)e^n + \cos(n)$. Affirmation 5 : la suite (u_n) diverge vers $-\infty$. Vraie ou fausse ?

$x \in [0 ; 1[$, donc $x - 1 \in [-1 ; 0[$ est strictement négatif.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty \text{ et } (x - 1) < 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (x - 1)e^n = -\infty, \text{ puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} [(x - 1)e^n + 1] = -\infty.$$

Comme $\cos(n) \leq 1$ pour tout n : $u_n \leq (x-1)e^n + 1$, donc par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
L'affirmation est vraie.

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. Une fonction f est représentée par une courbe $\mathcal{C}$ sur $[0 ; +\infty[$, avec une tangente T au point A d'abscisse $\frac{5}{2}$. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de f sur $[0 ; 5]$.

Par lecture graphique, f croît de $f(0) = -5,5$ jusqu'à un maximum d'environ 2,4 atteint en $x = 1,5$, puis décroît jusqu'à environ 0,35 en $x = 5$.

Partie A — 2. Que semble présenter la courbe $\mathcal{C}$ au point A ?

La courbe semble traverser sa tangente au point A : elle semble y admettre un **point d'inflexion**.

Partie A — 3. Deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentent f' et f'' . Associer chaque fonction à sa courbe, en justifiant.

f est croissante sur $[0 ; 1,5[$ puis décroissante : f' est positive puis négative, ce qui correspond à la courbe $\mathcal{C}_2$.

f est concave sur $[0 ; 2,5[$ puis convexe : f'' est négative puis positive, ce qui correspond à la courbe $\mathcal{C}_1$.

Partie A — 4. La courbe $\mathcal{C}_3$ peut-elle représenter une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$?

Une primitive F de f vérifie $F' = f$; comme f est négative sur $[0 ; 0,5[$ puis positive, F devrait être décroissante puis croissante. Or la courbe $\mathcal{C}_3$ fait exactement l'inverse : **elle ne peut pas représenter une primitive de f .**

Partie B — 1.a On considère désormais $f(x) = (4x-2)e^{-x+1}$ sur $[0 ; +\infty[$. Montrer que $f'(x) = (-4x+6)e^{-x+1}$.

$$f'(x) = 4e^{-x+1} + (4x-2) \times (-e^{-x+1}) = (4-4x+2)e^{-x+1} = (-4x+6)e^{-x+1}.$$

Partie B — 1.b En déduire le tableau complet des variations de f sur $[0 ; +\infty[$ (on admet que la limite en $+\infty$ vaut 0).

$e^{-x+1} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-4x+6$: positif pour $x < \frac{3}{2}$, négatif au-delà.

f croît de $f(0) = -2e \approx -5,44$ jusqu'à son maximum $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4e^{-\frac{1}{2}} \approx 2,43$, puis décroît vers 0 en $+\infty$ — en cohérence avec la lecture graphique de la partie A.

Partie B — 1.c Étudier la convexité de f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

$$f''(x) = -4e^{-x+1} + (-4x + 6) \times (-e^{-x+1}) = (4x - 10)e^{-x+1}, \text{ du signe de } 4x - 10.$$

f est donc **concave** sur $\left[0 ; \frac{5}{2}\right]$ **et convexe** sur $\left[\frac{5}{2} ; +\infty\right]$, avec un point d'inflexion à l'abscisse $\frac{5}{2}$ (le point A).

Partie B — 2.a Soit $F(x) = (ax + b)e^{-x+1}$. Déterminer a et b pour que F soit une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.

$$F'(x) = ae^{-x+1} - (ax + b)e^{-x+1} = (-ax + a - b)e^{-x+1}.$$

$F' = f$ impose, par identification (car $e^{-x+1} > 0$) : $-a = 4$ et $a - b = -2$, soit $a = -4$ et $b = -2$.

Partie B — 2.b En déduire la valeur exacte, puis approchée à 10^{-2} près, de $I = \int_{\frac{3}{2}}^8 f(x) dx$.

$$I = \left[(-4x - 2)e^{-x+1}\right]_{\frac{3}{2}}^8 = -34e^{-7} + 8e^{-\frac{1}{2}} \approx \mathbf{4,82}.$$

Partie B — 3.a Le profil d'une piste de trottinette est donné par la courbe de f sur $\left[\frac{3}{2} ; 8\right]$ (unité : le mètre). Donner, au cm près, la hauteur du point de départ D.

$$\text{La hauteur du départ vaut } f\left(\frac{3}{2}\right) = 4e^{-\frac{1}{2}} \approx \mathbf{2,43 \text{ m}}.$$

Partie B — 3.b Une artiste couvre 75 % du mur de profil ; une bombe de 150 mL couvre $0,8 \text{ m}^2$. Combien de bombes faut-il ?

L'aire du mur vaut $I \approx 4,82 \text{ m}^2$; 75 % de cette surface représente $0,75 \times 4,82 \approx 3,62 \text{ m}^2$.

$$\frac{3,62}{0,8} \approx 4,5 : \text{il faudra } \mathbf{5 \text{ bombes}} \text{ de peinture.}$$

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 1)

Affirmation 1. Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0. Vraie ou fausse ?

Une telle suite converge vers une limite $\ell \geqslant 0$, mais pas nécessairement 0 : par exemple, la suite $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ est décroissante, minorée par 0, et converge vers 1. **L'affirmation est fausse.**

Affirmation 2. Si, pour tout entier n , $u_n \leq \frac{-9^n + 3^n}{7^n}$, alors $\lim u_n = -\infty$. Vraie ou fausse ?

$\frac{-9^n + 3^n}{7^n} = -\left(\frac{9}{7}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$; comme $\left(\frac{9}{7}\right)^n \rightarrow +\infty$ et $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 1$, le majorant tend vers $-\infty$.

Par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 3. La fonction Python 'terme(N)' initialise $U=1$ puis effectue $U=U+i$ pour i dans $\text{range}(N)$. L'appel `terme(4)` renvoie 7. Vraie ou fausse ?

Les valeurs successives de U sont : $1 + 0 = 1$, puis $1 + 1 = 2$, puis $2 + 2 = 4$, puis $4 + 3 = 7$.

L'affirmation est vraie.

Affirmation 4. Prix A : 1 000 € par jour pendant 15 jours. Prix B : 1 € le 1er jour, la somme double chaque jour pendant 15 jours. Le prix A vaut plus que le prix B. Vraie ou fausse ?

Prix A : $1\,000 \times 15 = 15\,000$ €.

