

Logarithme — Tous les corrigés

LOGIMATHS

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 1)

Partie A — 1. Un contrôle en caisse automatique est total (T) une fois sur dix. Un contrôle total détecte une erreur dans 30 % des cas ; un contrôle partiel n'en détecte pas dans 85 % des cas. Construire un arbre pondéré et déterminer $P(\overline{T} \cap E)$.

L'arbre pondéré donne : $P(T) = 0,1$, $P(\overline{T}) = 0,9$; $P_T(E) = 0,3$, $P_T(\overline{E}) = 0,7$; $P_{\overline{T}}(E) = 0,15$, $P_{\overline{T}}(\overline{E}) = 0,85$.

$$P(\overline{T} \cap E) = P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(E) = 0,9 \times 0,15 = 0,135.$$

Partie A — 2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.

$\{T, \overline{T}\}$ forme une partition, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(T \cap E) + P(\overline{T} \cap E) = 0,1 \times 0,3 + 0,135 = 0,03 + 0,135 = 0,165.$$

Partie A — 3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée (arrondie au centième).

$$P_E(T) = \frac{P(T \cap E)}{P(E)} = \frac{0,1 \times 0,3}{0,165} \approx 0,18.$$

Partie B — 1. Sur une journée, une caisse déclenche 15 contrôles ; la probabilité qu'un contrôle détecte une erreur est $p = 0,165$, indépendamment. X compte le nombre d'erreurs détectées. Préciser la loi et les paramètres de X.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,165$.

Partie B — 2. Déterminer la probabilité qu'exactly 5 erreurs soient détectées (arrondie au centième).

$$P(X = 5) = \binom{15}{5} \times 0,165^5 \times 0,835^{10} \approx 0,06.$$

Partie B — 3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée (arrondie au centième).

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,835^{15} \approx 0,93.$$

Partie B — 4. Déterminer le nombre de contrôles à déclencher chaque jour pour que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée dépasse 99 %.

Avec n contrôles, on veut $1 - 0,835^n \geq 0,99 \iff 0,835^n \leq 0,01$.

En passant au logarithme népérien : $n \ln(0,835) \leq \ln(0,01)$, et comme $\ln(0,835) < 0$: $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \approx 25,5$.

Il faut donc déclencher au moins **26 contrôles** par jour.

Partie C — 1. Trois caisses déclenchent chacune 20 contrôles ; X_1, X_2, X_3 (nombre d'erreurs par caisse) suivent chacune la loi binomiale de paramètres 20 et 0,165. Déterminer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

$$E(X_1) = np = 20 \times 0,165 = 3,3 \text{ et } V(X_1) = np(1-p) = 20 \times 0,165 \times 0,835 = 2,7555.$$

Partie C — 2. On pose $S = X_1 + X_2 + X_3$. Justifier que $E(S) = 9,9$ et $V(S) = 8,2665$, puis montrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que $P(6 < S < 14) > 0,48$.

Par linéarité de l'espérance : $E(S) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 3,3 = 9,9$.

Les X_i étant indépendantes, par additivité de la variance : $V(S) = 3 \times V(X_1) = 3 \times 2,7555 = 8,2665$.

L'évènement « $6 < S < 14$ » (avec $E(S) \approx 10$) équivaut à $|S - 10| < 4$, donc $P(|S - 10| < 4) = 1 - P(|S - 10| \geq 4)$.

D'après Bienaymé-Tchebychev, avec $t = 4$: $P(|S - 10| \geq 4) \leq \frac{V(S)}{4^2} = \frac{8,2665}{16}$.

Donc $P(|S - 10| < 4) \geq 1 - \frac{8,2665}{16} \approx 0,483 > 0,48$.

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 1)

Partie A — 1. On donne la courbe de f , avec la tangente T_A en $A(1 ; 2)$ passant par $C(3 ; 0)$. Déterminer $f'(1)$.

$f'(1)$ est le coefficient directeur de T_A : $\frac{0 - 2}{3 - 1} = -1$.

Partie A — 2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle sur $]0 ; 3]$?

$f'(x) = 0$ correspond aux points où la tangente est horizontale : d'après le graphique, cela se produit **2 fois** sur $]0 ; 3]$.

Partie A — 3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Sur $[0 ; 0,5]$, la courbe semble concave d'après le graphique, donc $f''(0,2) < 0$.

Partie B — 1. On admet que $f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$ sur $]0; +\infty[$. Résoudre $2X^2 - 3X + 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$, et en déduire que la courbe de f ne coupe pas l'axe des abscisses.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0$: l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$ n'a pas de solution réelle.

$f(x) = 0 \iff x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2] = 0$. Comme $x > 0$, cela équivaut à $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$, soit, en posant $X = \ln x$, à $2X^2 - 3X + 2 = 0$, qui n'a pas de solution.

L'équation $f(x) = 0$ n'a donc pas de solution : **la courbe de f ne coupe pas l'axe des abscisses.**

Partie B — 2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$ (on admet que la limite en 0 est 0).

$$f(x) = x(\ln x)^2 \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right) = 2.$$

$$\text{Par produit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Partie B — 3.a On admet que $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$. Montrer que $f''(x) = (1/x)(4\ln x + 1)$.

$$f''(x) = 2 \times 2\ln x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(4\ln x + 1).$$

Partie B — 3.b Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$ et préciser l'abscisse exacte du point d'inflexion.

Sur $]0; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $4\ln x + 1$.

$$4\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{4} \iff x = e^{-\frac{1}{4}}; 4\ln x + 1 > 0 \iff x > e^{-\frac{1}{4}}.$$

f est donc **concave** sur $\left] 0; e^{-\frac{1}{4}} \right]$ et **convexe** sur $\left[e^{-\frac{1}{4}}; +\infty \right[$, avec un point d'inflexion d'abscisse exacte $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,779$.

Partie B — 3.c Montrer que la courbe de f est au-dessus de la tangente T_B sur $]1; +\infty[$.

Comme $e^{-\frac{1}{4}} < 1$, f est convexe sur $[1; +\infty[$: sur cet intervalle, la courbe est donc au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier T_B .

Partie C — 1. Justifier que la tangente T_B (au point d'abscisse e) a pour équation réduite $y = 2x - e$.

$$f'(e) = 2(\ln e)^2 + \ln e - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 \text{ et } f(e) = e(2 \times 1 - 3 + 2) = e \times 1 = e.$$

$$\text{La tangente en } e \text{ a pour équation } y = f'(e)(x - e) + f(e) = 2(x - e) + e = 2x - e.$$

Partie C — 2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale de $x \ln x$ entre 1 et e vaut $(e^2 + 1)/4$.

$$\text{On pose } u(x) = \ln x \text{ et } v'(x) = x \text{ (donc } u'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } v(x) = \frac{x^2}{2}).$$

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\ln x \times \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Partie C — 3. On admet que l'intégrale de $x(\ln x)^2$ entre 1 et e vaut $(e^2 - 1)/4$. En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine entre la courbe de f , la tangente T_B et les droites $x=1$ et $x=e$.

$$\text{Sur } [1; e], \text{ la courbe est au-dessus de } T_B, \text{ donc } \mathcal{A} = \int_1^e [f(x) - (2x - e)] \, dx = \int_1^e [2x(\ln x)^2 - 3x \ln x + e] \, dx.$$

$$\text{Par linéarité : } \mathcal{A} = 2 \times \frac{e^2 - 1}{4} - 3 \times \frac{e^2 + 1}{4} + [ex]_1^e = \frac{-e^2 - 5}{4} + (e^2 - e).$$

$$\mathcal{A} = \frac{3e^2 - 4e - 5}{4} \text{ unités d'aire (soit environ 1,57 u.a.)}.$$

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 1)

1. Les achats d'un téléviseur se font sur internet (60 %), en magasin d'électroménager (30 %) ou en grande surface (10 %), avec des taux de satisfaction de 75 %, 90 % et 80 %. Compléter l'arbre pondéré.

$$P(I) = 0,6, P(M) = 0,3, P(G) = 0,1; P_I(S) = 0,75, P_I(\bar{S}) = 0,25; P_M(S) = 0,9, P_M(\bar{S}) = 0,1; P_G(S) = 0,8, P_G(\bar{S}) = 0,2.$$

2. Calculer la probabilité que le client ait acheté sur internet et soit satisfait.

$$P(I \cap S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45.$$

3. Démontrer que $P(S) = 0,8$.

$$\text{Par les probabilités totales : } P(S) = 0,45 + 0,3 \times 0,9 + 0,1 \times 0,8 = 0,45 + 0,27 + 0,08 = 0,8.$$

4. Un client est satisfait. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté sur internet (à 10^{-3} près) ?

$$P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0,45}{0,8} = \frac{9}{16} \approx \mathbf{0,563}.$$

5.a On contacte 30 clients (tirage assimilé avec remise) ; X compte les satisfaits. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

Chaque client est une épreuve à deux issues (satisfait, probabilité 0,8), répétée 30 fois de façon indépendante : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,8$.

5.b Déterminer la probabilité qu'au moins 25 clients soient satisfaits (à 10^{-3} près).

$$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) \approx 1 - 0,572 = \mathbf{0,428}.$$

6. Déterminer la taille minimale de l'échantillon pour que la probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.

La probabilité que tous soient satisfaits est $0,8^n$: on veut $1 - 0,8^n > 0,99 \iff 0,8^n < 0,01$.

$$n \ln(0,8) < \ln(0,01), \text{ donc } n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,6 : \text{ il faut contacter au moins } \mathbf{21} \text{ clients.}$$

7.a Le temps de livraison est $T = T_1 + T_2$, avec T_1 et T_2 indépendantes, $E(T_1) = 4$, $V(T_1) = 2$, $E(T_2) = 3$, $V(T_2) = 1$. Déterminer $E(T)$ et $V(T)$.

$$E(T) = 4 + 3 = 7; \text{ par indépendance, } V(T) = 2 + 1 = 3.$$

7.b Justifier que la probabilité que le téléviseur arrive entre 5 et 9 jours est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

« $5 \leq T \leq 9$ » contient l'évènement $|T - 7| < 3$ (les valeurs de T étant entières), dont la probabilité vaut $1 - P(|T - 7| \geq 3)$.

$$\text{L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne } P(|T - 7| \geq 3) \leq \frac{V(T)}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Donc } P(5 \leq T \leq 9) \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Bac Terminale 2024 — Polynésie française (jour 2)

1.a La suite (u_n) est définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$. Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2 .

$$u_1 = 8 - \ln\left(\frac{8}{4}\right) = 8 - \ln(2) \approx \mathbf{7,31}.$$

$$u_2 = u_1 - \ln\left(\frac{u_1}{4}\right) \approx 7,3069 - \ln(1,8267) \approx \mathbf{6,70}.$$

1.b Une fonction Python ‘mystere(k)’ initialise ‘u = 8’ et ‘S = 0’, puis répète ‘k’ fois ‘S = S + u’ suivi de ‘u = u - log(u/4)’, avant de renvoyer ‘S’. L’appel ‘mystere(10)’ renvoie 58,440... Que représente ce résultat ?

À chaque tour de boucle, ‘S’ accumule la valeur courante de ‘u’ avant sa mise à jour : après 10 tours, ‘S’ contient donc $u_0 + u_1 + \dots + u_9$, c’est-à-dire la somme des dix premiers termes de la suite (u_n) , de u_0 à u_9 .

1.c Modifier la fonction pour qu’elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite.

- def mystere(k) :
- u = 8
- S = 0
- for i in range(k) :
- S = S + u
- u = u - log(u / 4)
- return S / k

2. Soit $f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$ définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Étudier les variations de f et préciser la valeur exacte de son minimum.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x-1$: $f'(x) < 0$ sur $]0 ; 1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$.

f est donc strictement décroissante sur $]0 ; 1]$ puis strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$, avec un minimum en $x = 1$ valant $f(1) = 1 - \ln\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \ln(4)$.

3.a On admet que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n . Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation : $u_0 = 8$ et $u_1 \approx 7,31$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour un certain n . Comme f est croissante sur $[1 ; +\infty[$, on a $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, soit $f(1) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Or $f(1) = 1 + \ln(4) \approx 2,39 \geq 1$, donc $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

3.b En déduire que (u_n) converge, et noter ℓ sa limite.

L’encadrement précédent montre que (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leq u_n$) et minorée par 1 : elle converge donc vers une limite réelle $\ell \geq 1$.

3.c Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0 ; +\infty[$.

$f(x) = x \iff x - \ln\left(\frac{x}{4}\right) = x \iff \ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \iff \frac{x}{4} = 1 \iff x = 4$: l'unique solution est 4.

3.d En déduire la valeur de ℓ .

f est continue sur $]0 ; +\infty[$ (car dérivable); en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. D'après la question précédente, la seule solution possible est $\ell = 4$: $\ell = 4$.

Bac Terminale 2023 — Asie (jour 2)

Partie A — 1. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

Quand $x \rightarrow -\infty$, $2x \rightarrow -\infty$ donc $e^{2x} \rightarrow 0$, et $e^x \rightarrow 0$; par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 - 0 + 1 = 1$.

Partie A — 2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

On factorise par le terme dominant : $g(x) = e^x(e^x - 1 + e^{-x})$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow 0$, donc par somme $e^x - 1 + e^{-x} \rightarrow +\infty$; par produit de limites infinies, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Partie A — 3. Montrer que $g'(x) = e^x(2e^x - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et $g'(x) = 2e^{2x} - e^x = e^x(2e^x - 1)$.

