

Probabilités — Tous les corrigés

LOGIMATHS

Brevet 2026 — Amérique du Nord

A.1 Combien d'images appartiennent à la catégorie « Autres » ?

$28\,000 + 12\,000 + 8\,000 = 48\,000$ images sont déjà réparties.

$50\,000 - 48\,000 = \mathbf{2\,000}$ images dans la catégorie « Autres ».

A.2 L'IA reconnaît correctement 90 % des « Objets du quotidien ». Calculer le nombre d'images reconnues correctement.

$$28\,000 \times \frac{90}{100} = 28\,000 \times 0,9 = \mathbf{25\,200} \text{ images.}$$

A.3 L'IA reconnaît correctement 5 600 images de la catégorie « Véhicules ». Quel pourcentage de réussite cela représente-t-il ?

$$\frac{5\,600}{8\,000} = 0,7$$

Cela représente **70 %** de réussite.

A.4 Quelle est la probabilité que l'image tirée soit l'image d'un « Objet du quotidien » ?

$$P = \frac{28\,000}{50\,000} = \frac{28}{50} = \mathbf{0,56}.$$

B.5 Convertir la consommation de l'IA et d'un collège en Wh (écriture scientifique).

$$\text{IA : } 82\,000 \text{ GWh} = 82\,000 \times 10^9 \text{ Wh} = 8,2 \times 10^{13} \text{ Wh.}$$

$$\text{Collège : } 200\,000 \text{ kWh} = 200\,000 \times 10^3 \text{ Wh} = 2 \times 10^8 \text{ Wh.}$$

B.6 Combien de collèges pourrait-on alimenter pendant un an avec la consommation électrique de l'IA ?

$$\frac{8,2 \times 10^{13}}{2 \times 10^8} = 4,1 \times 10^5$$

On pourrait alimenter **410 000** collèges pendant un an.

B.7 Pendant combien d'années environ pourrait-on alimenter les 7 100 collèges français ?

$$\frac{410\,000}{7\,100} \approx 57,7$$

Cela représente 57 années complètes, la 58e année ne pouvant pas être alimentée en intégralité : on pourrait alimenter tous les collèges français pendant **environ 57 ans**.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 1)

A.1.a Donner $P(C)$.

L'énoncé indique directement que 75 % des familles réservent une cabine : $P(C) = 0,75$.

A.1.b Reproduire l'arbre et compléter les quatre pointillés.

- Sur la première branche : $P(V) = 0,3$
- Sur la deuxième branche : $P(\overline{V}) = 0,7$
- Sur les branches issues de V : $P_V(C) = 0,8$ et $P_V(\overline{C}) = 0,2$

A.2 Calculer la probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine.

$$P(V \cap C) = P(V) \times P_V(C) = 0,3 \times 0,8 = 0,24.$$

A.3 Une famille a réservé une cabine. Déterminer la probabilité qu'elle réserve un emplacement pour un véhicule.

$$\text{On cherche } P_C(V) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)}.$$

$$P_C(V) = \frac{0,24}{0,75} = 0,32.$$

A.4 Déterminer la probabilité qu'une famille n'ayant pas réservé de véhicule réserve tout de même une cabine, arrondie à 10^{-2} . Interpréter le résultat.

D'après la formule des probabilités totales, $P(C) = P(V) \times P_V(C) + P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(C)$.

$$0,75 = 0,24 + 0,7 \times P_{\overline{V}}(C)$$

$$P_{\overline{V}}(C) = \frac{0,75 - 0,24}{0,7} = \frac{0,51}{0,7} \approx 0,73.$$

Interprétation : parmi les familles qui ne réservent pas d'emplacement pour un véhicule, environ 73 % réservent tout de même une cabine.

B.1 Justifier que $E(X) = 96$ et que $V(X) = 3114$.

$$E(X) = 0 \times 0,19 + 70 \times 0,06 + 100 \times 0,51 + 170 \times 0,24 = 4,2 + 51 + 40,8 = 96.$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,19 + 70^2 \times 0,06 + 100^2 \times 0,51 + 170^2 \times 0,24 = 294 + 5\,100 + 6\,936 = 12\,330.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 12\,330 - 96^2 = 12\,330 - 9\,216 = 3\,114.$$

B.2.a Justifier que $Z = 0,6(X + Y)$.