Prix B : somme des 15 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2, soit $\frac{1 - 2^{15}}{1 - 2} = 2^{15} - 1 = 32\,767$ €.

$32\,767 > 15\,000$: **l'affirmation est fausse**, le prix B est nettement plus avantageux.

Affirmation 5. La suite $v_n = \int_1^n \ln(x) \, dx$ (pour $n \geq 1$) est croissante. Vraie ou fausse ?

Par la relation de Chasles : $v_{n+1} - v_n = \int_n^{n+1} \ln(x) \, dx$.

Sur $[n ; n+1] \subset [1 ; +\infty[$, $\ln(x) \geq 0$: cette intégrale est positive, donc $v_{n+1} \geq v_n$. **L'affirmation est vraie.**

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 1)

Partie A — 1.a Soit $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

En 0 : $x - 2 \rightarrow -2$ et $\ln(x) \rightarrow -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. En $+\infty$: les deux termes tendent vers $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie A — 1.b Montrer que $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{2x+1}{2x}.$$

Partie A — 1.c Étudier le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.

Pour $x > 0$, numérateur et dénominateur de $f'(x)$ sont strictement positifs : $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Partie A — 1.d Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$.

$$f''(x) = -\frac{1}{2x^2} < 0 : f \text{ est concave sur }]0 ; +\infty[.$$

Partie A — 2.a Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α , appartenant à $[1 ; 2]$.

f est continue et strictement croissante, de $-\infty$ à $+\infty$: par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution α .

$$f(1) = -1 < 0 \text{ et } f(2) = \frac{\ln 2}{2} > 0 : \text{donc } \alpha \in [1 ; 2].$$

Partie A — 2.b Déterminer le signe de $f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

f étant strictement croissante et s'annulant en α : $f(x) < 0$ sur $]0 ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, et $f(x) > 0$ sur $] \alpha ; +\infty[$.

Partie A — 2.c Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha - 2 + \frac{1}{2} \ln(\alpha) = 0 \iff \frac{1}{2} \ln(\alpha) = 2 - \alpha \iff \ln(\alpha) = 2(2 - \alpha).$$

Partie B — 1. Soit $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln(x)$ sur $]0 ; 1]$. Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$g'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}(2x \ln(x) + x) = 1 - 2x - \frac{x \ln(x)}{2}.$$

$$\text{En factorisant par } x : g'(x) = x \left(\frac{1}{x} - 2 - \frac{\ln(x)}{2} \right) = x \left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right) = xf \left(\frac{1}{x} \right).$$

Partie B — 2.a Justifier que, pour $x \in \left] 0 ; \frac{1}{\alpha} \right[$, $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

Si $0 < x < \frac{1}{\alpha}$, alors $\frac{1}{x} > \alpha$, et f est strictement positive sur $] \alpha ; +\infty[$: donc $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

Partie B — 2.b En déduire le tableau de variations de g sur $]0 ; 1]$.

$g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ est du signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ (car $x > 0$) : g est croissante sur $\left] 0 ; \frac{1}{\alpha} \right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{1}{\alpha} ; 1 \right]$, avec un maximum en $\frac{1}{\alpha}$.

Partie C — 1.a Justifier la position relative de $\mathcal{C}_g$ et de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur $]0 ; 1]$.

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2 \ln(x) \geq 0 \text{ sur }]0 ; 1] \text{ (car } \ln(x) \leq 0) : \mathcal{C}_g \text{ est au-dessus de } \mathcal{P}.$$

Partie C — 1.b Démontrer que $\int_{1/\alpha}^1 x^2 \ln(x) dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$.

$$\begin{aligned} \text{Par intégration par parties avec } u(x) = \ln(x) \text{ et } v'(x) = x^2 : \int_{1/\alpha}^1 x^2 \ln(x) dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} \right]_{1/\alpha}^1 = \\ &= -\frac{1}{9} - \frac{1}{3\alpha^3} \left(-\ln(\alpha) - \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

$$\text{En remplaçant } \ln(\alpha) \text{ par } 2(2 - \alpha) : = -\frac{1}{9} + \frac{4}{3\alpha^3} - \frac{2}{3\alpha^2} + \frac{1}{9\alpha^3} = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}.$$

Partie C — 2. En déduire l'expression, en fonction de α , de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{P}$, et les droites $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

$$\mathcal{A} = \int_{1/\alpha}^1 \left(-\frac{1}{4}x^2 \ln(x) \right) dx = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3} \approx 0,07 \text{ unité d'aire.}$$

Bac Terminale 2024 — Polynésie française (jour 2)

QCM — 1. Quelle est la fonction f , solution de $y' = -3y + 7$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$? A. $f(x) = e^{-3x}$ B. $f(x) = -\frac{4}{3}e^{-3x} + \frac{7}{3}$ C. $f(x) = e^{-3x} + \frac{7}{3}$ D. $f(x) = -\frac{10}{3}e^{-3x} - \frac{7}{3}$

Les solutions de $y' = -3y$ sont les fonctions $x \mapsto Ke^{-3x}$ ($K \in \mathbb{R}$) ; une solution constante α de $y' = -3y + 7$ vérifie $0 = -3\alpha + 7$, soit $\alpha = \frac{7}{3}$.

Les solutions de $y' = -3y + 7$ sont donc $x \mapsto Ke^{-3x} + \frac{7}{3}$. La condition $f(0) = 1$ donne $K + \frac{7}{3} = 1 \iff K = -\frac{4}{3}$: **réponse B.**

QCM — 2. La courbe d'une fonction f positive sur $[0 ; +\infty[$ est donnée dans le sujet, quadrillée en carreaux d'aire 1. Un encadrement de $I = \int_1^5 f(x) dx$ est proposé parmi : A. $0 \leq I \leq 4$ B. $1 \leq I \leq 5$ C. $5 \leq I \leq 10$ D. $10 \leq I \leq 15$.

La courbe étant positive sur $[1 ; 5]$, I est l'aire sous la courbe entre les droites $x = 1$ et $x = 5$; en comptant les carreaux du quadrillage, cette aire est comprise entre 5 et 10 unités d'aire : **réponse C.**

QCM — 3. Soit $g(x) = x^2 \ln(x^2 + 4)$ définie sur $\mathbb{R}$. Que vaut $\int_0^2 g'(x) dx$ à 10^{-1} près ? A. 4,9 B. 8,3 C. 1,7 D. 7,5

g est une primitive de g' , donc $\int_0^2 g'(x) dx = g(2) - g(0) = 4 \ln(8) - 0 = 4 \ln(8)$.