Partie A — 4. Étudier le signe de g' et en déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ (avec les limites et l'extremum exact).

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , le signe de $g'(x)$ est celui de $2e^x - 1$.

$2e^x - 1 = 0 \iff e^x = \frac{1}{2} \iff x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$; de plus $2e^x - 1 > 0 \iff x > -\ln 2$, et $2e^x - 1 < 0 \iff x < -\ln 2$.

La fonction g est donc décroissante sur $] -\infty ; -\ln 2]$ et croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$, avec un minimum en $x = -\ln 2$.

$$g(-\ln 2) = e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} + 1 = \frac{1}{e^{2\ln 2}} - \frac{1}{e^{\ln 2}} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}.$$

Tableau de variations : g vaut 1 en $-\infty$ (limite), décroît jusqu'au minimum $\frac{3}{4}$ en $x = -\ln 2$, puis croît vers $+\infty$.

Partie A — 5. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ vaut $\frac{3}{4}$, qui est strictement positif. Donc, la réponse est : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

Partie A — 6. Sans mener les calculs, expliquer comment retrouver ce résultat en posant $X = e^x$.

En posant $X = e^x$ (avec $X > 0$), on a $g(x) = X^2 - X + 1$, un trinôme du second degré en X .

Sa forme canonique est $\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$: c'est une somme d'un carré (toujours positif ou nul) et d'une constante strictement positive $\frac{3}{4}$, donc ce trinôme est strictement positif pour tout X , ce qui redonne $g(x) > 0$.

Partie B — 1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$. Justifier qu'elle est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(g(x))$ avec $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$. Or on a montré que $g(x) > 0$ pour tout réel x : le logarithme népérien est donc bien défini, et f est définie sur $\mathbb{R}$.

Partie B — 2. Justifier que $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comme $f = \ln \circ g$ avec g dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, par dérivation d'une composée avec le logarithme, $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$.

Partie B — 3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

$$f(0) = \ln(1 - 1 + 1) = \ln(1) = 0.$$

$$f'(0) = \frac{2 \times 1 - 1}{1 - 1 + 1} = \frac{1}{1} = 1.$$

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$. Donc, la réponse est $y = x$.

Partie B — 4. Montrer que f est strictement croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$.

Puisque $g(x) > 0$ pour tout x , le signe de $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ est celui de $g'(x)$.

D'après la partie A, $g'(x) > 0$ sur $] -\ln 2 ; +\infty[$, donc $f'(x) > 0$ sur cet intervalle. Donc, la réponse est : f est strictement croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$.

Partie B — 5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-\ln 2; +\infty[$, et donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

$$f(-\ln 2) = \ln(g(-\ln 2)) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0,29, \text{ donc } f(-\ln 2) < 2.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, par composition avec le logarithme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[-\ln 2; +\infty[$, avec $f(-\ln 2) < 2 < \lim_{+\infty} f$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

À la calculatrice : $f(1,12) \approx 1,99 < 2$ et $f(1,13) \approx 2,01 > 2$. Donc, la réponse est $\alpha \approx 1,12$ (à 10^{-2} près).

Partie C. Au vu des résultats précédents, les trois conjectures de l'élève (l'équation $f(x) = 2$ semble avoir une solution ; f semble croissante sur $[-0,5; +\infty[$; la tangente en 0 semble être $y = 1,5x$) sont-elles vraies ou fausses ?

Conjecture 1 (existence d'une solution à $f(x) = 2$) : vraie, confirmée par la question précédente.

Conjecture 2 (croissance sur $[-0,5; +\infty[$) : fausse : on a montré que f est croissante sur $[-\ln 2; +\infty[$, avec $-\ln 2 \approx -0,69 \neq -0,5$.

Conjecture 3 (tangente $y = 1,5x$) : fausse : on a établi que l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = x$.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 2)

Partie A — 1. Un vendeur de matelas propose deux modèles : RESSORTS et MOUSSE, chaque client n'achetant qu'un seul matelas. On sait que 20 % des clients choisissent un matelas RESSORTS, que 90 % d'entre eux sont satisfaits, et que 82 % de l'ensemble des clients sont satisfaits. On note R l'évènement « le client a acheté un matelas RESSORTS » et S « le client est satisfait ». Compléter l'arbre pondéré décrivant la situation.

L'arbre comporte deux branches initiales $P(R) = 0,2$ et $P(\overline{R}) = 0,8$, puis sur la branche R : $P_R(S) = 0,9$ et $P_R(\overline{S}) = 0,1$; sur la branche $\overline{R}$: $P_{\overline{R}}(S) = x$ et $P_{\overline{R}}(\overline{S}) = 1 - x$, où x désigne la probabilité d'être satisfait sachant que le matelas n'est pas de type RESSORTS.

Partie A — 2. Montrer que $x = 0,8$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée à l'évènement S : $P(S) = P(R \cap S) + P(\overline{R} \cap S)$.

Or $P(R \cap S) = P(R) \times P_R(S) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$ et $P(\overline{R} \cap S) = P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(S) = 0,8x$.

Comme $P(S) = 0,82$, on obtient l'équation $0,18 + 0,8x = 0,82$, soit $0,8x = 0,64$, d'où $x = 0,8$.

Partie A — 3. Un client s'avère satisfait de son achat. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS (résultat arrondi au centième) ?

Il s'agit de calculer $P_S(R) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{0,18}{0,82} = \frac{9}{41} \approx 0,22$.

Partie B — 1.a On interroge 5 clients au hasard et X compte le nombre de clients satisfaits parmi eux. On admet que X suit une loi binomiale : donner ses paramètres.

Chaque client interrogé est soumis à une épreuve à deux issues (satisfait ou non, avec probabilité 0,82 de succès), les 5 tirages étant indépendants : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,82$.

Partie B — 1.b Déterminer la probabilité qu'au maximum trois des cinq clients soient satisfaits (résultat arrondi au millième).

À la calculatrice : $P(X \leq 3) \approx 0,222$.

Partie B — 2.a Soit n un entier naturel non nul. On interroge maintenant n clients, ce choix étant assimilable à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits. Montrer que $p_n = 0,82^n$.

Chaque client est satisfait de façon indépendante avec la probabilité 0,82. La probabilité que les n clients le soient tous est donc le produit de n facteurs égaux à 0,82, c'est-à-dire $p_n = 0,82^n$.

Partie B — 2.b Déterminer les entiers naturels n tels que $p_n < 0,01$, puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

On résout dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0,82^n < 0,01$. En passant au logarithme népérien (croissant) : $n \ln(0,82) < \ln(0,01)$.

Comme $\ln(0,82) < 0$, l'inégalité change de sens en divisant : $n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,82)} \approx 23,2$.

Le plus petit entier convenable est donc $n = 24$: dès que l'on interroge au moins 24 clients, la probabilité qu'ils soient tous satisfaits devient inférieure à 1 %.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 1)

1. On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8 \ln(x)$. Déterminer la limite de f en 0.

Quand $x \rightarrow 0$ avec $x > 0$, $x^2 \rightarrow 0$ et $\ln(x) \rightarrow -\infty$, donc $-8 \ln(x) \rightarrow +\infty$: par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

2. En utilisant l'écriture $f(x) = x^2 \left(1 - 8 \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$ pour $x > 0$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (a fortiori, puisque $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$ et que $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$), donc $1 - 8 \frac{\ln(x)}{x^2} \rightarrow 1$.

Comme $x^2 \rightarrow +\infty$, par produit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Montrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et $f'(x) = 2x - 8 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2}{x} - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x} = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$.

4. Étudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations complet (en précisant la valeur exacte du minimum).

On factorise : $f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$. Sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$ et $x+2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $(x-2)$.

$f'(x) < 0$ sur $]0 ; 2[$ et $f'(x) > 0$ sur $]2 ; +\infty[$: f est donc strictement décroissante sur $]0 ; 2]$ puis strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.

f admet donc un minimum en $x = 2$, qui vaut $f(2) = 2^2 - 8 \ln(2) = 4 - 8 \ln(2)$.

Le tableau de variations part de $+\infty$ en 0, décroît jusqu'au minimum $4 - 8 \ln(2)$ en $x = 2$, puis croît vers $+\infty$.

5. Démontrer que, sur $]0 ; 2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α (sans chercher sa valeur).

Numériquement, $4 - 8 \ln(2) \approx -1,545 < 0$: le minimum de f est strictement négatif, donc f s'annule bien quelque part sur $]0 ; 2]$.

f est dérivable donc continue sur $]0 ; 2]$, et strictement décroissante sur cet intervalle. Elle prend une valeur qui tend vers $+\infty$ en 0 et vaut $4 - 8 \ln(2) < 0$ en 2, donc elle change de signe une seule fois.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à une fonction continue et strictement monotone, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; 2]$.

6. On admet que, sur $]2 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β . En déduire le signe de f sur $]0 ; +\infty[$.

Puisque f est strictement décroissante sur $]0 ; 2]$ et s'annule en α , elle est positive avant α et négative entre α et 2. Puisque f est strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$ et s'annule en β , elle reste négative entre 2 et β puis positive après β . Donc, la réponse est : $f(x) > 0$ sur $]0 ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, $f(x) < 0$ sur $] \alpha ; \beta[$, $f(\beta) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $] \beta ; +\infty[$.

7. Pour tout réel k , on définit g_k sur $]0 ; +\infty[$ par $g_k(x) = x^2 - 8 \ln(x) + k$. Déterminer, à l'aide du tableau de variations de f , la plus petite valeur de k pour laquelle g_k reste positive sur $]0 ; +\infty[$.

On remarque que $g_k(x) = f(x) + k$ pour tout x : g_k a donc les mêmes variations que f , translatées de k .

Le minimum de g_k sur $]0 ; +\infty[$ vaut donc $4 - 8 \ln(2) + k$, atteint en $x = 2$ comme pour f .

g_k est positive ou nulle sur tout l'intervalle si et seulement si ce minimum est positif ou nul : $4 - 8 \ln(2) + k \geq 0 \iff k \geq 8 \ln(2) - 4$.

Donc, la réponse est : la plus petite valeur qui convient est $k = 8 \ln(2) - 4$.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 1)

Partie A — 1. Une entreprise modélise le nombre de questions (en centaines) posées chaque mois sur sa FAQ par la suite (u_n) définie par $u_1 = 3$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3$ (90 % des questions du mois précédent sont conservées, et 130 nouvelles questions s'ajoutent). Calculer u_2 et u_3 , et interpréter.

$$u_2 = 0,9 \times u_1 + 1,3 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 2,7 + 1,3 = 4 \text{ et } u_3 = 0,9 \times u_2 + 1,3 = 0,9 \times 4 + 1,3 = 3,6 + 1,3 = 4,9.$$

Comme u_n représente un nombre de questions en centaines, on peut estimer à **400 questions le 2^e mois** et à **490 questions le 3^e mois**.

Partie A — 2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$.

Initialisation. Pour $n = 1$: $13 - \frac{100}{9} \times 0,9^1 = 13 - \frac{90}{9} = 13 - 10 = 3 = u_1$. La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité. Supposons que, pour un entier $n \geq 1$, $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$. Alors $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3 = 0,9 \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n \right) + 1,3 = 11,7 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} + 1,3 = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1}$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire à partir de ce rang : d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$.

Partie A — 3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout $n \geq 1$: $u_{n+1} - u_n = \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1}\right) - \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n\right) = \frac{100}{9} \times 0,9^n \times (1 - 0,9) = \frac{100}{9} \times 0,9^n \times 0,1$. Cette quantité est strictement positive car $0,9^n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$: la suite (u_n) est croissante.

Partie A — 4. Le script Python ci-dessous renvoie le plus petit rang n tel que u_n dépasse un seuil 'p' donné. Recopier ce script.

- def seuil(p) :
- n = 1
- u = 3
- while u <= p :
- n = n + 1
- u = 0.9 * u + 1.3
- return n

Partie A — 4 (suite). Déterminer la valeur renvoyée par 'seuil(8.5)' et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

'seuil(8.5)' renvoie le plus petit rang n tel que $u_n > 8,5$. On résout : $u_n > 8,5 \iff 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n > 8,5 \iff \frac{100}{9} \times 0,9^n < 4,5 \iff 0,9^n < \frac{4,5 \times 9}{100} = 0,405$.

Par stricte décroissance de $\ln$: $n \ln(0,9) < \ln(0,405)$, et comme $\ln(0,9) < 0$, cela équivaut à $n > \frac{\ln(0,405)}{\ln(0,9)}$.

Or $\frac{\ln(0,405)}{\ln(0,9)} \approx 8,58$, donc le plus petit entier n qui convient est 9. Donc, la réponse est : 'seuil(8.5)' renvoie **9**, ce qui signifie que c'est le 9^e mois où le nombre de questions dépasse 850.

Partie B — 1. Une seconde modélisation utilise la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = 9 - 6e^{-0,19(n-1)}$. Donner les valeurs de v_1 et v_2 arrondies au centième.

$v_1 = 9 - 6e^0 = 9 - 6 = 3$ et $v_2 = 9 - 6e^{-0,19} \approx 9 - 6 \times 0,8270 \approx 9 - 4,962 \approx 4,04$.