Une remise de 40 % revient à ne payer que 60 % du montant total des suppléments et des extras, soit $X + Y$: donc $Z = 0,6(X + Y)$.

B.2.b En déduire que $E(Z) = 120$ et que $V(Z) = 1728$.

$$E(Z) = 0,6 \times (E(X) + E(Y)) = 0,6 \times (96 + 104) = 0,6 \times 200 = \mathbf{120}.$$

$$X \text{ et } Y \text{ étant indépendantes, } V(Z) = 0,6^2 \times (V(X) + V(Y)) = 0,36 \times (3\,114 + 1\,686) = 0,36 \times 4\,800 = \mathbf{1\,728}.$$

B.3.a Montrer que $E(M_n) = 120$ et que $V(M_n) = 1728/n$.

$$\text{Les variables } Z_1, \dots, Z_n \text{ suivent toutes la même loi que } Z, \text{ donc } E(M_n) = \frac{n \times E(Z)}{n} = E(Z) = \mathbf{120}.$$

$$\text{Les variables étant indépendantes, } V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times n \times V(Z) = \frac{V(Z)}{n} = \frac{1\,728}{n}.$$

B.3.b Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(114 < M_n < 126) \geq 0,85$. Interpréter.

L'évènement $114 < M_n < 126$ équivaut à $|M_n - 120| < 6$, dont le contraire est $|M_n - 120| \geq 6$.

$$\text{D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, } P(|M_n - 120| \geq 6) \leq \frac{V(M_n)}{6^2} = \frac{1\,728}{36n} = \frac{48}{n}.$$

On veut $P(114 < M_n < 126) \geq 0,85$, soit $P(|M_n - 120| \geq 6) \leq 0,15$: il suffit donc que $\frac{48}{n} \leq 0,15$.

$$n \geq \frac{48}{0,15} = 320.$$

Le plus petit entier qui convient est $\mathbf{n = 320}$: un échantillon d'au moins 320 familles garantit, via cette inégalité, que le prix moyen payé a au moins 85 % de chances d'être compris entre 114 € et 126 €.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 1)

1.a Affirmation 1 : Le plan (P) est orthogonal à la droite (AB), et passe par le milieu de [AB].

$$\text{Un vecteur normal au plan (P) : } -x + y - 5z - 0,5 = 0 \text{ est } \vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Le vecteur } \overrightarrow{AB} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 2-3 \\ 1-0 \\ -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux, donc colinéaires : la droite (AB) est donc orthogonale au plan (P).

$$\text{Le milieu de [AB] a pour coordonnées } \left(\frac{3+2}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{2-3}{2} \right) = (2,5; 0,5; -0,5).$$

On vérifie : $-2,5 + 0,5 - 5 \times (-0,5) - 0,5 = -2,5 + 0,5 + 2,5 - 0,5 = 0$: le milieu appartient bien à (P).

L'affirmation 1 est VRAIE.

1.b Affirmation 2 : Les droites (d) et (AB) sont sécantes.

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, non colinéaire à $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$: les droites ne sont pas parallèles.

Cherchons un éventuel point d'intersection en résolvant $t = 3 - s$ et $-1,5 - t = s$ (paramètres de (d) et (AB)).

En substituant : $-1,5 - (3 - s) = s$, soit $-4,5 + s = s$, soit $-4,5 = 0$, ce qui est impossible.

Le système n'a donc pas de solution : les droites (d) et (AB) ne sont pas sécantes (elles sont non coplanaires).

L'affirmation 2 est FAUSSE.

1.c Affirmation 3 : La mesure de l'angle ACB, arrondie à 10^{-1} , est égale à $70,5^\circ$ (C(1,5 ; -3 ; -1)).

$$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 3 - 1,5 \\ 0 - (-3) \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 2 - 1,5 \\ 1 - (-3) \\ -3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 1,5 \times 0,5 + 3 \times 4 + 3 \times (-2) = 0,75 + 12 - 6 = 6,75.$$

$$CA = \sqrt{1,5^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{20,25} = 4,5 \text{ et } CB = \sqrt{0,5^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20,25} = 4,5.$$

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{CA \times CB} = \frac{6,75}{4,5 \times 4,5} = \frac{6,75}{20,25} = \frac{1}{3}.$$

$$\widehat{ACB} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,5^\circ.$$

L'affirmation 3 est VRAIE.