$4 \ln(8) = 4 \ln(2^3) = 12 \ln(2) \approx 8,3$: réponse B.

QCM — 4. Une professeure veut former un groupe de 5 élèves parmi 31. Combien de groupes différents peut-elle former ? A. 31^5 B. $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$ C. $31 + 30 + 29 + 28 + 27$ D. $\binom{31}{5}$

Un groupe est un choix de 5 élèves parmi 31 sans ordre ni répétition : le nombre de possibilités est $\binom{31}{5}$: réponse D.

QCM — 5. Parmi ces 31 élèves : 10 font physique-chimie, 20 font SES, 1 fait LLCE espagnol. Combien de groupes de 5 élèves comportant exactement 3 élèves de SES peut-on former ? A. $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$ B. $\binom{20}{3} + \binom{11}{2}$ C. $\binom{20}{3}$ D. $20^3 \times 11^2$

Il faut choisir 3 élèves parmi les 20 faisant SES, soit $\binom{20}{3}$ façons, puis 2 élèves parmi les $31 - 20 = 11$ élèves ne faisant pas SES, soit $\binom{11}{2}$ façons ; les deux choix étant indépendants, le nombre total de groupes est $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$: réponse A.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1 + 2^n}{3 + 5^n}$. Quel est son comportement : diverge vers $+\infty$, converge vers $\frac{2}{5}$, converge vers 0, ou converge vers $\frac{1}{3}$?

En factorisant numérateur et dénominateur par 5^n : $u_n = \frac{5^n \left(\frac{1}{5^n} + \left(\frac{2}{5} \right)^n \right)}{5^n \left(\frac{3}{5^n} + 1 \right)} = \frac{\left(\frac{2}{5} \right)^n + \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{3}{5^n}}$.

Les suites géométriques de raisons $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{5}$, toutes deux strictement comprises entre -1 et 1 , convergent vers 0 : par limite de somme puis de quotient, u_n converge vers $\frac{0 + 0}{1 + 0} = 0$.

Réponse : la suite converge vers 0.

2. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$. Quelle est l'expression de $f'(x)$?

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$f'(x) = 2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x = x(2 \ln(x) + 1).$$

Réponse : $f'(x) = x(2 \ln(x) + 1)$.

3. Une fonction h , continue sur $\mathbb{R}$, admet le tableau de variations suivant : h décroît de $+\infty$ (en $-\infty$) jusqu'à $-\infty$... en réalité h croît de $-\infty$ vers $+\infty$, en s'annulant en $x = 1$. On note H la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Que peut-on affirmer : H positive sur $] - \infty ; 0]$, H croissante sur $] - \infty ; 1]$, H négative sur $] - \infty ; 1]$, ou H croissante sur $\mathbb{R}$?

h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 1, donc $h(x) < 0$ pour tout $x < 1$.

H étant une primitive de h , on a $H' = h$: ainsi $H'(x) < 0$ sur $] - \infty ; 1[$, donc H est strictement décroissante sur cet intervalle.

Pour tout $x \leq 0$, x et 0 appartiennent à $] - \infty ; 1[$ où H décroît, donc $x \leq 0 \implies H(x) \geq H(0)$.

Or $H(0) = 0$ par définition de H , donc $H(x) \geq 0$ sur $] - \infty ; 0]$.

Réponse : H est positive sur $] - \infty ; 0]$.

4. Soit $a < b$ deux réels et f une fonction définie, continue et strictement croissante sur $[a ; b]$, qui s'annule en un réel α . Parmi quatre fonctions Python proposées (méthode de dichotomie), laquelle donne bien une valeur approchée de α à 0,001 près ?

Le programme correct doit recalculer le milieu $m = \frac{a+b}{2}$ à chaque tour de boucle (et non une seule fois avant la boucle), avec un test d'arrêt `\og tant que l'écart dépasse 0,001 \fg` correctement écrit.

Comme f est strictement croissante sur $[a ; b]$ et s'annule en α , on a $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Si $f(m) < 0$, alors α se trouve entre m et b : il faut donc remplacer a par m (et garder b) pour l'itération suivante ; sinon, on remplace b par m .

Seule la version qui recalcule m à l'intérieur de la boucle, avec la condition `'while abs(b-a) >= 0.001'`, et l'affectation `'a = m'` quand $f(m) < 0$, respecte ce principe.

Réponse : le programme qui recalcule m dans la boucle et affecte $a = m$ lorsque $f(m) < 0$.

5. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont 7 bleues et 3 vertes. On effectue trois tirages successifs avec remise. Quelle expression donne la probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes ?

Chaque tirage est une épreuve à deux issues (`\og verte \fg` ou pas), de probabilité de succès $p = \frac{3}{10}$, répétée $n = 3$ fois de façon identique et indépendante (tirages avec remise).

En notant X le nombre de boules vertes obtenues, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3; \frac{3}{10}\right)$.

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^1 = \binom{3}{2} \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{3}{10}\right)^2.$$

Réponse : $\binom{3}{2} \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{3}{10}\right)^2$.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. On pose $f(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$. Parmi $F(x) = \frac{x^2}{2}e^x$, $F(x) = (x-1)e^x$, $F(x) = (x+1)e^x$ et $F(x) = \frac{2}{x}e^{x^2}$, laquelle est une primitive de f sur $\mathbb{R}$?

Testons $F(x) = (x-1)e^x$, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, avec $u(x) = x-1$ et $v(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.

$$F' = u'v + uv' \text{ donc } F'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x = f(x) \text{ pour tout réel } x.$$

Donc, la réponse est $F(x) = (x-1)e^x$.

2. La courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ admet un maximum en $x=3$ et un unique point d'inflexion d'abscisse 5. Que peut-on affirmer parmi : f et f' de même signe sur $]0; 5[$; f et f' de même signe sur $]5; +\infty[$; f' et f'' de même signe sur $]0; 5[$; f et f'' de même signe sur $]5; +\infty[$?

Par lecture graphique de $\mathcal{C}$, $f(x) < 0$ sur $]0; 1[$ et $f(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$.

Le maximum étant atteint en $x=3$, $f'(x) > 0$ sur $]0; 3[$ et $f'(x) < 0$ sur $]3; +\infty[$.

Le seul point d'inflexion étant d'abscisse 5, et la courbe étant concave puis convexe, $f''(x) < 0$ sur $]0; 5[$ et $f''(x) > 0$ sur $]5; +\infty[$.