Partie B — 2. Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$.

$$v_n > 8,5 \iff 9 - 6e^{-0,19(n-1)} > 8,5 \iff 6e^{-0,19(n-1)} < 0,5 \iff e^{-0,19(n-1)} < \frac{0,5}{6}.$$

Par stricte croissance de $\ln$: $-0,19(n-1) < \ln\left(\frac{0,5}{6}\right)$, soit $n-1 > -\frac{1}{0,19} \ln\left(\frac{0,5}{6}\right)$ (le sens s'inverse car on divise par $-0,19 < 0$), donc $n > 1 - \frac{1}{0,19} \ln\left(\frac{0,5}{6}\right)$.

Or $1 - \frac{1}{0,19} \ln\left(\frac{0,5}{6}\right) \approx 14,08$, donc le plus petit entier n qui convient est $n = 15$.

Partie C — 1. L'entreprise change la présentation de son site dès que plus de 850 questions figurent sur la FAQ. Laquelle des deux modélisations conduit à ce seuil le plus tôt ?

D'après la question précédente sur (u_n) , le seuil $u_n > 8,5$ est atteint dès le 9^e mois.

D'après la question sur (v_n) , le seuil $v_n > 8,5$ n'est atteint qu'au 15^e mois.

Donc, la réponse est : c'est la première modélisation, avec la suite (u_n) , qui conduit à modifier la présentation du site le plus tôt.

Partie C — 2. Pour quelle modélisation le nombre de questions à long terme est-il le plus grand ?

Pour (u_n) : $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$, et comme $-1 < 0,9 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 13$: à long terme, la première modélisation prévoit 1300 questions.

Pour (v_n) : $v_n = 9 - 6e^{-0,19(n-1)}$, et comme $-0,19(n-1) \rightarrow -\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, on a $e^{-0,19(n-1)} \rightarrow 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 9$: la seconde modélisation prévoit 900 questions à long terme.

Donc, la réponse est : c'est la première modélisation, avec la suite (u_n) , qui prévoit le plus grand nombre de questions à long terme.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 2)

1.a On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

Quand $x \rightarrow -\infty$, $-x \rightarrow +\infty$ donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$ (limite usuelle de l'exponentielle), donc $1 + e^{-x} \rightarrow +\infty$.

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$. Donc, la réponse est $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

1.b Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$ donc $1 + e^{-x} \rightarrow 1$, et $\lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$.

Donc, la réponse est $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Graphiquement, cela signifie que la courbe $\mathcal{C}$ de f admet l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) pour asymptote horizontale en $+\infty$.

1.c On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}$.

f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = 1 + e^{-x}$ et $u'(x) = -e^{-x}$; sa dérivée est donc $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

En multipliant numérateur et dénominateur par e^x : $f'(x) = \frac{-e^{-x} \times e^x}{(1 + e^{-x}) \times e^x} = \frac{-1}{e^x + 1}$.

Donc, la réponse est $f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}$.

1.d Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $1 + e^x > 0$ et $f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x} < 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Avec les limites établies aux questions précédentes ($+\infty$ en $-\infty$ et 0 en $+\infty$), on obtient le tableau : $f'(x)$ est négatif sur $\mathbb{R}$, et f décroît strictement de $+\infty$ (en $-\infty$) vers 0 (en $+\infty$), sans jamais atteindre 0.

2.a On note T_0 la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T_0 .

La tangente en un point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$; ici $a = 0$.

$$f(0) = \ln(1 + e^0) = \ln(2) \text{ et } f'(0) = \frac{-1}{1 + e^0} = -\frac{1}{2}.$$

Donc, la réponse est : T_0 a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

2.b Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}; \text{ en dérivant à nouveau, avec } u(x) = -1 \text{ (constante) et } v(x) = 1 + e^x : f''(x) = \frac{-v'(x) \times (-1)}{v(x)^2} \times (-1), \text{ plus simplement } f''(x) = \frac{0 - (-1) \times e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

Pour tout réel x , $e^x > 0$ et $(1 + e^x)^2 > 0$, donc $f''(x) > 0$. Donc, la réponse est : f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2.c En déduire que, pour tout réel x , $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

Comme f est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier au-dessus de T_0 . Donc, la réponse est : pour tout réel x , $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

3.a Pour un réel $a \neq 0$, on note $M_a(-a ; f(-a))$ et $N_a(a ; f(a))$ deux points de $\mathcal{C}$. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) - f(-x) = -x$.

$$f(x) - f(-x) = \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^x) = \ln\left(\frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x}\right) \text{ (propriété } \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)\text{)}.$$

En factorisant le numérateur par e^{-x} : $1 + e^{-x} = e^{-x}(e^x + 1)$, donc $\frac{1 + e^{-x}}{1 + e^x} = \frac{e^{-x}(1 + e^x)}{1 + e^x} = e^{-x}$.

Donc $f(x) - f(-x) = \ln(e^{-x}) = -x$.

3.b En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.

Le coefficient directeur de la droite (M_aN_a) est $\frac{y_{N_a} - y_{M_a}}{x_{N_a} - x_{M_a}} = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)}$.

D'après la question précédente appliquée en $x = a$, $f(a) - f(-a) = -a$, donc ce coefficient vaut $\frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$.

Or T_0 a pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ (question 2.a). Les deux droites ayant le même coefficient directeur, donc, la réponse est : T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 1)

1. Affirmation : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$ est convexe. Vrai ou faux ?

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = e^x - 1$ puis $f''(x) = e^x$. Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , f'' est positive sur $\mathbb{R}$. Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie** : f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Affirmation : l'équation $(2e^x - 6)(e^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution réelle. Vrai ou faux ?

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul : $2e^x - 6 = 0$ ou $e^x + 2 = 0$.

Comme $e^x > 0$ pour tout x , on a $e^x + 2 > 2 > 0$: cette équation n'a donc aucune solution.

L'autre équation donne $2e^x = 6 \iff e^x = 3 \iff x = \ln(3)$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle, cette solution est unique).

Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie**.

3. Affirmation : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = 0$. **Vrai ou faux ?**

On factorise par le terme dominant de chaque membre : $\frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = \frac{e^{2x}(1 - e^{-2x})}{e^x(1 - xe^{-x})} = e^x \times \frac{1 - e^{-2x}}{1 - xe^{-x}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$ donc le numérateur de la fraction tend vers 1 ; et $xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc le dénominateur tend aussi vers 1.

Le quotient tend donc vers 1, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - x} = +\infty$.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** (la limite vaut $+\infty$, pas 0).

4. Affirmation : avec $f(x) = (6x + 5)e^{3x}$ et $F(x) = (2x + 1)e^{3x} + 4$ sur $\mathbb{R}$, F est la primitive de f qui vaut 5 en $x = 0$. **Vrai ou faux ?**

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables : $F'(x) = 2e^{3x} + 3(2x + 1)e^{3x} = e^{3x}(2 + 6x + 3) = (6x + 5)e^{3x} = f(x)$.

De plus $F(0) = (2 \times 0 + 1)e^0 + 4 = 1 + 4 = 5$.

Donc, la réponse est que l'affirmation est **vraie** : F est bien la primitive de f sur $\mathbb{R}$ valant 5 en 0.

5. On considère une fonction Python ‘mystere(L)’ qui parcourt une liste L, cumule la somme S de ses éléments, puis renvoie S divisée par la longueur de L (la moyenne des éléments). Affirmation : ‘mystere([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5])’ renvoie 50. **Vrai ou faux ?**

La somme des dix éléments de la liste vaut $1 + 9 + 9 + 5 + 0 + 3 + 6 + 12 + 0 + 5 = 50$, et la fonction renvoie cette somme divisée par la longueur de la liste (ici 10), soit $\frac{50}{10} = 5$. Donc, la réponse est que l'affirmation est **fausse** (le résultat renvoyé vaut 5, pas 50).

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 1)

1.a. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

Initialisation : pour $n = 0$, $2 \times 0,9^0 - 3 = 2 - 3 = -1 = u_0$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que pour un entier n fixé, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$. Alors $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3 = 0,9(2 \times 0,9^n - 3) - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 2,7 - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 3$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Donc, la réponse est que, par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

1.b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leq -1$.

Comme $0 < 0,9 < 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < 0,9^n \leq 1$.

En multipliant par 2 (positif) : $0 < 2 \times 0,9^n \leq 2$, puis en retranchant 3 à chaque membre : $-3 < 2 \times 0,9^n - 3 \leq -1$.

Donc, la réponse est que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leq -1$.

1.c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = (0,9u_n - 0,3) - u_n = -0,1u_n - 0,3$.

D'après la question précédente, $-3 < u_n \leq -1$, donc en multipliant par $-0,1$ (négatif, ce qui inverse les inégalités) : $0,1 \leq -0,1u_n < 0,3$.

En retranchant $0,3$ à chaque membre : $-0,2 \leq -0,1u_n - 0,3 < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n .

Donc, la réponse est que la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

1.d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par -3 (question 1.b) : elle converge donc vers une limite réelle. Comme $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ (car $0 < 0,9 < 1$), on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3$.

Donc, la réponse est que la suite (u_n) converge vers -3 .

2.a. On étudie la fonction g définie sur $] -3 ; -1]$ par $g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x$. Justifier les informations données par le tableau de variations de g (limites, sens de variation, valeur en -1).

Pour $x \in] -3 ; -1]$: $-1,5 < 0,5x \leq -0,5$, donc $0 < 0,5x + 1,5 \leq 1$: g est bien définie (et dérivable) sur cet intervalle.

$g'(x) = \frac{0,5}{0,5x + 1,5} - 1 = \frac{0,5 - (0,5x + 1,5)}{0,5x + 1,5} = \frac{-0,5x - 1}{0,5x + 1,5}$. Le dénominateur étant strictement positif, $g'(x)$ a le signe de $-0,5x - 1$, qui s'annule pour $x = -2$, est positif pour $x < -2$ et négatif pour $x > -2$.

Donc g est strictement croissante sur $] -3 ; -2]$ puis strictement décroissante sur $[-2 ; -1]$.

En $x \rightarrow -3$ (par valeurs supérieures), $0,5x + 1,5 \rightarrow 0^+$ donc $\ln(0,5x + 1,5) \rightarrow -\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = -\infty$.

Enfin $g(-1) = \ln(-0,5 + 1,5) - (-1) = \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1$, et $g(-2) = \ln(-1 + 1,5) + 2 = \ln(0,5) + 2 = 2 - \ln(2) \approx 1,307$.

2.b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -3 ; -1]$, et donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} .

Sur $] -3 ; -2]$, g est continue et strictement croissante, de limite $-\infty$ en -3 jusqu'à $g(-2) = 2 - \ln(2) \approx 1,307 > 0$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

Sur $[-2 ; -1]$, g est décroissante avec $g(-2) \approx 1,307 > 0$ et $g(-1) = 1 > 0$: g ne s'annule pas sur cet intervalle.

Donc, la réponse est que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -3 ; -1]$, et à la calculatrice on obtient l'encadrement $-2,889 < \alpha < -2,888$.

3.a. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \ln(0,5u_n + 1,5)$. En utilisant la formule de la question 1.a, démontrer que (v_n) est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.

En remplaçant u_n par son expression $2 \times 0,9^n - 3$: $0,5u_n + 1,5 = 0,5(2 \times 0,9^n - 3) + 1,5 = 0,9^n - 1,5 + 1,5 = 0,9^n$.

Donc $v_n = \ln(0,9^n) = n \ln(0,9)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = (n+1) \ln(0,9) - n \ln(0,9) = \ln(0,9)$, une constante.

Donc, la réponse est que (v_n) est **arithmétique de raison $\ln(0,9)$** (et de premier terme $v_0 = 0$).

3.b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = v_n$ équivaut à $g(u_n) = 0$.

Par définition, $u_n = v_n \iff u_n = \ln(0,5u_n + 1,5) \iff \ln(0,5u_n + 1,5) - u_n = 0 \iff g(u_n) = 0$ (puisque g est précisément définie par $g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x$). Donc, la réponse est que $u_n = v_n \iff g(u_n) = 0$.

3.c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.

Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = \alpha$, c'est-à-dire $2 \times 0,9^k - 3 = \alpha$. Comme $-2,889 < \alpha < -2,888$, cela donnerait $0,111 < 2 \times 0,9^k < 0,112$, soit $0,0555 < 0,9^k < 0,056$.

En appliquant le logarithme népérien (strictement croissant) : $\ln(0,0555) < k \ln(0,9) < \ln(0,056)$. Comme $\ln(0,9) < 0$, diviser inverse les inégalités : $\frac{\ln(0,056)}{\ln(0,9)} < k < \frac{\ln(0,0555)}{\ln(0,9)}$.

Le calcul donne $\frac{\ln(0,056)}{\ln(0,9)} \approx 27,36$ et $\frac{\ln(0,0555)}{\ln(0,9)} \approx 27,44$: il faudrait donc un entier k strictement compris entre 27,36 et 27,44, ce qui est impossible.

Donc, la réponse est qu'il n'existe **aucun rang $k \in \mathbb{N}$** tel que $u_k = \alpha$.

3.d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.