2. Affirmation 4 : Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

Le digicode de la porte A utilise 3 symboles distincts parmi 8, saisis dans un ordre précis : il y a $8 \times 7 \times 6 = 336$ codes possibles.

Le digicode de la porte B utilise 4 symboles distincts parmi 8, saisis dans n'importe quel ordre : il y a $\binom{8}{4} = 70$ codes possibles.

Clotilde choisit un code au hasard pour la porte A : $P(\text{ouvrir}) = \frac{1}{336} \approx 0,0030$.

Titouan choisit un code au hasard pour la porte B : $P(\text{ouvrir}) = \frac{1}{70} \approx 0,0143$.

Comme $\frac{1}{70} > \frac{1}{336}$, Titouan a bien plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

L'affirmation 4 est VRAIE.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)

1. Affirmation 1 : Si la personne choisie est une femme, la probabilité qu'elle joue de la Pop est de 0,832 ($P(\text{Pop})=0,52$; parmi les joueurs de Pop, 32 % de femmes ; 20 % de femmes au total).

On note O l'évènement « la personne joue de la Pop » et F l'évènement « la personne est une femme ». On a $P(O) = 0,52$, $P_O(F) = 0,32$, $P(F) = 0,2$, et on cherche $P_F(O)$.

$$P_F(O) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)} = \frac{P(O) \times P_O(F)}{P(F)} = \frac{0,52 \times 0,32}{0,2} = \frac{0,1664}{0,2} = 0,832.$$

L'affirmation 1 est VRAIE.

2. Affirmation 2 : En arrondissant au dixième, $P(X \leq 340) \approx 0,4$ (X = nombre de musiciens professionnels dans un échantillon de 5 000 personnes, taux 6,2 %).

Le choix d'un échantillon de $n = 5\,000$ personnes, assimilable à un tirage avec remise, avec une probabilité de succès $p = 0,062$ à chaque tirage, fait suivre à X la loi binomiale $\mathcal{B}(5\,000; 0,062)$.

À la calculatrice, on obtient $P(X \leq 340) \approx 0,96$, et non 0,4.

L'affirmation 2 est FAUSSE.

3. Affirmation 3 : D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il y a plus de 95 % de chances que X soit strictement compris entre 230 et 390.

Pour la loi binomiale $\mathcal{B}(5\,000; 0,062)$: $E(X) = np = 5\,000 \times 0,062 = 310$ et $V(X) = np(1-p) = 5\,000 \times 0,062 \times 0,938 = 290,78$.

L'évènement $230 < X < 390$ équivaut à $|X - 310| < 80$, c'est-à-dire au contraire de $|X - 310| \geq 80$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - 310| \geq 80) \leq \frac{V(X)}{80^2} = \frac{290,78}{6\,400} \approx 0,045$.

Donc $P(230 < X < 390) \geq 1 - 0,045 = 0,955$, soit plus de 95 %.

L'affirmation 3 est VRAIE.

4. Affirmation 4 : On peut former 120 équipes différentes (2 musiciens professionnels parmi 4, et 3 non-professionnels parmi 6).

Le nombre de façons de choisir 2 musiciens professionnels parmi 4 (sans ordre) est $\binom{4}{2} = 6$.

Le nombre de façons de choisir 3 non-professionnels parmi 6 (sans ordre) est $\binom{6}{3} = 20$.

Chaque choix de 2 professionnels peut être associé à chaque choix de 3 non-professionnels : $6 \times 20 = 120$ équipes différentes.

L'affirmation 4 est VRAIE.

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)

A.1 Recopier et compléter l'arbre pondéré.

$$P(A_1) = 0,96 \text{ et } P(\overline{A_1}) = 1 - 0,96 = \mathbf{0,04}.$$

$$\text{D'après l'énoncé : } P_{A_1}(A_2) = \mathbf{0,94}, P_{A_1}(\overline{A_2}) = \mathbf{0,06}, P_{\overline{A_1}}(A_2) = \mathbf{0,35}, P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) = \mathbf{0,65}.$$

A.2 Montrer que $P(A_2) = 0,9164$.

A_1 et $\overline{A_1}$ formant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2)$$

$$P(A_2) = 0,96 \times 0,94 + 0,04 \times 0,35 = \mathbf{0,9164}.$$

A.3 Calculer $P_{A_2}(\overline{A_1})$ et interpréter.

$$P_{A_2}(\overline{A_1}) = \frac{P(\overline{A_1} \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0,04 \times 0,35}{0,9164} \approx \mathbf{0,0153} \text{ (arrondi à } 10^{-4}\text{)}.$$

Sachant que le message reçu par le deuxième relai est sans erreur, il y a environ 1,53 % de chances que le message reçu par le premier relai comportait des erreurs.