Sur $]5; +\infty[$, $f(x) > 0$ et $f''(x) > 0$: ces deux fonctions sont donc de même signe sur cet intervalle.

Donc, la réponse est « f et f'' sont de même signe sur $]5; +\infty[$ ».

3. Soit g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = \frac{a}{b+e^{-t}}$, avec $g(0) = 2$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 3$. Déterminer a et b parmi les couples $(2; 3)$, $\left(4; \frac{4}{3}\right)$, $(4; 1)$ et $(6; 2)$.

$$g(0) = \frac{a}{b+e^0} = \frac{a}{b+1} = 2, \text{ donc } a = 2(b+1) = 2b+2.$$

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-t) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, on a par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} (b+e^{-t}) = b$ et, par quotient, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \frac{a}{b}$.

Donc $\frac{a}{b} = 3$, soit $a = 3b$. En combinant avec $a = 2b+2$: $3b = 2b+2$, donc $b = 2$, puis $a = 3 \times 2 = 6$.

Donc, la réponse est $a = 6$ et $b = 2$.

4. Alice tire au hasard une urne parmi A (2 boules vertes, 2 rouges) et B (3 boules vertes, 1 rouge), puis une boule dans cette urne, et obtient une boule verte. Quelle est la probabilité qu'elle ait choisi l'urne B, parmi $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{8}$?

Notons A et B le choix de chaque urne, et V l'évènement « la boule tirée est verte ». On a $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P_A(V) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $P_B(V) = \frac{3}{4}$.

$$P(V \cap B) = P(B) \times P_B(V) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

Comme A et B forment une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne $P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

$$\text{On cherche } P_V(B) = \frac{P(V \cap B)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{8} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{5}.$$

Donc, la réponse est $\frac{3}{5}$.

5. On pose $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}$. Parmi quatre scripts Python (a, b, c, d) proposés pour calculer S , lequel convient ?

- Le script a réaffecte S à chaque tour de boucle sans cumuler les termes précédents : il renvoie seulement le dernier terme, pas la somme — écarté.
- Le script c initialise un compteur k mais teste la condition sur une variable S qui n'a pas été initialisée avant la boucle : il provoque une erreur — écarté.
- Le script d initialise k à 0 mais ne l'incrmente jamais dans la boucle : la condition ' $k < 100$ ' reste indéfiniment vraie, la boucle ne s'arrête jamais — écarté.
- Le script b initialise S à 0, puis cumule bien $S = S + 1/(k+1)$ pour k allant de 0 à 99 : c'est le seul qui calcule correctement S .

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 1)

1. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$, deux fois dérivable, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

En 0 : on écrit $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + 1 - 0 = 1$.

En $+\infty$: on factorise, $f(x) = x(3 - 2 \ln(x)) + 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2 \ln(x)) = -\infty$, et donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(3 - 2 \ln(x)) = -\infty$. On en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2.a Démontrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$.

En dérivant chaque terme : $f'(x) = 3 - 2\ln(x) - 2x \times \frac{1}{x} = 3 - 2\ln(x) - 2 = 1 - 2\ln(x)$.

2.b Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$, en faisant apparaître les limites et la valeur exacte de l'extremum.

On résout $f'(x) > 0 \iff 1 - 2\ln(x) > 0 \iff \ln(x) < \frac{1}{2} \iff x < e^{\frac{1}{2}}$ (la fonction exponentielle étant strictement croissante). Donc f' est strictement positive sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}[$ et strictement négative sur $]e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}[$ puis strictement décroissante sur $]e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$, avec un maximum en $x = e^{\frac{1}{2}}$ valant $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - 2e^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} = 3e^{\frac{1}{2}} + 1 - e^{\frac{1}{2}} = 2e^{\frac{1}{2}} + 1 \approx 4,3$.

Le tableau de variation part de la limite 1 en 0, croît jusqu'au maximum $2e^{\frac{1}{2}} + 1$ en $x = e^{\frac{1}{2}}$, puis décroît vers $-\infty$.

3.a Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable, donc continue, sur $]0 ; +\infty[$.

Sur $]0 ; e^{\frac{1}{2}}[$, f est strictement croissante et sa valeur minimale y est $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 > 0$: f y est donc strictement positive, et l'équation $f(x) = 0$ n'y a pas de solution.

Sur $]e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante, passant de la valeur $2e^{\frac{1}{2}} + 1 > 0$ à $-\infty$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ y admet une unique solution, notée α .

Donc, la réponse est que $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$, avec $\alpha > e^{\frac{1}{2}}$.

3.b En déduire le signe de f sur $]0 ; +\infty[$.

D'après les variations de f et le résultat précédent : $f(x) > 0$ sur $]0 ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, et $f(x) < 0$ sur $]\alpha ; +\infty[$.

4. Soit F une primitive quelconque de f sur $]0 ; +\infty[$. Peut-on affirmer que F est strictement décroissante sur $]e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$?

Non. Par définition d'une primitive, $F' = f$. Or f est strictement positive sur $]e^{\frac{1}{2}} ; \alpha[$ (question 3.b), donc F est strictement croissante sur cet intervalle, ce qui contredit l'affirmation proposée : F n'est pas décroissante sur tout $]e^{\frac{1}{2}} ; +\infty[$.

5.a Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes.

La dérivée seconde vaut $f''(x) = -2 \times \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$, strictement négative sur $]0 ; +\infty[$. La fonction f est donc **concave** sur cet intervalle, ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **en dessous de chacune de ses tangentes**.

5.b Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

On a $f(1) = 3 \times 1 + 1 - 2 \times 1 \times \ln(1) = 4 - 0 = 4$ et $f'(1) = 1 - 2 \ln(1) = 1$.

L'équation de la tangente en un point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, donc ici $y = 1 \times (x - 1) + 4$, soit $T : y = x + 3$.

5.c En déduire que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$.

Puisque $\mathcal{C}_f$ est sous chacune de ses tangentes (question 5.a), elle est en particulier sous T : pour tout $x > 0$, $f(x) \leq x + 3$.

Cette inégalité s'écrit $3x + 1 - 2x \ln(x) \leq x + 3$, soit $2x - 2 \leq 2x \ln(x)$. En divisant par $2x > 0$: $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x)$.

Donc, la réponse est que pour tout réel x strictement positif, $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$.

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 1)

1. Affirmation : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$ est convexe. Vrai ou faux ?

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = e^x - 1$ puis $f''(x) = e^x$. Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , f'' est positive sur $\mathbb{R}$. Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie** : f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Affirmation : l'équation $(2e^x - 6)(e^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution réelle. Vrai ou faux ?