D'après la question 3.b, $u_k = v_k \iff g(u_k) = 0$, ce qui équivaut (par définition de α comme unique solution de $g(x) = 0$ sur $] -3 ; -1]$, intervalle auquel appartient u_k) à $u_k = \alpha$. Or la question 3.c montre qu'aucun rang k ne vérifie $u_k = \alpha$. Donc, la réponse est qu'il n'existe **aucun rang** $k \in \mathbb{N}$ tel que $v_k = u_k$.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 2)

1. Le réel $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ est égal à : a. $1 - \frac{1}{2}\ln(3)$; b. $\frac{1}{2}\ln(3)$; c. $3\ln(3) + \frac{1}{2}$; d. $-\frac{1}{2}\ln(3)$.

$$a = \ln(3^2) + \ln(\sqrt{3}) - \ln(3) - \ln(3^2) = 2\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(3) - 2\ln(3) = -\frac{1}{2}\ln(3).$$

Réponse d.

2. On considère l'équation (E) : $\ln(x) + \ln(x-10) = \ln(3) + \ln(7)$, d'inconnue réelle x . a. 3 est solution ; b. $5 - \sqrt{46}$ est solution ; c. (E) admet une unique solution réelle ; d. (E) admet deux solutions réelles.

Le domaine de définition impose $x > 0$ et $x > 10$, donc $x \in]10 ; +\infty[$.

Sur ce domaine, $(E) \iff \ln(x(x-10)) = \ln(21) \iff x(x-10) = 21 \iff x^2 - 10x - 21 = 0$, un trinôme de discriminant $\Delta = 100 + 84 = 184 = 4 \times 46$, donc $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{46}$.

Les racines sont $x_1 = 5 - \sqrt{46}$ et $x_2 = 5 + \sqrt{46}$. Comme $\sqrt{46} > 5$ (car $46 > 25$), $x_1 < 0$ n'appartient pas au domaine, tandis que $x_2 > 10$ appartient au domaine.

L'équation (E) admet donc une unique solution réelle, $5 + \sqrt{46}$. **Réponse c.**

3. Soit f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2(-1 + \ln(x))$. a. $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$; b. f est croissante sur $]0 ; +\infty[$; c. $f'(\sqrt{e})$ est différent de 0 ; d. la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}e$ est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, avec $f'(x) = 2x(-1 + \ln(x)) + x^2 \times \frac{1}{x} = -2x + 2x\ln(x) + x = x(2\ln(x) - 1)$.

$f'(x) = 0 \iff 2\ln(x) - 1 = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$: la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$ est donc horizontale, d'équation $y = f(\sqrt{e})$.

$$f(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^2(-1 + \ln(\sqrt{e})) = e\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e.$$

Donc, la tangente au point d'abscisse $\sqrt{e}$ a bien pour équation $y = -\frac{1}{2}e$. **Réponse d.**

4. Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons. La probabilité de tirer exactement 2 jetons jaunes, arrondie au millièm, est : a. 0,683 ; b. 0,346 ; c. 0,230 ; d. 0,165.

Les tirages étant successifs, indépendants et avec remise, la variable X comptant le nombre de jetons jaunes obtenus suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$.

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \approx 0,346. \text{ Réponse b.}$$

5. Dans les mêmes conditions (sac de 20 jetons jaunes, 30 bleus, 5 tirages avec remise), la probabilité de tirer au moins un jeton jaune, arrondie au millièm, est : a. 0,078 ; b. 0,259 ; c. 0,337 ; d. 0,922.

$$X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{2}{5}\right). P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^5 \approx 0,922.$$

Réponse d.

6. Toujours dans les mêmes conditions, si on répète l'expérience un très grand nombre de fois, le nombre moyen de jetons jaunes obtenus est égal à : a. 0,4 ; b. 1,2 ; c. 2 ; d. 2,5.

L'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ vaut $E(X) = np$. Ici, $E(X) = 5 \times \frac{2}{5} = 2$.

Réponse c.

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 1)

1.a Lors d'une kermesse, une roue comporte quatre cases blanches et huit cases rouges, et un sac contient cinq jetons numérotés de 1 à 5. On tourne la roue : si la case est blanche, on tire un seul jeton du sac ; si elle est rouge, on tire successivement et sans remise deux jetons. Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair. On note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R « la case obtenue est rouge » et G « le joueur gagne la partie ». Donner la valeur de $P_B(G)$.

Si la case est blanche, on tire un seul jeton parmi les 5 ; il y a 3 numéros impairs (1, 3, 5). Donc $P_B(G) = \frac{3}{5} = 0,6$.

1.b On admet que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à 0,3. Construire l'arbre de probabilités complet de l'expérience.

La roue comporte $4 + 8 = 12$ cases : $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et $P(R) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Sur la branche B , un seul jeton est tiré : $P_B(G) = 0,6$ donc $P_B(\overline{G}) = 0,4$.

Sur la branche R , deux jetons sont tirés successivement sans remise : $P_R(G) = 0,3$ (valeur admise) donc $P_R(\overline{G}) = 0,7$.

L'arbre pondéré comporte donc, à la racine, les branches B (poids $\frac{1}{3}$) et R (poids $\frac{2}{3}$), puis sur chacune les branches G et $\overline{G}$ avec les poids ci-dessus.

2.a Montrer que $P(G) = 0,4$.

D'après la formule des probabilités totales, $P(G) = P(B \cap G) + P(R \cap G) = P(B) \times P_B(G) + P(R) \times P_R(G) = \frac{1}{3} \times 0,6 + \frac{2}{3} \times 0,3 = 0,2 + 0,2 = 0,4$.

2.b Un joueur gagne la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?

On cherche $P_G(B) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$.

3. Les évènements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.

$$P(B) \times P(G) = \frac{1}{3} \times 0,4 = \frac{2}{15} \approx 0,133.$$

$$P(B \cap G) = \frac{1}{3} \times 0,6 = 0,2.$$

Comme $P(B) \times P(G) \neq P(B \cap G)$, les évènements B et G ne sont pas indépendants.

4.a Un même joueur fait dix parties indépendantes, les jetons étant remis dans le sac après chaque partie. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

On répète 10 fois, de façon identique et indépendante, l'épreuve de Bernoulli « gagner une partie » de probabilité de succès $P(G) = 0,4$. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,4)$.

4.b Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,4^3 \times 0,6^7 \approx 0,215.$$

4.c Calculer $P(X \geq 4)$ arrondie à 10^{-3} près, et interpréter ce résultat.

À la calculatrice, $P(X \leq 3) \approx 0,382$, donc $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0,618$.

Sur dix parties jouées, le joueur a donc plus de 6 chances sur 10 d'en gagner au moins quatre.

5.a Un joueur fait n parties (indépendantes) et on note p_n la probabilité de l'évènement « le joueur gagne au moins une partie ». Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$.

L'évènement contraire de « gagner au moins une partie sur n » est « ne gagner aucune partie », de probabilité $(1 - 0,4)^n = 0,6^n$ par indépendance des parties. Donc $p_n = 1 - 0,6^n$.

5.b Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99.

On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0,6^n \geq 0,99$, soit $0,6^n \leq 0,01$.

Comme $0 < 0,6 < 1$, la fonction logarithme népérien est strictement croissante, donc $0,6^n \leq 0,01 \iff n \ln(0,6) \leq \ln(0,01) \iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)}$ (l'inégalité change de sens car $\ln(0,6) < 0$).

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \approx 9,02$. Donc, la réponse est $n = 10$: il faut jouer au moins 10 parties pour gagner au moins une partie avec une probabilité d'au moins 99 %.

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse. Après une première injection de 1 mg, le patient est placé sous perfusion : toutes les 30 minutes, l'organisme élimine 10 % de la quantité présente et reçoit 0,25 mg supplémentaire. Pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité (en mg) au bout de n périodes de 30 minutes, avec $u_0 = 1$. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.

En 30 minutes, 10 % de $u_0 = 1$ mg disparaissent : il reste $0,9 \times 1 = 0,9$ mg, auxquels s'ajoutent 0,25 mg supplémentaires. Donc $u_1 = 0,9 + 0,25 = 1,15$ mg.

Partie A — 2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.

Au bout de n périodes, la quantité présente est u_n . Pendant la période suivante, 10 % de cette quantité disparaît, il en reste donc $0,9u_n$, puis 0,25 mg supplémentaires sont administrés. D'où, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.

Partie A — 3.a Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 5$.

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,15$, donc $u_0 \leq u_1 < 5$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq u_{n+1} < 5$. En multipliant par $0,9 > 0$: $0,9u_n \leq 0,9u_{n+1} < 4,5$. En ajoutant 0,25 à chaque membre : $0,9u_n + 0,25 \leq 0,9u_{n+1} + 0,25 < 4,75$, soit $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 4,75 < 5$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 5$.

Partie A — 3.b En déduire que la suite (u_n) est convergente.

L'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$ montre que (u_n) est croissante, et l'inégalité $u_{n+1} < 5$ montre qu'elle est majorée par 5. Une suite croissante et majorée étant convergente, **la suite (u_n) converge** vers une limite $\ell \leq 5$.

Partie A — 4.a Le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang est supérieure ou égale à 1,8 mg. Recopier et compléter le script Python suivant afin de déterminer au bout de combien de périodes de 30 minutes le médicament devient réellement efficace : ‘def efficace() :’ / ‘u = 1’ / ‘n = 0’ / ‘while ... :’ / ‘ u = ..’ / ‘ n = n + 1’ / ‘return n’.

- La condition de la boucle ‘while’ doit rester vraie tant que le médicament n’est pas encore efficace, donc tant que ‘u < 1.8’.
- L’instruction à répéter doit reproduire la relation de récurrence : ‘u = 0.9 * u + 0.25’.
- Le script complété est donc : ‘def efficace() :’ puis ‘u = 1’, ‘n = 0’, ‘while u < 1.8 :’, ‘ u = 0.9 * u + 0.25’, ‘ n = n + 1’, puis ‘return n’.

Partie A — 4.b Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l’exercice.

En itérant la relation $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$ à partir de $u_0 = 1$, on obtient $u_7 \approx 1,783 < 1,8$ et $u_8 \approx 1,854 \geq 1,8$.

Le script renvoie donc $n = 8$: le médicament devient réellement efficace au bout de 8 périodes de 30 minutes, soit **4 heures** après le début de la perfusion.

Partie A — 5.a Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 2,5 - u_n$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 2,5 - u_{n+1} = 2,5 - (0,9u_n + 0,25) = 2,25 - 0,9u_n$.

Or $u_n = 2,5 - v_n$, donc $v_{n+1} = 2,25 - 0,9(2,5 - v_n) = 2,25 - 2,25 + 0,9v_n = 0,9v_n$.

La relation $v_{n+1} = 0,9v_n$ étant vraie pour tout entier naturel n , (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9, de premier terme $v_0 = 2,5 - u_0 = 2,5 - 1 = 1,5$.

Partie A — 5.b Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

(v_n) étant géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = 1,5$, on a, pour tout entier naturel n , $v_n = 1,5 \times 0,9^n$. Comme $u_n = 2,5 - v_n$, on en déduit que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

Partie A — 5.c Le médicament devient toxique lorsque sa quantité dans le sang dépasse 3 mg. D’après ce modèle, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Comme $-1 < 0,9 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2,5 - 1,5 \times 0 = 2,5$.

De plus, pour tout entier naturel n , $0,9^n > 0$, donc $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n < 2,5 < 3$: la quantité de médicament reste toujours strictement inférieure à 2,5 mg.

Donc, la réponse est que **le traitement ne présente aucun risque de toxicité pour le patient**, la quantité de médicament restant en permanence inférieure à 3 mg.

Partie B — 1. Après une injection initiale de 1 mg, le patient est placé sous perfusion à un débit de 0,5 mg par heure. La quantité de médicament dans le sang, en fonction du temps t (en heures), est modélisée par $f(t) = 2,5 - 1,5e^{-0,2t}$ sur $[0 ; +\infty[$. Le médicament est-il réellement efficace au bout de 3 h 45 min ?

$$3 \text{ h } 45 \text{ min} = 3 + \frac{45}{60} = 3 + 0,75 = 3,75 \text{ heures.}$$

$$f(3,75) = 2,5 - 1,5e^{-0,2 \times 3,75} = 2,5 - 1,5e^{-0,75} \approx 1,791.$$

Comme $1,791 < 1,8$, **le médicament n'est pas encore réellement efficace au bout de 3 h 45 min** selon ce modèle.

Partie B — 2. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps le médicament devient réellement efficace.

$$\text{On cherche } t \geq 0 \text{ tel que } f(t) \geq 1,8, \text{ soit } 2,5 - 1,5e^{-0,2t} \geq 1,8 \iff 1,5e^{-0,2t} \leq 0,7 \iff e^{-0,2t} \leq \frac{7}{15}.$$

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante, cette inégalité équivaut à $-0,2t \leq \ln\left(\frac{7}{15}\right)$, soit, en divisant par $-0,2 < 0$ (ce qui inverse le sens), $t \geq -5 \ln\left(\frac{7}{15}\right)$.

Or $-5 \ln\left(\frac{7}{15}\right) \approx 3,811$ heures, soit 3 heures et $0,811 \times 60 \approx 48,6$ minutes. Donc, la réponse est que le médicament devient réellement efficace au bout d'environ **3 h 49 min**.

Partie B — 3. Comparer le résultat obtenu avec celui de la question 4.b du modèle discret de la Partie A.