B.1.a Déterminer la probabilité que 4 tests soient positifs.

$$P(X = 4) = \binom{50}{4} \times 0,04^4 \times 0,96^{46} \approx \mathbf{0,09} \text{ (arrondi au centième)}.$$

B.1.b Donner la probabilité qu'au moins un test soit positif.

$$\text{À la calculatrice, } P(X \geq 1) \approx \mathbf{0,87} \text{ (arrondi au centième)}.$$

B.1.c Calculer l'espérance et la variance de X.

$$X \text{ suit la loi binomiale } (50; 0,04), \text{ donc } E(X) = 50 \times 0,04 = \mathbf{2} \text{ et } V(X) = 50 \times 0,04 \times 0,96 = \mathbf{1,92}.$$

B.2.a Vérifier que $E(M) = 2$ et montrer que $V(M) = 0,0768$.

M est la moyenne de 25 variables indépendantes de même loi que X : $E(M) = E(X) = 2$.

$$V(M) = \frac{V(X)}{25} = \frac{1,92}{25} = 0,0768.$$

B.2.b À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $P(M < 7) > 0,99$.

$$P(M < 7) = P(-3 < M < 7) = P(-5 < M - 2 < 5) = 1 - P(|M - 2| \geq 5).$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour $t = 5$: $P(|M - 2| \geq 5) \leq \frac{V(M)}{5^2} = \frac{0,0768}{25} = 0,003072$.

Donc $P(M < 7) \geq 1 - 0,003072 = 0,996928$, qui est bien **supérieur à 0,99**.

C.1 Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} \leq p_n$.

Initialisation : $p_2 = 0,59 \times p_1 + 0,35 = 0,59 \times 0,96 + 0,35 = 0,9164 \leq 0,96 = p_1$: vraie au rang 1.

Hérédité : supposons $p_{n+1} \leq p_n$ pour un n donné. Comme $0,59 > 0$: $0,59p_{n+1} \leq 0,59p_n$, donc $0,59p_{n+1} + 0,35 \leq 0,59p_n + 0,35$, soit $p_{n+2} \leq p_{n+1}$: vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_{n+1} \leq p_n$.

C.2 Montrer que la suite (p_n) est convergente.

La suite (p_n) est décroissante (question C.1) et minorée par 0 (une probabilité est toujours positive) : elle est donc convergente.

C.3 Déterminer la valeur exacte de sa limite.

Notons $f(x) = 0,59x + 0,35$, fonction continue telle que $p_{n+1} = f(p_n)$. D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

$$0,59\ell + 0,35 = \ell \Leftrightarrow 0,35 = 0,41\ell \Leftrightarrow \ell = \frac{35}{41}.$$

La suite (p_n) converge donc vers $\frac{35}{41}$.

Bac Première 2026 — Métropole (SPE)
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré.

$$P(T) = 0,6, P(\overline{T}) = 0,4; P_T(A) = 0,25, P_T(\overline{A}) = 0,75.$$

2. Donner, par simple lecture de l'énoncé, la probabilité de l'évènement A.

20 % des clients ont pris l'assurance : $P(A) = 0,2$.

3. Montrer que la probabilité que le client ait loué une bicyclette traditionnelle et pris une assurance est 0,15.

$$P(T \cap A) = P(T) \times P_T(A) = 0,6 \times 0,25 = \mathbf{0,15}.$$

4. En déduire que $P(\overline{T} \cap A) = 0,05$.

D'après la formule des probabilités totales, $P(A) = P(T \cap A) + P(\overline{T} \cap A)$, donc $P(\overline{T} \cap A) = 0,2 - 0,15 = \mathbf{0,05}$.

5. Déterminer la probabilité que le client ait pris une assurance sachant qu'il a loué une bicyclette électrique.

$$P_{\overline{T}}(A) = \frac{P(\overline{T} \cap A)}{P(\overline{T})} = \frac{0,05}{0,4} = \frac{1}{8}.$$

Bac Première 2026 — Métropole (TECHNO)

Affirmation 1 : 50 % des élèves du collège possèdent une adresse mail et un équipement individuel. Vrai ou faux ?