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul : $2e^x - 6 = 0$ ou $e^x + 2 = 0$.

Comme $e^x > 0$ pour tout x , on a $e^x + 2 > 2 > 0$: cette équation n'a donc aucune solution.

L'autre équation donne $2e^x = 6 \iff e^x = 3 \iff x = \ln(3)$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle, cette solution est unique).

Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie**.

3. Affirmation : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = 0$. **Vrai ou faux ?**

On factorise par le terme dominant de chaque membre : $\frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = \frac{e^{2x}(1 - e^{-2x})}{e^x(1 - xe^{-x})} = e^x \times \frac{1 - e^{-2x}}{1 - xe^{-x}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$ donc le numérateur de la fraction tend vers 1 ; et $xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc le dénominateur tend aussi vers 1.

Le quotient tend donc vers 1, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = +\infty$.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** (la limite vaut $+\infty$, pas 0).

4. Affirmation : avec $f(x) = (6x + 5)e^{3x}$ et $F(x) = (2x + 1)e^{3x} + 4$ sur $\mathbb{R}$, F est la primitive de f qui vaut 5 en $x = 0$. **Vrai ou faux ?**

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables : $F'(x) = 2e^{3x} + 3(2x + 1)e^{3x} = e^{3x}(2 + 6x + 3) = (6x + 5)e^{3x} = f(x)$.

De plus $F(0) = (2 \times 0 + 1)e^0 + 4 = 1 + 4 = 5$.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie** : F est bien la primitive de f sur $\mathbb{R}$ valant 5 en 0.

5. On considère une fonction Python ‘mystere(L)’ qui parcourt une liste L, cumule la somme S de ses éléments, puis renvoie S divisée par la longueur de L (la moyenne des éléments). Affirmation : ‘mystere([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5])’ renvoie 50. **Vrai ou faux ?**

La somme des dix éléments de la liste vaut $1 + 9 + 9 + 5 + 0 + 3 + 6 + 12 + 0 + 5 = 50$, et la fonction renvoie cette somme divisée par la longueur de la liste (ici 10), soit $\frac{50}{10} = 5$. Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** (le résultat renvoyé vaut 5, pas 50).

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + x^2)$. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2022$: **a. n'a aucune solution ; b. a exactement une solution ; c. a exactement deux solutions ; d. a une infinité de solutions.**

$$f(x) = 2022 \iff \ln(1 + x^2) = 2022 \iff 1 + x^2 = e^{2022} \iff x^2 = e^{2022} - 1.$$

Le réel $e^{2022} - 1$ est strictement positif, donc cette dernière équation a exactement deux solutions opposées : $x = \sqrt{e^{2022} - 1}$ et $x = -\sqrt{e^{2022} - 1}$.

Donc, la réponse est **c**.

2. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x \ln(x) - x^2$, de courbe représentative $\mathcal{C}_g$. a. g est convexe sur $]0 ; +\infty[$; b. g est concave sur $]0 ; +\infty[$; c. $\mathcal{C}_g$ a exactement un point d'inflexion sur $]0 ; +\infty[$; d. $\mathcal{C}_g$ a exactement deux points d'inflexion sur $]0 ; +\infty[$.

g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables, avec $g'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 2x = \ln(x) - 2x + 1$.

g' est à son tour dérivable sur $]0 ; +\infty[$, avec $g''(x) = \frac{1}{x} - 2$.

$g''(x) = 0 \iff \frac{1}{x} = 2 \iff x = \frac{1}{2}$. De plus, $g''(x) = \frac{1-2x}{x}$ change de signe en $x = \frac{1}{2}$ (positif avant, négatif après, car $x > 0$).

g'' s'annule en changeant de signe une seule fois sur $]0 ; +\infty[$, donc $\mathcal{C}_g$ admet exactement un point d'inflexion, d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Donc, la réponse est **c**.

3. On considère la fonction f définie sur $] -1 ; 1[$ par $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Une primitive de f sur $] -1 ; 1[$ est la fonction : a. $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$; b. $g(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$; c. $g(x) = \frac{x^2}{2 \left(x - \frac{x^3}{3}\right)}$;

d. $g(x) = \frac{x^2}{2} \ln(1-x^2)$.

Testons la fonction g de la réponse a, définie par $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$ sur $] -1 ; 1[$.

En posant $u(x) = 1-x^2$, dérivable et strictement positive sur $] -1 ; 1[$, on a $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(u(x))$, donc $g'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} = f(x)$.

La fonction g de la réponse a est donc bien une primitive de f sur $] -1 ; 1[$.

Donc, la réponse est **a**.

4. La fonction $x \mapsto \ln(-x^2 - x + 6)$ est définie sur : a. $] -3 ; 2[$; b. $] -\infty ; 6]$; c. $]0 ; +\infty[$; d. $]2 ; +\infty[$.

Cette fonction est définie exactement là où $-x^2 - x + 6 > 0$, c'est-à-dire là où $x^2 + x - 6 < 0$.

Le trinôme $x^2 + x - 6$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$, donc deux racines réelles $x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$.

Un trinôme du second degré de coefficient dominant positif est strictement négatif strictement entre ses deux racines : $x^2 + x - 6 < 0 \iff x \in] -3 ; 2[$.

La fonction est donc définie sur $] -3 ; 2[$, ce qui correspond à la réponse a.

5. On considère la fonction f définie sur $]0,5 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x - 1)$. Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est : a. $y = 4x - 7$; b. $y = 2x - 4$; c. $y = -3(x - 1) + 4$; d. $y = 2x - 1$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$.

$$f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 3\ln(2 \times 1 - 1) = 1 - 4 + 3\ln(1) = -3 + 0 = -3.$$

$$f \text{ est dérivable sur }]0,5 ; +\infty[, \text{ avec } f'(x) = 2x - 4 + 3 \times \frac{2}{2x - 1} = 2x - 4 + \frac{6}{2x - 1}, \text{ donc } f'(1) = 2 - 4 + \frac{6}{1} = -2 + 6 = 4.$$

$$\text{Une équation de la tangente est donc } y = -3 + 4(x - 1) \iff y = 4x - 4 - 3 \iff y = 4x - 7.$$

Donc, la réponse est a.

6. L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x + 3) < 2\ln(x + 1)$ est : a. $S =]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$; b. $S =]1 ; +\infty[$; c. $S = \emptyset$; d. $S =]-1 ; 1[$.