Dans le modèle discret, le médicament devient efficace au bout de 4 heures, alors que dans le modèle continu il le devient au bout d'environ 3 h 49 min, un délai plus court. **Le modèle continu prévoit donc une efficacité un peu plus rapide que le modèle discret.**

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points $A(1 ; 3)$ et $B(3 ; 5)$, et on donne ci-dessus la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f ainsi que la tangente (AB) à $\mathcal{C}_f$ au point A. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

L'ordonnée du point A donne $f(1) = 3$. Le nombre dérivé $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente (AB) en A : $f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$.

Partie A — 2.a On admet que f est définie par $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où a et b sont des réels positifs. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

Comme $a \geq 0$ et $x^2 \geq 0$ pour tout réel x , on a $ax^2 + 1 \geq 1 > 0$: f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \frac{2ax}{ax^2 + 1}$ (dérivée de $\ln(u)$ égale à $\frac{u'}{u}$, avec $u(x) = ax^2 + 1$ et $u'(x) = 2ax$).

Partie A — 2.b Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Les résultats de la question 1 donnent le système
$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(a+1) + b = 3 \\ \frac{2a}{a+1} = 1 \end{cases}.$$

La deuxième équation donne $2a = a + 1 \iff a = 1$. En reportant dans la première : $\ln(1+1) + b = 3 \iff b = 3 - \ln 2$.

Donc, la réponse est $a = 1$ et $b = 3 - \ln 2$, ce qui donne, sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$.

Partie B — 1. On admet désormais que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$. Montrer que f est une fonction paire.

Pour tout réel x , $f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) + 3 - \ln 2 = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2 = f(x)$. Donc, f est une fonction paire (sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

Partie B — 2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$, et par composition avec la fonction $\ln$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

f étant paire, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B — 3. Déterminer l'expression de $f'(x)$, étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations complet (limites en $\pm\infty$ et valeur exacte du minimum).

Comme $x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x , f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Le dénominateur $x^2 + 1$ étant strictement positif, $f'(x)$ est du signe de $2x$: $f'(x) < 0$ sur $] -\infty ; 0[$ et $f'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$, avec $f'(0) = 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, avec un minimum en $x = 0$ valant $f(0) = \ln(1) + 3 - \ln 2 = 3 - \ln 2$.

Tableau de variations : f décroît de $+\infty$ (limite en $-\infty$) jusqu'au minimum $3 - \ln 2$ atteint en $x = 0$, puis croît de $3 - \ln 2$ jusqu'à $+\infty$ (limite en $+\infty$).

Partie B — 4. À l'aide du tableau de variations de f , donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet exactement deux solutions.

D'après le tableau de variations, f décroît strictement puis croît strictement de part et d'autre du minimum $3 - \ln 2$, avec pour limites $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Donc, la réponse est que l'équation $f(x) = k$ admet exactement deux solutions si et seulement si $k > 3 - \ln 2$.

Partie B — 5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

$$f(x) = 3 + \ln 2 \iff \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2 = 3 + \ln 2 \iff \ln(x^2 + 1) = 2 \ln 2 \iff \ln(x^2 + 1) = \ln 4.$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante, cette égalité équivaut à $x^2 + 1 = 4$, soit $x^2 = 3$, soit $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

Donc, la réponse est que l'ensemble des solutions est $S = \{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$.

Partie C — 1. On rappelle que $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$ sur $\mathbb{R}$. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Par lecture graphique de la courbe, la convexité de $\mathcal{C}_f$ semble changer aux points d'abscisses -1 et 1 : on peut conjecturer l'existence de **deux points d'inflexion, d'abscisses -1 et 1** .

Partie C — 2. Montrer que, pour tout réel x , $f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$.

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (numérateur $2x$, dénominateur $x^2 + 1$ ne s'annulant jamais), donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Avec } \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}, u(x) = 2x, u'(x) = 2, v(x) = x^2 + 1, v'(x) = 2x : f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Partie C — 3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Le dénominateur $(x^2 + 1)^2$ est toujours strictement positif, donc $f''(x)$ est du signe de $1 - x^2$, qui s'annule en $x = -1$ et $x = 1$, et est positif entre les deux racines, soit sur $] -1 ; 1[$.

f est convexe lorsque $f''(x) \geq 0$. Donc, la réponse est que f **est convexe sur l'intervalle $[-1 ; 1]$** , ce qui confirme la conjecture graphique de la question 1 (changements de convexité en $x = -1$ et $x = 1$).

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 2)

Partie A — 1. Sur un graphique (non reproduit ici) sont tracées les courbes représentatives $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'une fonction f et de sa dérivée f' , toutes deux définies sur $]3 ; +\infty[$: $\mathcal{C}_1$ part de $-\infty$ au voisinage de 3 et croît ensuite jusqu'à $+\infty$; $\mathcal{C}_2$ part de valeurs élevées au voisinage de 3 et décroît en restant positive. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente, en justifiant.

Si $\mathcal{C}_1$ représentait la dérivée f' , celle-ci serait toujours négative puis positive selon la lecture du graphique ; or la fonction représentée par $\mathcal{C}_2$ n'est pas décroissante puis croissante : elle est toujours décroissante. Il y a donc une contradiction.

$\mathcal{C}_2$ reste positive sur tout l'intervalle $]3 ; +\infty[$, ce qui est cohérent avec une fonction f strictement croissante sur cet intervalle (comme le montre $\mathcal{C}_1$) : une fonction croissante a une dérivée positive.

Donc, la réponse est que $\mathcal{C}_2$ représente la fonction dérivée f' , et $\mathcal{C}_1$ représente la fonction f .

Partie A — 2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.

Par lecture graphique de la courbe $\mathcal{C}_1$, on lit approximativement $f(5,6) \approx 3$. Donc, la réponse est que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution proche de $x = 5,6$.

Partie A — 3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f .

La courbe $\mathcal{C}_1$ « tourne le dos » à l'axe des abscisses de façon décroissante sur tout l'intervalle observé : elle est située sous chacune de ses tangentes. Donc, la réponse est que la fonction f semble concave sur $]3 ; +\infty[$.

Partie B — 1. Justifier que la quantité $\ln(x^2 - x - 6)$ est bien définie pour les valeurs de x de l'intervalle $I =]3 ; +\infty[$.

Le trinôme $x^2 - x - 6$ a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2$.

Ses racines sont donc $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$.

Un trinôme du second degré est du signe de son coefficient dominant (ici positif, $a = 1$) à l'extérieur de ses racines, et du signe opposé entre ses racines : $x^2 - x - 6 > 0$ pour $x \in]-\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[$.

Donc, la réponse est que $x^2 - x - 6 > 0$ sur $I =]3 ; +\infty[$, et donc $\ln(x^2 - x - 6)$ y est bien défini.

Partie B — 2. On admet que $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ sur I . Calculer les limites de f aux deux bornes de I , puis en déduire une équation d'une asymptote à la courbe de f .

Limite en $+\infty$: pour $x > 3$, on factorise $x^2 - x - 6 = x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right) = 1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x - 6 = +\infty$, puis par composition avec la fonction logarithme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en 3 : en écrivant $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$, on a $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 2)(x - 3) = 5 \times 0^+ = 0^+$, donc par composition avec la fonction logarithme, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$.

Donc, la réponse est que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .

Partie B — 3.a Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$.

La fonction $x \mapsto x^2 - x - 6$ est dérivable et strictement positive sur I (question B.1), donc $f = \ln(x^2 - x - 6)$ est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables, et $f'(x) = \frac{(x^2 - x - 6)'}{x^2 - x - 6} = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$.

Donc, la réponse est $f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$.

Partie B — 3.b Étudier le sens de variation de f sur I , puis dresser son tableau de variations en y faisant figurer les limites aux bornes de I .

Sur I , le dénominateur $x^2 - x - 6$ est strictement positif (question B.1), donc $f'(x)$ est du signe du numérateur $2x - 1$.

Pour tout $x > 3$, on a $2x - 1 > 2 \times 3 - 1 = 5 > 0$, donc $f'(x) > 0$ sur tout l'intervalle I .

Donc, la réponse est que f est strictement croissante sur I , de $-\infty$ (limite en 3) à $+\infty$ (limite en $+\infty$).

Partie B — 4.a Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5 ; 6[$.

La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur I , donc en particulier sur $]5 ; 6[$.

$f(5) = \ln(5^2 - 5 - 6) = \ln(14) \approx 2,64 < 3$ et $f(6) = \ln(6^2 - 6 - 6) = \ln(24) \approx 3,18 > 3$.

Comme 3 est une valeur intermédiaire entre $f(5)$ et $f(6)$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur $]5 ; 6[$.

Donc, la réponse est que l'équation $f(x) = 3$ admet bien une unique solution $\alpha \in]5 ; 6[$.

Partie B — 4.b Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.

La calculatrice donne $f(5,63) \approx 2,999 < 3$ et $f(5,64) \approx 3,004 > 3$.

Donc, la réponse est $5,63 < \alpha < 5,64$.

Partie B — 5.a Justifier que $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.

La fonction $f' = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$ est un quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas : elle est donc dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, $f''(x) = \frac{2 \times (x^2 - x - 6) - (2x - 1) \times (2x - 1)}{(x^2 - x - 6)^2}$.

On développe le numérateur : $2(x^2 - x - 6) - (2x - 1)^2 = 2x^2 - 2x - 12 - (4x^2 - 4x + 1) = 2x^2 - 2x - 12 - 4x^2 + 4x - 1 = -2x^2 + 2x - 13$.

Donc, la réponse est $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.

Partie B — 5.b Étudier la convexité de f sur I .

Le dénominateur $(x^2 - x - 6)^2$ est strictement positif sur I , donc $f''(x)$ est du signe du numérateur $-2x^2 + 2x - 13$.

Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times (-13) = 4 - 104 = -100 < 0$: il n'a donc pas de racine réelle et garde un signe constant, celui de son coefficient dominant $a = -2 < 0$: il est donc strictement négatif pour tout réel x .

Donc, la réponse est que $f''(x) < 0$ pour tout $x \in I$: la fonction f est concave sur I .

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + x^2)$. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2022$: a. n'a aucune solution ; b. a exactement une solution ; c. a exactement deux solutions ; d. a une infinité de solutions.

$$f(x) = 2022 \iff \ln(1 + x^2) = 2022 \iff 1 + x^2 = e^{2022} \iff x^2 = e^{2022} - 1.$$

Le réel $e^{2022} - 1$ est strictement positif, donc cette dernière équation a exactement deux solutions opposées : $x = \sqrt{e^{2022} - 1}$ et $x = -\sqrt{e^{2022} - 1}$.

Donc, la réponse est c.

2. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x \ln(x) - x^2$, de courbe représentative $\mathcal{C}_g$. a. g est convexe sur $]0 ; +\infty[$; b. g est concave sur $]0 ; +\infty[$; c. $\mathcal{C}_g$ a exactement un point d'inflexion sur $]0 ; +\infty[$; d. $\mathcal{C}_g$ a exactement deux points d'inflexion sur $]0 ; +\infty[$.

g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables, avec $g'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 2x = \ln(x) - 2x + 1$.

g' est à son tour dérivable sur $]0 ; +\infty[$, avec $g''(x) = \frac{1}{x} - 2$.

$g''(x) = 0 \iff \frac{1}{x} = 2 \iff x = \frac{1}{2}$. De plus, $g''(x) = \frac{1-2x}{x}$ change de signe en $x = \frac{1}{2}$ (positif avant, négatif après, car $x > 0$).

g'' s'annule en changeant de signe une seule fois sur $]0 ; +\infty[$, donc $\mathcal{C}_g$ admet exactement un point d'inflexion, d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Donc, la réponse est **c**.

3. On considère la fonction f définie sur $] -1 ; 1[$ par $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Une primitive de f sur $] -1 ; 1[$ est la fonction : **a.** $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$; **b.** $g(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$; **c.** $g(x) = \frac{x^2}{2 \left(x - \frac{x^3}{3}\right)}$;

d. $g(x) = \frac{x^2}{2} \ln(1-x^2)$.

Testons la fonction g de la réponse a, définie par $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$ sur $] -1 ; 1[$.

En posant $u(x) = 1-x^2$, dérivable et strictement positive sur $] -1 ; 1[$, on a $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(u(x))$, donc $g'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} = f(x)$.

La fonction g de la réponse a est donc bien une primitive de f sur $] -1 ; 1[$.

Donc, la réponse est **a**.

4. La fonction $x \mapsto \ln(-x^2 - x + 6)$ est définie sur : **a.** $] -3 ; 2[$; **b.** $] -\infty ; 6[$; **c.** $]0 ; +\infty[$; **d.** $]2 ; +\infty[$.

Cette fonction est définie exactement là où $-x^2 - x + 6 > 0$, c'est-à-dire là où $x^2 + x - 6 < 0$.

Le trinôme $x^2 + x - 6$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$, donc deux racines réelles $x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$.

Un trinôme du second degré de coefficient dominant positif est strictement négatif strictement entre ses deux racines : $x^2 + x - 6 < 0 \iff x \in] -3 ; 2[$.

La fonction est donc définie sur $] -3 ; 2[$, ce qui correspond à la réponse a.

5. On considère la fonction f définie sur $]0,5 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3 \ln(2x-1)$. Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est : **a.** $y = 4x - 7$; **b.** $y = 2x - 4$; **c.** $y = -3(x-1) + 4$; **d.** $y = 2x - 1$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = f(1) + f'(1)(x-1)$.