50 élèves sur 400 possèdent les deux : $\frac{50}{400} = 12,5\% \neq 50\%$.

L'affirmation 1 est FAUSSE.

Affirmation 2 : au moins 50 % des élèves ne possèdent pas d'adresse mail. Vrai ou faux ?

310 élèves sur 400 n'ont pas d'adresse mail. Or $310 > 200$ (la moitié de 400).

L'affirmation 2 est VRAIE.

Affirmation 3 : la probabilité qu'un élève choisi au hasard n'ait ni adresse mail ni équipement individuel est 25 %. Vrai ou faux ?

100 élèves sur 400 ne possèdent ni l'un ni l'autre : $\frac{100}{400} = 25\%$.

L'affirmation 3 est VRAIE.

Affirmation 4 : au moins $\frac{1}{5}$ des élèves ayant un équipement individuel possèdent aussi une adresse mail. Vrai ou faux ?

Parmi les 260 élèves ayant un équipement individuel, 50 ont une adresse mail : $\frac{50}{260} = \frac{5}{26}$.

Comme $\frac{5}{26} < \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, cette proportion est inférieure à $\frac{1}{5}$. **L'affirmation 4 est FAUSSE.**

Bac Première 2026 — Antilles et Guyane (SPECIFIQUE)

1. Déterminer $P_A(S)$ et $P_{\bar{A}}(S)$.

Parmi les élèves inscrits à une activité artistique, 20 % font aussi du sport : $P_A(S) = 0,2$. Parmi ceux n'ayant pas d'activité artistique, 40 % font du sport : $P_{\bar{A}}(S) = 0,4$.

2. Recopier et compléter l'arbre de probabilité.

$$P(A) = 0,4, P(\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6; P_A(\bar{S}) = 1 - 0,2 = 0,8; P_{\bar{A}}(\bar{S}) = 1 - 0,4 = 0,6.$$

3. Calculer $P(A \cap S)$ et $P(\bar{A} \cap S)$.

$P(A \cap S) = P(A) \times P_A(S) = 0,4 \times 0,2 = \mathbf{0,08}$ (probabilité qu'un élève ait une activité artistique ET fasse du sport).

$P(\bar{A} \cap S) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(S) = 0,6 \times 0,4 = \mathbf{0,24}$ (probabilité qu'un élève n'ait pas d'activité artistique mais fasse du sport).

4. Calculer $P_S(A)$ et interpréter le résultat (on donne $P(S) = 0,32$).

$$P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0,08}{0,32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Parmi les élèves ayant une activité sportive, un quart a également une activité artistique.

5. Les événements **A** et **S** sont-ils indépendants ?

$$P(A) \times P(S) = 0,4 \times 0,32 = 0,128, \text{ alors que } P(A \cap S) = 0,08.$$

Comme $P(A \cap S) \neq P(A) \times P(S)$, les événements **A** et **S** ne sont pas indépendants (on peut aussi le voir en comparant $P_A(S) = 0,2 \neq 0,4 = P_{\bar{A}}(S)$).

Bac Première 2026 — Amérique du Nord (SPECIFIQUE)

1. Déterminer la probabilité $P(F)$.

$$P(F) = \frac{100}{200} = \mathbf{0,5}.$$

2. Déterminer la probabilité que l'adhérent soit un homme qui pratique le step.

$$P(H \cap S) = \frac{20}{200} = \mathbf{0,1}.$$

3. Déterminer la probabilité de l'évènement $F \cap S$.

$$P(F \cap S) = \frac{60}{200} = \mathbf{0,3}.$$

4. Les évènements **F** et **S** sont-ils indépendants ? Justifier.

$$P(F) = 0,5 \text{ et } P_S(F) = \frac{60}{80} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Comme $P_S(F) \neq P(F)$, les évènements **F** et **S** ne sont pas indépendants.

5. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard pratique le crossfit ?

$$P_F(C) = \frac{40}{100} = 0,4.$$

6. Déterminer la probabilité $P_C(F)$.

$$P_C(F) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}.$$

Bac Première 2026 — Amérique du Nord (SPE)

A.1 Recopier et compléter l'arbre pondéré (urne à 1 boule rouge, 9 vertes, tirage avec remise).

$$P(R_1) = \frac{1}{10}, P(\overline{R}_1) = \frac{9}{10}; P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{10}, P_{R_1}(\overline{R}_2) = \frac{9}{10}; P_{\overline{R}_1}(R_2) = \frac{1}{10}, P_{\overline{R}_1}(\overline{R}_2) = \frac{9}{10} \text{ (tirage avec remise : les probabilités sont les mêmes au 2^e tirage).}$$

A.2.a Donner les valeurs prises par la variable aléatoire **X**.