Pour que les deux logarithmes soient définis, il faut $x + 3 > 0$ et $x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -3$ et $x > -1$: l'inéquation n'a donc de sens que sur $] -1 ; +\infty[$.

Sur cet intervalle, $2\ln(x + 1) = \ln((x + 1)^2)$, et $\ln$ étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$: $\ln(x + 3) < \ln((x + 1)^2) \iff x + 3 < (x + 1)^2$.

$$x + 3 < x^2 + 2x + 1 \iff 0 < x^2 + x - 2.$$

Le trinôme $x^2 + x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc deux racines $x_1 = \frac{-1 - 3}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$; il est strictement positif à l'extérieur de ses racines, donc sur $] -\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$.

En tenant compte de la condition $x > -1$ posée au début, l'ensemble des solutions est finalement $S =]1 ; +\infty[$, soit la réponse b.

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{e^x}$. Quelle est l'expression de $f'(x)$: a. e^{-x} ; b. xe^{-x} ; c. $(1 - x)e^{-x}$; d. $(1 + x)e^{-x}$?

En écrivant $f(x) = xe^{-x}$ (produit de x par e^{-x}), la formule de dérivation d'un produit donne, pour tout réel x : $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$.

Réponse c.

2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[-3 ; 1]$, dont on donne la courbe représentative de la fonction dérivée seconde f'' : celle-ci est positive sur $[-3 ; -1]$, s'annule en $x = -1$, puis est négative sur $[-1 ; 1]$. Que peut-on affirmer : a. f convexe sur $[-1 ; 1]$; b. f concave sur $[-2 ; 0]$; c. f' décroissante sur $[-2 ; 0]$; d. f' admet un maximum en $x = -1$?

Comme f'' est positive sur $[-3 ; -1]$, la fonction f' est croissante sur cet intervalle ; comme f'' est négative sur $[-1 ; 1]$, la fonction f' est décroissante sur cet intervalle.

La fonction f' est donc croissante puis décroissante, avec un changement de sens de variation en $x = -1$: f' admet donc un maximum local en $x = -1$.

Réponse d.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 e^{-x^2}$. Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, laquelle des expressions suivantes convient : a. $F(x) = -\frac{1}{6}(x^3 + 1)e^{-x^2}$; b. $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 e^{-x^2}$; c. $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2}$; d. $F(x) = x^2(3 - 2x^2)e^{-x^2}$?

Pour identifier la bonne primitive, on dérive chaque candidate et on compare le résultat à $f(x) = x^3 e^{-x^2}$. Testons la proposition c : $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2}$.

En utilisant la formule de dérivation d'un produit, avec $u(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)$ et $v(x) = e^{-x^2}$, on a $u'(x) = -x$ et $v'(x) = -2x e^{-x^2}$: $F'(x) = -x e^{-x^2} + \left(-\frac{1}{2}(x^2 + 1)\right) \times (-2x e^{-x^2}) = -x e^{-x^2} + x(x^2 + 1)e^{-x^2}$.

En factorisant : $F'(x) = e^{-x^2}(-x + x^3 + x) = x^3 e^{-x^2} = f(x)$. La proposition c convient bien.

Réponse c.

4. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$: a. -1 ; b. 1 ; c. $+\infty$; d. n'existe pas ?

Pour lever l'indétermination, on factorise le numérateur et le dénominateur par le terme dominant

$$e^x \text{ (non nul)} : \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{e^x(1 + e^{-x})}{e^x(1 - e^{-x})} = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc par limite de quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$.

Réponse b.

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+1}$. La seule primitive F sur $\mathbb{R}$ de f telle que $F(0) = 1$ est : a. $x \mapsto 2e^{2x+1} - 2e + 1$; b. $x \mapsto 2e^{2x+1} - e$; c. $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x+1} - \frac{1}{2}e + 1$; d. $x \mapsto e^{x^2+x}$?

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. En remarquant que $f(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x+1}$ est de la forme $u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = 2x + 1$, une primitive générale de f s'écrit $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + k$, avec k une constante réelle.

La condition $F(0) = 1$ donne $\frac{1}{2}e^1 + k = 1$, soit $k = 1 - \frac{1}{2}e$.

On obtient donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + 1 - \frac{1}{2}e$.

Réponse c.

6. Une fonction f est définie et deux fois dérivable sur $[-2 ; 4]$; on donne sa courbe représentative, qui laisse apparaître un profil concave sur $[-2 ; 1]$ puis convexe sur $[1 ; 4]$, avec un point d'inflexion en $x = 1$. Parmi quatre courbes proposées, laquelle représente la fonction dérivée seconde f'' de f ?

Comme f est concave sur $[-2 ; 1]$, on a $f''(x) \leq 0$ sur cet intervalle ; comme f est convexe sur $[1 ; 4]$, on a $f''(x) \geq 0$ sur cet intervalle. La fonction f'' change donc de signe (de négatif à positif) en s'annulant en $x = 1$.

Parmi les quatre courbes proposées, une seule est négative sur $[-2 ; 1]$, s'annule en changeant de signe en $x = 1$, puis devient positive sur $[1 ; 4]$.

Réponse a.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte ; aucune justification n'est demandée sur la copie, mais nous la donnons ici. **1. La courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$ admet pour asymptote la droite d'équation : a. $x = -2$; b. $y = -1$; c. $y = -2$; d. $y = 0$.**

Pour $x \neq 0$, en factorisant par x^2 au numérateur et au dénominateur : $f(x) = \frac{x^2(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \frac{-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{3}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow \frac{-2}{1} = -2$. La droite d'équation $y = -2$ est donc asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$. **Réponse c.**

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{x^2}$. La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par : a. $F(x) = \frac{x^2}{2} e^{x^2}$; b. $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$; c. $F(x) = (1 + 2x^2) e^{x^2}$; d. $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}$.

On remarque que $f(x) = x e^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2}$, qui est de la forme $\frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$. Les primitives de $u' e^u$ sont les fonctions $e^u + k$ ($k \in \mathbb{R}$), donc les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2} e^{x^2} + k$. La condition $F(0) = 1$ donne $\frac{1}{2} \times e^0 + k = 1 \iff \frac{1}{2} + k = 1 \iff k = \frac{1}{2}$.
Donc $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}$. **Réponse d.**

3. On donne la représentation graphique de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$: la courbe de f' part de valeurs négatives en 0, croise l'axe des abscisses en $x = 2$, atteint un maximum aux alentours de $x = 3$, puis redescend en restant positive. On peut affirmer que la fonction f est : a. concave sur $]0 ; +\infty[$; b. convexe sur $]0 ; +\infty[$; c. convexe sur $[0 ; 2]$; d. convexe sur $[2 ; +\infty[$.

f est convexe sur un intervalle exactement lorsque sa dérivée f' y est croissante. D'après la représentation graphique, la courbe de f' est croissante de $x = 0$ jusqu'à son maximum (situé vers $x = 3$), donc en particulier sur tout l'intervalle $[0 ; 2]$, inclus dans $[0 ; 3]$. Donc f est convexe sur $[0 ; 2]$.