$f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 3 \ln(2 \times 1 - 1) = 1 - 4 + 3 \ln(1) = -3 + 0 = -3$.

f est dérivable sur $]0,5 ; +\infty[$, avec $f'(x) = 2x - 4 + 3 \times \frac{2}{2x-1} = 2x - 4 + \frac{6}{2x-1}$, donc $f'(1) = 2 - 4 + \frac{6}{1} = -2 + 6 = 4$.

Une équation de la tangente est donc $y = -3 + 4(x-1) \iff y = 4x - 4 - 3 \iff y = 4x - 7$.

Donc, la réponse est **a**.

6. L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$ est : a. $S =]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$; b. $S =]1 ; +\infty[$; c. $S = \emptyset$; d. $S =]-1 ; 1[$.

Pour que les deux logarithmes soient définis, il faut $x+3 > 0$ et $x+1 > 0$, c'est-à-dire $x > -3$ et $x > -1$: l'inéquation n'a donc de sens que sur $] -1 ; +\infty[$.

Sur cet intervalle, $2\ln(x+1) = \ln((x+1)^2)$, et $\ln$ étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$: $\ln(x+3) < \ln((x+1)^2) \iff x+3 < (x+1)^2$.

$$x+3 < x^2 + 2x + 1 \iff 0 < x^2 + x - 2.$$

Le trinôme x^2+x-2 a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, donc deux racines $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$; il est strictement positif à l'extérieur de ses racines, donc sur $] -\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$.

En tenant compte de la condition $x > -1$ posée au début, l'ensemble des solutions est finalement $S =]1 ; +\infty[$, soit la réponse **b**.

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) + 1$, de courbe représentative C_f . Déterminer la limite de f en 0, puis sa limite en $+\infty$.

On sait, par croissances comparées, que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$. Donc, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 + 1 = 1$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$; par limite de produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty$, puis par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2.a On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, de dérivée f' . Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 1 + \ln(x)$.

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme d'un produit de fonctions dérivables ($x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$) et d'une constante. En utilisant la formule de dérivation d'un produit, pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

2.b En déduire le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$, en y faisant figurer la valeur exacte de l'extremum et les limites.

$f'(x) \geq 0 \iff \ln(x) + 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq e^{-1}$ (la fonction exponentielle étant strictement croissante).

Donc, $f'(x) < 0$ sur $]0 ; e^{-1}[$ et $f'(x) > 0$ sur $]e^{-1} ; +\infty[$: la fonction f est donc strictement décroissante sur $]0 ; e^{-1}[$, puis strictement croissante sur $[e^{-1} ; +\infty[$.

La fonction f admet donc un minimum en $x = e^{-1}$, valant $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) + 1 = e^{-1} \times (-1) + 1 = 1 - e^{-1}$.

Le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$ est donc : f décroît de 1 (limite en 0, non atteinte) jusqu'au minimum $1 - e^{-1}$ atteint en $x = e^{-1}$, puis croît de $1 - e^{-1}$ jusqu'à $+\infty$ (limite en $+\infty$).

2.c Justifier que, pour tout $x \in]0 ; 1[$, on a $f(x) \in]0 ; 1[$.

D'après le tableau de variation précédent, sur l'intervalle $]0 ; 1[$, la fonction f prend ses valeurs entre son minimum $1 - e^{-1}$ et sa valeur en 1 (non atteinte sur l'intervalle ouvert) : $f(1) = 1 \times \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1$.

Ainsi, pour tout x de $]0 ; 1[$, on a $1 - e^{-1} \leq f(x) < 1$.

Or $e^{-1} < 1$ donc $1 - e^{-1} > 0$: on a donc bien $f(x) \in]0 ; 1[$ pour tout $x \in]0 ; 1[$.

3.a Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

On calcule $f'(1) = \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1$ et $f(1) = 1$ (calculé à la question précédente).

Donc, une équation de (T) est $y = 1 \times (x - 1) + 1 = x - 1 + 1 = x$, c'est-à-dire $y = x$.

3.b Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction f' , définie par $f'(x) = \ln(x) + 1$, est elle-même dérivable sur $]0 ; +\infty[$, de dérivée $f''(x) = \frac{1}{x}$.

Or $\frac{1}{x} > 0$ pour tout x de $]0 ; +\infty[$, donc $f''(x) > 0$ sur cet intervalle : la fonction f est donc strictement convexe sur $]0 ; +\infty[$.

3.c En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \geq x$.

La fonction f est convexe sur $]0 ; +\infty[$, donc sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier au-dessus de (T), d'équation $y = x$.

Donc, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \geq x$.

4.a On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 \in]0 ; 1[$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 1$.

Initialisation : par hypothèse, $u_0 \in]0 ; 1[$, soit $0 < u_0 < 1$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit n un entier naturel fixé, et supposons que $0 < u_n < 1$. D'après la question 2.c, comme $u_n \in]0 ; 1[$, on a $f(u_n) \in]0 ; 1[$, c'est-à-dire $0 < u_{n+1} < 1$: la propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire ; donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 1$.

4.b En utilisant le résultat de la question 3.c, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

D'après la question 3.c, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \geq x$. Comme, d'après la question précédente, $u_n > 0$ pour tout entier naturel n , on peut appliquer cette inégalité à $x = u_n$: $f(u_n) \geq u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$.

La suite (u_n) est donc croissante.

4.c En déduire que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante (question précédente) et majorée par 1 (d'après la question 4.a). Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 2)

Partie A — Le coyote est un mammifère sauvage proche du loup vivant en Amérique du Nord. Dans l'Oklahoma, 70 % des coyotes sont porteurs d'une maladie appelée l'ehrlichiose. Un test de dépistage existe : si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas ; s'il n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas. On capture un coyote au hasard et on lui applique le test. On note M l'évènement « le coyote est malade » et T l'évènement « le test est positif ». 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

L'arbre part de la racine avec les branches M (probabilité 0,7) et $\overline{M}$ (probabilité 0,3).

Sous M : les branches T (probabilité 0,97) et $\overline{T}$ (probabilité 0,03).

Sous $\overline{M}$: les branches T (probabilité 0,05) et $\overline{T}$ (probabilité 0,95).

2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et ait un test positif.

D'après l'arbre pondéré, $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,7 \times 0,97 = 0,679$.

3. Démontrer que $P(T) = 0,694$.

D'après la formule des probabilités totales, comme M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers :
 $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$.

Or $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$.

Donc, $P(T) = 0,679 + 0,015 = 0,694$.

4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif. Calculer cette valeur, arrondie au millième.

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,679}{0,694} \approx 0,978 \text{ (arrondi au millième)}.$$

5.a Par analogie, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et la calculer, arrondie au millième.

La valeur prédictive négative du test est la probabilité que le coyote ne soit effectivement pas malade sachant que son test est négatif, c'est-à-dire $P_{\overline{T}}(\overline{M})$.

On calcule $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,694 = 0,306$ et $P(\overline{T} \cap \overline{M}) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,3 \times 0,95 = 0,285$.

$$\text{Donc, } P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{M})}{P(\overline{T})} = \frac{0,285}{0,306} \approx 0,931 \text{ (arrondi au millième)}.$$

5.b Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter le résultat.

Comme $0,978 > 0,931$, la valeur prédictive positive est supérieure à la valeur prédictive négative : un résultat positif au test permet donc de conclure à la maladie avec un peu plus de certitude (environ 2,2 % d'erreur) qu'un résultat négatif ne permet de conclure à l'absence de maladie (environ 6,9 % d'erreur).

Partie B — On admet désormais que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif vaut 0,694. 1.a On capture cinq coyotes au hasard, ce choix étant assimilé à un tirage avec remise ; X compte, parmi ces cinq coyotes, le nombre de ceux dont le test est positif. Quelle est la loi de X ? Justifier et préciser ses paramètres.

La capture des cinq coyotes correspond à la répétition de cinq épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (par assimilation à un tirage avec remise), chacune de paramètre de succès 0,694 (« le test est positif »). Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,694$, notée $X \sim \mathcal{B}(5 ; 0,694)$.

1.b Calculer la probabilité qu'un seul des cinq coyotes ait un test positif, arrondie au centième.

$$P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,694^1 \times (1 - 0,694)^4 \approx 0,03 \text{ (arrondi au centième).}$$

1.c Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre des cinq coyotes aient un test positif. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier.

Il s'agit de comparer $P(X \geq 4)$ à $\frac{1}{2}$, avec $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$.

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \times 0,694^4 \times 0,306^1 \approx 0,3549 \text{ et } P(X = 5) = \binom{5}{5} \times 0,694^5 \times 0,306^0 \approx 0,1610.$$

Donc, $P(X \geq 4) \approx 0,3549 + 0,1610 = 0,5159$, valeur strictement supérieure à 0,5.

L'affirmation du vétérinaire est donc **vraie**.

2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'au moins un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils en capturer pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ait un test positif soit supérieure à 0,99 ?

On note n le nombre de coyotes capturés et Y la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,694$ comptant le nombre de tests positifs parmi eux. On cherche le plus petit n tel que $P(Y \geq 1) > 0,99$.

Or $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,306^n$ (probabilité de l'évènement contraire, qu'aucun test ne soit positif).

On résout donc dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $1 - 0,306^n > 0,99 \iff 0,306^n < 0,01$.

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$: $\ln(0,306^n) < \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,306) < \ln(0,01)$.

Comme $\ln(0,306) < 0$, l'inégalité change de sens en divisant : $n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,306)} \approx 3,89$.

Donc, les vétérinaires doivent capturer au moins **4 coyotes**.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

Partie 1 — Stéphanie s'entraîne au basket-ball. Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points, et parmi eux 60 % sont réussis; les trois quarts restants sont des tirs à trois points, et parmi eux 35 % sont réussis. Elle réalise un tir; on note D l'évènement « le tir choisi est un tir à deux points » et R l'évènement « le tir est réussi ». 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

L'arbre part de la racine avec les branches D (probabilité 0,25) et $\overline{D}$ (probabilité 0,75). Sur la branche D , les sous-branches sont R (probabilité 0,6) et $\overline{R}$ (probabilité 0,4). Sur la branche $\overline{D}$, les sous-branches sont R (probabilité 0,35) et $\overline{R}$ (probabilité 0,65).

2. Calculer la probabilité $P(\overline{D} \cap R)$.

D'après la lecture de l'arbre : $P(\overline{D} \cap R) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(R) = 0,75 \times 0,35 = \mathbf{0,2625}$.

3. Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir quelconque est égale à 0,4125.

On calcule de même $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,25 \times 0,6 = 0,15$.

Les évènements D et $\overline{D}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(R) = P(D \cap R) + P(\overline{D} \cap R) = 0,15 + 0,2625 = \mathbf{0,4125}$, ce qui est le résultat annoncé.

4. Sachant que Stéphanie a réussi son tir, calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points (arrondir au centième).

D'après la définition de la probabilité conditionnelle : $P_R(\overline{D}) = \frac{P(R \cap \overline{D})}{P(R)} = \frac{0,2625}{0,4125}$.

On obtient $P_R(\overline{D}) \approx 0,6364$, soit, arrondi au centième, **0,64**.

Partie 2 — Stéphanie réalise une série de 10 tirs à trois points, supposés indépendants; on rappelle que la probabilité de réussir un tir à trois points vaut 0,35. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de tirs réussis. 1. Justifier que X suit une loi binomiale, et préciser ses paramètres.

Les 10 tirs sont indépendants et chacun n'a que deux issues possibles (réussi ou raté), avec la même probabilité de succès 0,35 à chaque tir : X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$.

2. Calculer l'espérance de X , et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour une loi binomiale, $E(X) = np = 10 \times 0,35 = \mathbf{3,5}$. Cela signifie que, si Stéphanie répète très souvent des séries de 10 tirs à trois points, elle réussira en moyenne 3,5 tirs par série.

3. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus sur cette série de 10 (arrondir au centième).

Rater 4 tirs ou plus sur 10, c'est en réussissant au plus $10 - 4 = 6$: l'évènement demandé correspond donc à $(X \leq 6)$.

À la calculatrice, avec X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$: $P(X \leq 6) \approx$
0,97.

4. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs sur cette série de 10 (arrondir au centième).

Rater au plus 4 tirs sur 10, c'est en réussissant au moins $10 - 4 = 6$: l'évènement demandé correspond donc à $(X \geq 6)$.

À la calculatrice : $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx$ **0,09.**

Partie 3 — Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points indépendants, avec n entier naturel non nul, la probabilité de réussir chaque tir restant égale à 0,35. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité qu'elle réussisse au moins un tir parmi les n soit supérieure ou égale à 0,99.

La probabilité de rater un tir donné vaut $1 - 0,35 = 0,65$. Comme les tirs sont indépendants, la probabilité de les rater tous les n vaut $0,65^n$.

La probabilité de réussir au moins un tir parmi les n est donc l'évènement contraire de « tout rater », de probabilité $1 - 0,65^n$.

On cherche le plus petit entier naturel non nul n tel que $1 - 0,65^n \geq 0,99$, c'est-à-dire $0,65^n \leq 0,01$.

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, cette inégalité équivaut à $\ln(0,65^n) \leq \ln(0,01)$, soit $n \ln(0,65) \leq \ln(0,01)$.

Comme $\ln(0,65) < 0$, diviser par $\ln(0,65)$ inverse le sens de l'inégalité : $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,65)}$.