Réponse c.

4. Parmi les primitives de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$: a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$; b. toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$; c. certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$; d. toutes sont croissantes sur $] -\infty ; 0]$ et décroissantes sur $[0 ; +\infty[$.

Pour tout réel x , $e^{-x^2} > 0$, donc $f(x) = 3e^{-x^2} + 2 > 2 > 0$: la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Or, si F est une primitive de f , alors $F' = f$. Comme f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ tout entier, toute primitive F de f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. **Réponse a.**

5. La limite en $+\infty$ de f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2 \ln x}{3x^2 + 1}$ est égale à : a. $\frac{2}{3}$; b. $+\infty$; c. $-\infty$; d. 0.

On écrit $f(x) = \frac{2 \ln x}{3x^2 + 1} = \frac{2}{3} \times \frac{\frac{\ln x}{x^2}}{1 + \frac{1}{3x^2}}$ (en factorisant x^2 au dénominateur). Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x^2}\right) = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{3} \times \frac{0}{1} = 0$. **Réponse d.**

6. L'équation $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$: a. trois solutions ; b. deux solutions ; c. une seule solution ; d. aucune solution.

On pose $X = e^x$ (avec $X > 0$ nécessairement). Comme $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$, l'équation devient $X^2 + X - 12 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 1 + 48 = 49 = 7^2$, donc les solutions sont $X = \frac{-1 - 7}{2} = -4$ et $X = \frac{-1 + 7}{2} = 3$. Comme $X = e^x > 0$, seule la solution $X = 3$ est acceptable, ce qui donne $e^x = 3 \iff x = \ln(3)$. L'équation admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}$. **Réponse c.**

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Peut-on affirmer qu'elle diverge vers $+\infty$, qu'elle diverge vers $-\infty$, qu'elle n'a pas de limite, ou qu'elle converge ?

Pour tout entier naturel n , on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. Comme $n+1 \geq 1 > 0$, en divisant par $n+1$:

$$-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n+1}\right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La suite (u_n) admet donc une limite finie : **elle converge**.

2. On considère deux suites (v_n) et (w_n) liées par $w_n = e^{-2v_n} + 2$. Soit a un réel strictement positif, avec $v_0 = \ln(a)$. Que vaut w_0 : $\frac{1}{a^2} + 2$, $\frac{1}{a^2 + 2}$, $-2a + 2$, ou $\frac{1}{-2a} + 2$?

On remplace v_0 par $\ln(a)$ dans l'expression de w_0 : $w_0 = e^{-2v_0} + 2 = e^{-2\ln(a)} + 2$.

Or $e^{-2\ln(a)} = e^{\ln(a^{-2})} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ (car $a > 0$), donc $w_0 = \frac{1}{a^2} + 2$.

Donc, la réponse est $w_0 = \frac{1}{a^2} + 2$.

3. On sait que la suite (v_n) de la question précédente est croissante. Peut-on affirmer que (w_n) est décroissante et majorée par 3, décroissante et minorée par 2, croissante et majorée par 3, ou croissante et minorée par 2 ?

Comme (v_n) est croissante, pour tout entier naturel n : $v_n \leq v_{n+1}$, donc $-2v_n \geq -2v_{n+1}$ (multiplication par -2 , qui renverse le sens de l'inégalité).

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cette inégalité entraîne $e^{-2v_n} \geq e^{-2v_{n+1}}$, puis, en ajoutant 2 des deux côtés : $e^{-2v_n} + 2 \geq e^{-2v_{n+1}} + 2$, soit $w_n \geq w_{n+1}$.

La suite (w_n) est donc décroissante.

Par ailleurs, pour tout réel β , $e^\beta > 0$, donc $w_n = e^{-2v_n} + 2 > 2$ pour tout entier naturel n : la suite (w_n) est minorée par 2.

Donc, la réponse est : la suite (w_n) est décroissante et minorée par 2.

4. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}$. Pour tout entier naturel n , laquelle de ces expressions donne a_n : $4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2$, $-\frac{2}{3^n} + 4$, $4 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$, ou $2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8n}{3}$?

Cherchons le réel ℓ tel que la suite constante égale à ℓ soit solution de la relation de récurrence :
 $\ell = \frac{1}{3}\ell + \frac{8}{3} \iff \frac{2}{3}\ell = \frac{8}{3} \iff \ell = 4$.

Posons alors, pour tout entier naturel n , $b_n = a_n - 4$. On a $b_{n+1} = a_{n+1} - 4 = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3} - 4 = \frac{1}{3}(b_n + 4) + \frac{8}{3} - 4 = \frac{1}{3}b_n + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} - 4 = \frac{1}{3}b_n + 4 - 4 = \frac{1}{3}b_n$.

La suite (b_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = a_0 - 4 = 2 - 4 = -2$.

Pour tout entier naturel n : $b_n = b_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{2}{3^n}$.

Donc $a_n = b_n + 4 = -\frac{2}{3^n} + 4$.

5. On considère une suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right)$. Peut-on affirmer que cette suite est croissante, décroissante, non monotone, ou que son sens de variation dépend de b_0 ?

Pour tout entier naturel n : $b_{n+1} - b_n = \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right)$.

Or, quel que soit le réel b_n , on a $(b_n)^2 \geq 0$, donc $(b_n)^2 + 3 \geq 3$.

Comme $3 > 2$, on en déduit $(b_n)^2 + 3 > 2$, donc $0 < \frac{2}{(b_n)^2 + 3} < 1$.

La fonction logarithme népérien étant strictement négative sur $]0 ; 1[$, on a $\ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right) < 0$, donc $b_{n+1} - b_n < 0$.

Cette inégalité est vraie pour tout entier naturel n , quel que soit le premier terme b_0 : donc, la réponse est que la suite (b_n) est décroissante.

6. On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthogonal. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet-elle une asymptote verticale et une asymptote horizontale, une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale, aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale, ou aucune des deux ?