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,65)} \approx 10,69$, donc le plus petit entier naturel qui convient est $n = 11$: Stéphanie doit prévoir une série d'au moins 11 tirs.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - x - 2$, deux fois dérivable sur cet intervalle, de dérivée f' , de dérivée seconde f'' , et de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère. **1.a Démontrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \ln(x)$.**

La fonction f est une somme de produits de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$, donc f est dérivable sur cet intervalle, et : $f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

1.b Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = e$.

On calcule $f(e) = e \ln(e) - e - 2 = e \times 1 - e - 2 = -2$ (car $\ln(e) = 1$), et $f'(e) = \ln(e) = 1$.

L'équation de la tangente en un point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, donc ici : $y = 1 \times (x - e) + (-2) = x - e - 2$.

Donc, la réponse est $T: y = x - e - 2$.

1.c Justifier que la fonction f est convexe sur $]0 ; +\infty[$.

D'après la question 1.a, $f'(x) = \ln(x)$, donc $f''(x) = \frac{1}{x}$.

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a $x > 0$, donc $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$: la fonction f est donc **convexe** sur cet intervalle.

1.d En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T .

Comme la fonction f est convexe sur $]0 ; +\infty[$, sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier au-dessus de la tangente T .

2.a Calculer la limite de f en 0.

On sait, par croissances comparées, que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$, et par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Par somme de limites : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 - 0 - 2 = -2$.

2.b Démontrer que la limite de f en $+\infty$ vaut $+\infty$.

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on peut factoriser : $f(x) = x [\ln(x) - 1] - 2$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x) - 1] = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc, par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x) - 1] = +\infty$.

Par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - 2 = +\infty$.

3. Dresser le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

D'après la question 1.a, $f'(x) = \ln(x)$. Or $\ln(x)$ est strictement négatif sur $]0 ; 1[$, nul en $x = 1$, et strictement positif sur $]1 ; +\infty[$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0 ; 1]$, puis strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$: elle admet un minimum en $x = 1$.

Ce minimum vaut $f(1) = 1 \times \ln(1) - 1 - 2 = 0 - 1 - 2 = -3$.

Le tableau de variations de f part donc de la limite -2 en 0 , décroît jusqu'au minimum -3 atteint en $x = 1$, puis croît vers $+\infty$.

4.a Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0 ; +\infty[$.

Sur $]0 ; 1]$, f est strictement décroissante et son maximum sur cet intervalle est $f(0^+) = -2$ (limite en 0) : donc $f(x) < 0$ pour tout x de $]0 ; 1]$, si bien que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

Sur $[1 ; +\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante, avec $f(1) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Comme 0 est compris entre -3 et $+\infty$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

Donc, la réponse est : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$, avec $\alpha \in [1 ; +\infty[$.

4.b Justifier que α appartient à l'intervalle $]4,3 ; 4,4[$.

On calcule $f(4,3) = 4,3 \ln(4,3) - 4,3 - 2 \approx -0,028 < 0$ et $f(4,4) = 4,4 \ln(4,4) - 4,4 - 2 \approx 0,119 > 0$.

Comme f est strictement croissante et continue sur $[1 ; +\infty[$, et que $f(4,3)$ et $f(4,4)$ sont de signes contraires, la valeur α qui annule f est encadrée par $4,3$ et $4,4$.

Donc, la réponse est $\alpha \in]4,3 ; 4,4[$.

4.c En déduire le signe de f sur $]0 ; +\infty[$.

D'après le tableau de variations de la question 3 et l'existence du seul zéro α de f (question 4.a), on peut conclure sur le signe de f .

Sur $]0 ; \alpha[$, $f(x) < 0$; en $x = \alpha$, $f(\alpha) = 0$; sur $] \alpha ; +\infty[$, $f(x) > 0$.

**5. On considère la fonction Python suivante, où l'on suppose le module `math` importé :
`def seuil(pas) : x=4.3 ; while x*log(x)-x-2 < 0 : x=x+pas ; return x`. Quelle valeur renvoie l'appel `seuil(0.01)`, et comment interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice ?**

- La fonction part de $x = 4,3$ et lui ajoute $0,01$ tant que $f(x)$ reste strictement négatif.
- Elle s'arrête dès que $f(x)$ devient positif ou nul, et renvoie alors cette valeur de x .

- En simulant ce programme pas à pas, on constate que $f(x)$ reste négatif jusqu'à $x = 4,31$ ($f(4,31) < 0$), puis devient positif dès $x = 4,32$ ($f(4,32) > 0$).
- L'appel `seuil(0.01)` renvoie donc la valeur 4,32.
- Comme f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et que $f(4,31) < 0 < f(4,32)$, ceci fournit l'encadrement $4,31 < \alpha < 4,32$, c'est-à-dire un encadrement de α à 0,01 près.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 1)

1.a. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 6x + 4 \ln(x)$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

Quand x tend vers 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -6x = 0$, tandis que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} 4 \ln(x) = -\infty$.

Par somme de limites, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

1.b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Pour $x > 0$, on factorise : $x^2 - 6x = x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{6}{x}\right) = 1$, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right) = +\infty$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \ln(x) = +\infty$, donc, par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2.a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et $f'(x) = 2x - 6 + \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$.

2.b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f .

Comme $x > 0$ sur l'intervalle d'étude, le signe de $f'(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ est celui du numérateur $2x^2 - 6x + 4$, c'est-à-dire celui de $x^2 - 3x + 2$ (même signe, car on divise par $2 > 0$).

Ce trinôme a pour racines évidentes 1 et 2 (leur somme vaut 3 et leur produit 2, ce qui correspond bien aux coefficients), donc $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Un trinôme du second degré de coefficient dominant positif est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur : $f'(x) < 0$ sur $]1; 2[$ et $f'(x) > 0$ sur $]0; 1[\cup]2; +\infty[$, avec $f'(1) = f'(2) = 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; 1]$, strictement décroissante sur $[1 ; 2]$, puis strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.

On calcule les valeurs aux bornes : $f(1) = 1 - 6 + 4 \ln(1) = 1 - 6 + 0 = -5$, et $f(2) = 4 - 12 + 4 \ln(2) = 4 \ln(2) - 8 \approx -5,23$.

Le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$ part donc de $-\infty$ (limite en 0), croît jusqu'à -5 en $x = 1$, décroît jusqu'à $4 \ln(2) - 8$ en $x = 2$, puis croît vers $+\infty$ (limite en $+\infty$).

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4 ; 5]$.

On calcule les images des bornes : $f(4) = 16 - 24 + 4 \ln(4) = -8 + 8 \ln(2) \approx -2,45$ et $f(5) = 25 - 30 + 4 \ln(5) = 4 \ln(5) - 5 \approx 1,44$.

Ainsi $f(4) < 0 < f(5)$. Or, d'après la question précédente, l'intervalle $[4 ; 5]$ est inclus dans $[2 ; +\infty[$, sur lequel f est continue (car dérivable) et strictement croissante.

Donc, d'après le théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[4 ; 5]$.

4.a. On admet que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}$. Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$ et préciser les coordonnées exactes des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Comme $x > 0$, le dénominateur x^2 est strictement positif, donc le signe de $f''(x)$ est celui du numérateur $2x^2 - 4$.

On résout $2x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$; seule la solution $x = \sqrt{2}$ appartient à $]0 ; +\infty[$.

Le trinôme $2x^2 - 4$ est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur, donc, restreint à $]0 ; +\infty[$: $f''(x) < 0$ sur $]0 ; \sqrt{2}[$ et $f''(x) > 0$ sur $]\sqrt{2} ; +\infty[$.

Donc f est concave sur $]0 ; \sqrt{2}]$ et convexe sur $[\sqrt{2} ; +\infty[$.

Comme f'' s'annule en $x = \sqrt{2}$ en changeant de signe, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion, d'abscisse $\sqrt{2}$.

Son ordonnée vaut $f(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \ln(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \times \frac{1}{2} \ln(2) = 2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln(2)$.

Donc, le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées exactes $(\sqrt{2} ; 2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln(2))$.

4.b. On note A le point de coordonnées $(\sqrt{2} ; f(\sqrt{2}))$. Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$ et M le point de coordonnées $(t ; f(t))$. En utilisant la question 4.a., indiquer, selon la valeur de t , les positions relatives du segment $[AM]$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Le segment $[AM]$ est une corde de la courbe $\mathcal{C}_f$ joignant le point d'inflexion A au point M .

Si $t \in]0 ; \sqrt{2}[$, les points A et M sont tous deux situés sur la partie de $\mathcal{C}_f$ où f est concave : une corde d'une courbe concave est toujours située en dessous de la courbe, donc le segment $[AM]$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$.

Si $t \in]\sqrt{2} ; +\infty[$, les points A et M sont tous deux situés sur la partie de $\mathcal{C}_f$ où f est convexe : une corde d'une courbe convexe est toujours située au-dessus de la courbe, donc le segment $[AM]$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

Bac Terminale 2021 — Amérique du Nord

On considère un cube $ABCDEFGH$. I est le milieu de $[EF]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[AE]$. On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, dans lequel $A(0 ; 0 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 1 ; 0)$, $D(0 ; 1 ; 0)$, $E(0 ; 0 ; 1)$, $F(1 ; 0 ; 1)$, $G(1 ; 1 ; 1)$, $H(0 ; 1 ; 1)$, $I(0,5 ; 0 ; 1)$, $J(1 ; 0,5 ; 0)$ et $K(0 ; 0 ; 0,5)$. 1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ?

$$\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont proportionnelles selon aucun facteur commun), donc, la réponse est que les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

$$\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On constate que $2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AE}$: ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ et les droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques $d_1 : x = 3 + t, y = 8 - 2t, z = -2 + 3t$ et $d_2 : x = 4 + t, y = 1 + t, z = 8 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$). Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

$$d_1 \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } d_2 \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc, la réponse est que **les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles**.

4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

$$\text{Le plan } \mathcal{P} \text{ admet pour vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ et } d_2 \text{ a pour vecteur directeur } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 1 \times 1 + 3 \times 1 + (-2) \times 2 = 1 + 3 - 4 = 0.$$

Le vecteur directeur de d_2 est donc orthogonal au vecteur normal de $\mathcal{P}$: la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

5. Montrer que le point $L(4; 0; 3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5; 3; 1)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

$$\overrightarrow{ML} \begin{pmatrix} 4 - 5 \\ 0 - 3 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ qui est l'opposé du vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{P} : \overrightarrow{ML} \text{ est donc lui aussi normal au plan } \mathcal{P}, \text{ ce qui montre que la droite (ML) est perpendiculaire à } \mathcal{P}.$$

D'autre part, les coordonnées de L vérifient l'équation de $\mathcal{P}$: $4 + 3 \times 0 - 2 \times 3 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, donc L appartient à $\mathcal{P}$.

Le point L appartient au plan $\mathcal{P}$ et la droite (ML) lui est perpendiculaire : donc, la réponse est que **L est bien le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$.**

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 1)

1. Une influenceuse compte $u_0 = 1\,000$ abonnés en 2020. Chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés puis en gagne 250 nouveaux. On note u_n le nombre d'abonnés en l'année $(2020 + n)$. Calculer u_1 .

Perdre 10 % revient à multiplier par 0,9. Donc $u_1 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = \mathbf{1\,150}$ abonnés.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

Multiplier par 0,9 traduit la perte de 10 % des abonnés d'une année sur l'autre.

On ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

3. Une fonction Python 'suite(n)' initialise 'u = 1000', puis répète 'n' fois 'u = 0.9*u + 250', avant de renvoyer 'u'. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la valeur renvoyée par l'appel 'suite(10)'.

La fonction calcule u_{10} , c'est-à-dire le nombre d'abonnés estimé en l'année 2030 ; la calculatrice donne $u_{10} \approx 1\,977$ abonnés.

4.a Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

Initialisation : $u_0 = 1\,000 \leq 2\,500$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq 2\,500$. Comme $0,9 > 0$, la multiplication conserve l'ordre : $0,9u_n \leq 0,9 \times 2\,500 = 2\,250$, puis en ajoutant 250 aux deux membres, $0,9u_n + 250 \leq 2\,500$, soit $u_{n+1} \leq 2\,500$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

4.b Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.

Or, d'après la question précédente, $u_n \leq 2\,500$, donc $0,1u_n \leq 250$, soit $-0,1u_n + 250 \geq 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est **croissante**.

4.c Dédire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 500 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

5.a On pose $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n . Montrer que (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1\,500$.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500 = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9(u_n - 2\,500) = 0,9v_n$.

La relation $v_{n+1} = 0,9v_n$, vraie pour tout entier naturel n , montre que (v_n) est géométrique de raison 0,9.

Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

5.b Exprimer v_n en fonction de n , puis montrer que $u_n = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

Comme (v_n) est géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $v_0 = -1\,500$, pour tout entier naturel n : $v_n = -1\,500 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 2\,500$, donc $u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

5.c Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Comme $0 < 0,9 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc par produit puis somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\,500$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que le nombre d'abonnés de l'influenceuse **se stabilise autour de 2 500** au fil des années.

6. Écrire un programme qui détermine en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200, puis donner cette année.