Au voisinage de 0 (avec $x > 0$) : $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+$, donc, par quotient de limites, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$: la courbe $\mathcal{C}_g$ admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

Au voisinage de $+\infty$: par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (l'exponentielle l'emporte sur x). La courbe $\mathcal{C}_g$ ne présente donc aucune asymptote horizontale en $+\infty$.

Donc, la réponse est : la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{x^2+1}$, et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Laquelle de ces expressions donne $F(x)$ pour tout réel x : $\frac{1}{2}x^2 e^{x^2+1}$, $(1+2x^2) e^{x^2+1}$, e^{x^2+1} , ou $\frac{1}{2}e^{x^2+1}$?

Posons $u(x) = x^2 + 1$, de dérivée $u'(x) = 2x$. On peut alors écrire $f(x) = x e^{x^2+1} = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{u(x)} = \frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$.

Or une primitive de $u' e^u$ est e^u , donc une primitive de $\frac{1}{2} u' e^u$ est $\frac{1}{2} e^u$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} e^{x^2+1}$.

Vérification directe : si $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2+1}$, alors $F'(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2+1} = x e^{x^2+1} = f(x)$, ce qui confirme le résultat.

Donc, la réponse est $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2+1}$.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 1)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. **1.a** Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 , sous forme de fractions irréductibles.

$$u_1 = \frac{u_0}{1+u_0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

$$u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}.$$

1.b Recopier et compléter les lignes 3 et 6 du script Python ci-dessous pour que 'liste(k)' prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des valeurs de u_0 à u_k .

- def liste(k) :
- L = []
- u = 1
- for i in range(0, k+1) :
- L.append(u)
- u = u / (1 + u)
- return L

2. On admet que, pour tout entier naturel n , u_n est strictement positif. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

$$\text{On étudie le signe de } u_{n+1} - u_n \text{ pour tout entier naturel } n : u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{u_n - u_n - u_n^2}{1+u_n} = \frac{-u_n^2}{1+u_n}.$$

Comme u_n est strictement positif pour tout n , on a $u_n^2 > 0$ et $1 + u_n > 0$, donc $\frac{-u_n^2}{1+u_n} < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel n .

Donc, la réponse est que la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

La suite (u_n) est strictement décroissante (question précédente) et minorée par 0 (car u_n est strictement positif pour tout n , donc en particulier $u_n \geq 0$). Donc, la réponse est que, d'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) **converge** vers une limite réelle ℓ , avec $\ell \geq 0$.

4. Déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n) .

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+x}$. On a alors $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

La fonction f est continue sur $[0 ; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. La limite ℓ de la suite (u_n) vérifie donc l'égalité $f(\ell) = \ell$.

$$\text{On résout cette équation : } \frac{\ell}{1+\ell} = \ell \iff \ell = \ell(1+\ell) \iff \ell = \ell + \ell^2 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0.$$

Donc, la réponse est que la suite (u_n) converge vers **0**.

5.a Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .

D'après les premiers termes calculés à la question 1.a ($u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{3}$, $u_3 = \frac{1}{4}$), on peut conjecturer que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{n+1}$.

5.b Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

Notons P_n la proposition : $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Initialisation : pour $n = 0$, $\frac{1}{0+1} = 1 = u_0$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons que P_n soit vraie pour un entier naturel n fixé, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{n+1}$. Montrons que P_{n+1} est alors vraie.

$$\text{On a } u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)+1} : \text{ la relation est donc vraie au } n+1.$$

rang $n + 1$, ce qui montre que P_{n+1} est vraie.

Comme P_0 est vraie, et que pour tout entier naturel n , P_n vraie entraîne P_{n+1} vraie, on peut conclure, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n , P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 2)

1. QCM. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - x + 1$. Parmi quatre expressions proposées, indiquer celle de la fonction dérivée f' .

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x > 0$: $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

Donc, la réponse est $f'(x) = \ln(x)$.

2. On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 [1 - \ln(x)]$. Parmi quatre affirmations sur la limite de g en 0, indiquer la correcte.

En développant, $g(x) = x^2 - x^2 \ln(x)$. D'une part, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$.

D'autre part, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0$.

Par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 - 0 = 0$. Donc, la réponse est $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 0,9x^2 - 0,1x$. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , on factorise : $f(x) = x(x^2 - 0,9x - 0,1)$. Donc $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 - 0,9x - 0,1 = 0$.

Pour l'équation du second degré $x^2 - 0,9x - 0,1 = 0$, on remarque que $x = 1$ est une racine évidente, car $1^2 - 0,9 \times 1 - 0,1 = 1 - 0,9 - 0,1 = 0$.

Le produit des deux racines d'un trinôme $x^2 + bx + c$ vaut c : ici le produit des racines vaut $-0,1$, donc la seconde racine est $\frac{-0,1}{1} = -0,1$.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc exactement trois solutions réelles : $-0,1$, 0 et 1 . Donc, la réponse est **3 solutions**.

4. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, indiquer, parmi quatre expressions, celle d'une primitive K de k .

On teste la fonction K définie sur $\mathbb{R}$ par $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$. Comme H est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une primitive de h), K est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une constante par une composée de fonctions dérivables.

Pour tout réel x : $K'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times H'(2x) = H'(2x) = h(2x)$, car $H' = h$ (H étant une primitive de h).

Donc $K'(x) = h(2x) = k(x)$ pour tout réel x : K est bien une primitive de k sur $\mathbb{R}$. Donc, la réponse est $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$.

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. Indiquer, parmi quatre équations proposées, celle de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Pour tout réel x : $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x)e^x$.

On calcule $f(1) = 1 \times e^1 = e$ et $f'(1) = (1+1)e^1 = 2e$.

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2e(x-1) + e = 2ex - 2e + e = 2ex - e$.

Donc, la réponse est $y = 2ex - e$.

6. Indiquer, parmi quatre propositions, celle qui caractérise les entiers naturels n solutions de l'inéquation $(0,2)^n < 0,001$.

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, donc, pour tout entier naturel n : $(0,2)^n < 0,001 \iff \ln((0,2)^n) < \ln(0,001) \iff n \ln(0,2) < \ln(0,001)$.

Comme $0,2 < 1$, on a $\ln(0,2) < 0$, donc diviser par $\ln(0,2)$ inverse le sens de l'inégalité : $n \ln(0,2) < \ln(0,001) \iff n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)}$.

À la calculatrice, $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)} \approx 4,29$. Les entiers naturels strictement supérieurs à 4,29 sont donc les entiers supérieurs ou égaux à 5.

Donc, la réponse est : les entiers naturels n tels que $n \geq 5$.