- $n = 0$
- $u = 1000$
- tant que $u \leq 2200$:
- $u = 0,9 * u + 250$
- $n = n + 1$
- renvoyer n
- En simulant l'évolution terme à terme, on obtient $u_{15} \approx 2\,191,2 \leq 2\,200$ et $u_{16} \approx 2\,222,0 > 2\,200$: le programme renvoie $n = 16$.
- Donc, la réponse est que le nombre d'abonnés dépasse 2 200 la seizième année suivant 2020, c'est-à-dire en **2036**.

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 2)**1. Une application génère un ticket sur une grille 3×3 où trois cases contiennent chacune un cœur, disposées au hasard. Justifier qu'il existe exactement 84 façons différentes de placer ces trois cœurs sur la grille.**

Placer trois cœurs sur la grille revient à choisir 3 cases parmi les 9 de la grille, sans tenir compte de l'ordre : le nombre de façons est donc $\binom{9}{3}$.

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \frac{504}{6} = 84.$$

Il y a bien 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur la grille.

2. Un ticket est gagnant si les trois cœurs sont alignés côte à côte sur une même ligne, une même colonne ou une même diagonale. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant vaut $\frac{2}{21}$.

La grille compte 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales, soit 8 alignements possibles de trois cases : il y a donc 8 grilles gagnantes parmi les 84 grilles possibles (équiprobables).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est $\frac{8}{84} = \frac{2}{21}$ (en simplifiant par 4).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est donc bien égale à $\frac{2}{21}$.

3. À chaque ticket généré, le joueur verse 1 € ; si le ticket est gagnant, la société lui reverse 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Soit X le gain algébrique du joueur pour un ticket. Un ticket gagnant rapporte $5 - 1 = 4$ € (le joueur récupère les 5 € mais a déjà versé 1 €), un ticket perdant coûte 1 €.

$$P(X = 4) = \frac{2}{21} \text{ et } P(X = -1) = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}.$$

$$E(X) = 4 \times \frac{2}{21} + (-1) \times \frac{19}{21} = \frac{8 - 19}{21} = -\frac{11}{21} \approx -0,524.$$

L'espérance de gain est négative : en moyenne, le joueur perd environ 0,52 € par ticket généré. Le jeu est donc défavorable au joueur.

4.a Un joueur génère 20 tickets de façon indépendante. Soit X le nombre de tickets gagnants parmi ces 20 tickets. Donner la loi de probabilité de X .

Chaque génération de ticket est une épreuve à deux issues (gagnant / perdant) de probabilité de succès $p = \frac{2}{21}$, répétée $n = 20$ fois de façon indépendante.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{21}$.

4.b Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 5)$, arrondie à 10^{-3} .

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{2}{21}\right)^5 \times \left(\frac{19}{21}\right)^{15} \approx \mathbf{0,027} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

4.c Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$, arrondie à 10^{-3} , puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$$(X \geq 1) \text{ est l'évènement contraire de } (X = 0), \text{ donc } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^{20} \approx 1 - 0,135 \approx \mathbf{0,865} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

Sur 20 tickets générés, le joueur a donc environ 86,5 % de chances d'obtenir au moins un ticket gagnant.

Bac Terminale 2021 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A (avec $a = \frac{2}{3}$) — 1. ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE, J est le point du segment [CG] tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$. Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de F, I et J.

Le cube a pour arête 1 dans ce repère, donc F, sommet opposé à D sur la face supérieure du carré ABFE, a pour coordonnées F(1 ; 0 ; 1).

I est le centre de la face ADHE, donc le milieu de [AH] (et aussi de [DE]) : $I\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Comme $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ avec C(1 ; 1 ; 0) et G(1 ; 1 ; 1), on a $J\left(1 ; 1 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 2. On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ). Déterminer une représentation paramétrique de (d).

$$\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ (obtenu par } J - F\text{)}.$$

(d) passe par $I\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et admet $\overrightarrow{FJ}$ pour vecteur directeur, donc une représentation paramétrique de (d) est : $x = 0, y = \frac{1}{2} + t, z = \frac{1}{2} - \frac{t}{3}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Partie A — 3.a K est le point d'intersection de (d) et de (AE). Montrer que K a pour coordonnées $\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.

La droite (AE) est l'axe des cotes (points d'ordonnée nulle). On cherche donc le point de (d) tel que $y = 0 : \frac{1}{2} + t = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$.

La cote correspondante vaut $z = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

On obtient bien $K\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 3.b Déterminer les coordonnées du point L, intersection de (d) et de (DH).

Tous les points de (DH) ont pour ordonnée 1. On cherche donc le point de (d) tel que $y = 1 : \frac{1}{2} + t = 1 \iff t = \frac{1}{2}$.

La cote correspondante vaut $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Donc, la réponse est $L\left(0 ; 1 ; \frac{1}{3}\right)$.

Partie A — 4.a Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.

Le milieu de [FL] a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{1+\frac{1}{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$.

Le milieu de [JK] a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2}; \frac{1+0}{2}; \frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$.

Les diagonales [FL] et [JK] ont le même milieu : **FJLK est donc un parallélogramme.**

Partie A — 4.b Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.

$$\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) + \left(-\frac{2}{3}\right) \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0.$$

Les diagonales du parallélogramme FJLK sont donc perpendiculaires : **FJLK est un losange.**

Partie A — 4.c Le quadrilatère FJLK est-il un carré ?

$$\overrightarrow{KF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{KF} \cdot \overrightarrow{FJ} = 0 + 0 - \frac{1}{9} = -\frac{1}{9} \neq 0.$$

Les côtés consécutifs [KF] et [FJ] ne sont donc pas perpendiculaires : le losange FJLK n'est pas un rectangle, donc, la réponse est **non, FJLK n'est pas un carré.**

Partie B (cas général) — 1. On admet désormais que $K\left(0; 0; 1 - \frac{a}{2}\right)$ et $L\left(0; 1; \frac{a}{2}\right)$, avec $a \in [0; 1]$. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a.

$$G \text{ a pour coordonnées } (1; 1; 1), \text{ donc } \overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Comme $C(1; 1; 0)$, on en déduit $J(1; 1; a)$.

Partie B — 2. Montrer que FJLK est un parallélogramme, quelle que soit la valeur de a.

$$\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ (en calculant } \frac{a}{2} - \left(1 - \frac{a}{2}\right) = a - 1).$$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{KL}$: **FJLK est donc un parallélogramme pour toute valeur de a.**

Partie B — 3. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles FJLK est un losange ?

$$\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{a}{2} - 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 - \frac{3a}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = 1 - 1 + \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right).$$

Ce produit s'annule si et seulement si $\frac{a}{2} = 1$ (soit $a = 2$) ou $1 - \frac{3a}{2} = 0$ (soit $a = \frac{2}{3}$).

Seule la valeur $a = \frac{2}{3}$ appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$: dans ce cas, les diagonales du parallélogramme FJLK sont perpendiculaires, donc, la réponse est **oui, uniquement pour $a = \frac{2}{3}$, FJLK est un losange.**

Partie B — 4. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles FJLK est un carré ?

D'après la question précédente, la seule valeur de a rendant FJLK losange est $a = \frac{2}{3}$, cas déjà étudié en partie A où l'on a montré que ce losange n'était pas un carré : donc, la réponse est **non, il n'existe aucune valeur de a pour laquelle FJLK est un carré.**

Bac Terminale 2021 — Polynésie française

Un test de dépistage est développé pour une maladie touchant 7 % de la population d'un pays. Parmi les personnes infectées, 20 % obtiennent un résultat négatif au test ; parmi les personnes saines, 1 % obtiennent un résultat positif. On choisit une personne au hasard et on note M l'évènement « la personne est infectée » et T l'évènement « le test est positif ». 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

On a $P(M) = 0,07$ et donc $P(\overline{M}) = 1 - 0,07 = 0,93$.

Puisque 20 % des personnes infectées ont un résultat négatif : $P_M(\overline{T}) = 0,2$, donc $P_M(T) = 1 - 0,2 = 0,8$.

Puisque 1 % des personnes saines ont un résultat positif : $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$, donc $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 1 - 0,01 = 0,99$.

L'arbre pondéré a donc pour première branche $P(M) = 0,07$ et $P(\overline{M}) = 0,93$, puis les branches secondaires $P_M(T) = 0,8$, $P_M(\overline{T}) = 0,2$, $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,99$.

2.a Quelle est la probabilité que la personne choisie soit infectée et ait un test positif ?

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = \mathbf{0,056}.$$

2.b Montrer que la probabilité que le test soit positif vaut 0,0653.

On calcule d'abord $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093$.

Les événements M et $\overline{M}$ formant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,056 + 0,0093 = 0,0653$.

3. Sachant que le test de la personne choisie est positif, quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-2} près.

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,056}{0,0653} \approx 0,8576, \text{ soit environ } \mathbf{0,86} \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

4.a On interroge dix personnes au hasard dans la population, ce que l'on assimile à un tirage avec remise du fait de la taille de la population. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes ayant un test positif parmi les dix. Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.

Le tirage avec remise revient à répéter dix fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues (test positif ou non) de probabilité de succès $P(T) = 0,0653$: X suit donc la **loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,0653$** .

4.b Déterminer la probabilité que, parmi les dix personnes interrogées, exactement deux aient un test positif (résultat arrondi à 10^{-2} près).

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^{10-2} = 45 \times 0,0653^2 \times 0,9347^8.$$

À la calculatrice, $P(X = 2) \approx 0,1118$, soit environ **0,11** à 10^{-2} près.

5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif dépasse 99 %.

Pour n personnes testées, en notant X_n le nombre de tests positifs, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,0653$, donc $P(X_n = 0) = (1 - 0,0653)^n = 0,9347^n$, d'où $P(X_n \geq 1) = 1 - 0,9347^n$.

On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0,9347^n > 0,99 \iff 0,9347^n < 0,01$.

En passant au logarithme népérien (la fonction $\ln$ est strictement croissante, et $\ln 0,9347 < 0$, donc l'inégalité change de sens) : $n \ln 0,9347 < \ln 0,01 \iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,9347}$.

$$\text{Or } \frac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} \approx 68,19.$$

Donc, la réponse est qu'il faut tester au minimum **69 personnes**.

Bac Terminale 2021 — Polynésie française

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1, muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, et le point M défini par $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$. 1. Donner, par lecture graphique, les coordonnées des points B, D, E, G et H.

Dans ce repère : B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1).

2.a Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

Les segments [EG], [GD] et [ED] sont chacun la diagonale d'une face carrée de côté 1 du cube, donc $EG = GD = ED = \sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1) : le triangle EGD est équilatéral, de côté $\sqrt{2}$.

2.b On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Avec $c = \sqrt{2}$, l'aire du triangle EGD vaut $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

$$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de H moins celles de B), donc } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Comme } \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}, \text{ on obtient } x_M = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, y_M = \frac{1}{3} \text{ et } z_M = \frac{1}{3}.$$

Donc, la réponse est que M a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

4.a Justifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EGD).

$$\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de G moins celles de E), donc } \vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = -1 + 1 + 0 = 0.$$

$$\overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de D moins celles de E), donc } \vec{n} \cdot \overrightarrow{ED} = 0 + 1 - 1 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD) : **c'est donc un vecteur normal à ce plan.**

4.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est $-x + y + z - 1 = 0$.

Un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $-x + y + z + d = 0$, avec d réel à déterminer.

Le point $E(0; 0; 1)$ appartient au plan (EGD), donc ses coordonnées vérifient cette équation : $-0 + 0 + 1 + d = 0 \iff d = -1$.

Donc, la réponse est que le plan (EGD) a pour équation $-x + y + z - 1 = 0$.

4.c Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) passant par M. Montrer qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan (EGD), elle est donc dirigée par le vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de ce plan ; elle passe de plus par $M(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$.

Un point $P(x; y; z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MP} = t\vec{n}$ pour un certain réel t , c'est-à-dire $x - \frac{2}{3} = -t$, $y - \frac{1}{3} = t$ et $z - \frac{1}{3} = t$.

Donc, la réponse est que $\mathcal{D}$ admet pour représentation paramétrique $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

5.a Soit K le pied de la hauteur issue de M dans la pyramide GEDM. Démontrer que les coordonnées de K sont $(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3})$.

La droite $\mathcal{D}$ passe par M et est perpendiculaire au plan (EGD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue de M, et son pied K est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan (EGD).

Les coordonnées de K vérifient donc à la fois la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ et l'équation du plan (EGD) : en substituant $x = \frac{2}{3} - t$, $y = \frac{1}{3} + t$, $z = \frac{1}{3} + t$ dans $-x + y + z - 1 = 0$, on obtient $-(\frac{2}{3} - t) + \frac{1}{3} + t + \frac{1}{3} + t - 1 = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \frac{1}{3}$.

En remplaçant t par $\frac{1}{3}$: $x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Donc, la réponse est que K a pour coordonnées $(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3})$.

5.b En déduire le volume de la pyramide GEDM. On rappelle que le volume d'une pyramide est $V = \frac{b \times h}{3}$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée.

$$\overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ (coordonnées de M moins celles de K), donc } KM^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}, \text{ d'où } KM = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

K est le pied de la hauteur issue de M pour la base EGD, donc $h = KM = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $b = \mathcal{A}(\text{EGD}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (question 2.b).

Le volume de la pyramide GEDM vaut donc $V = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{\frac{3}{6}}{3} = \frac{1}{6}$.

Donc, la réponse est que la pyramide GEDM a un volume égal à $\frac{1}{6}$.