Le joueur paie 1 € puis reçoit 3 € (deux rouges), 1 € (deux vertes) ou 0 € (sinon) : le gain algébrique prend donc les valeurs $X = 2$ (3-1), $X = 0$ (1-1) et $X = -1$ (0-1).

A.2.b Montrer que $P(X = -1) = \frac{18}{100}$.

$\{X = -1\}$ correspond à une boule rouge et une boule verte (dans un ordre ou l'autre) : $\{X = -1\} = (R_1 \cap \overline{R}_2) \cup (\overline{R}_1 \cap R_2)$, réunion d'évènements disjoints.

$$P(X = -1) = P(R_1 \cap \overline{R}_2) + P(\overline{R}_1 \cap R_2) = \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{100} + \frac{9}{100} = \frac{18}{100}.$$

A.2.c Recopier et compléter le tableau de la loi de probabilité de **X**.

$$P(X = 2) = P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \text{ et } P(X = 0) = P(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2) = \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{81}{100}.$$

$$x_k : -1; 0; 2 \quad P(X = x_k) : \frac{18}{100}; \frac{81}{100}; \frac{1}{100} \text{ (vérification : } \frac{18}{100} + \frac{81}{100} + \frac{1}{100} = 1).$$

A.2.d Calculer l'espérance de **X** et interpréter le résultat.

$$E(X) = (-1) \times \frac{18}{100} + 0 \times \frac{81}{100} + 2 \times \frac{1}{100} = \frac{-18 + 0 + 2}{100} = \frac{-16}{100} = -0,16.$$

Sur un grand nombre de parties, le joueur perd en moyenne 0,16 € (16 centimes) par partie : **le jeu est défavorable au joueur.**

B.1 Démontrer que $E(Y) = (4n^2 - 20n)/100$ (urne à n boules rouges, $10 - n$ vertes).

Comme en partie A, Y prend les valeurs $-1, 0, 2$: $P(Y = 2) = \left(\frac{n}{10}\right)^2 = \frac{n^2}{100}$.

$P(Y = -1) = 2 \times \frac{n}{10} \times \frac{10 - n}{10} = \frac{2n(10 - n)}{100}$ (on ne calcule pas $P(Y = 0)$, sans effet sur l'espérance).

$$E(Y) = 2 \times \frac{n^2}{100} - 1 \times \frac{2n(10 - n)}{100} = \frac{2n^2 - 20n + 2n^2}{100} = \frac{4n^2 - 20n}{100}.$$

B.2 Pour combien de boules rouges le jeu est-il équitable ?

Le jeu est équitable lorsque $E(Y) = 0$: $\frac{4n^2 - 20n}{100} = 0 \iff 4n(n - 5) = 0 \iff n = 0$ ou $n = 5$.

$n = 0$ correspond à une urne sans boule rouge (plus vraiment un jeu de hasard) : la situation pertinente est donc $n = 5$ **boules rouges** (et 5 vertes), pour laquelle le jeu est équitable.

Bac Première 2026 — Centres étrangers G1 (SPECIFIQUE)
1. Calculer la probabilité qu'un client soit satisfait.

Par équiprobabilité : $P(S) = \frac{900}{1\,000} = 0,9$.

2. Calculer $P(S \cap I)$ et interpréter.

$P(S \cap I) = \frac{720}{1\,000} = 0,72$. Il y a 72 % de chances de choisir un client satisfait ET ayant acheté son billet par internet.

3. Calculer $P_S(I)$.

$P_S(I) = \frac{720}{900} = 0,8$ (probabilité qu'un client ait acheté son billet par internet, sachant qu'il est satisfait).

4. Les événements I et S sont-ils indépendants ? Justifier.

$$P(I) = \frac{800}{1\,000} = 0,8.$$

Comme $P_S(I) = 0,8 = P(I)$, les événements I et S sont indépendants (on a bien $P(S \cap I) = P(S) \times P(I)$).

5. Le service marketing affirme que 90 % des clients ayant acheté en agence sont satisfaits.

Est-ce le cas ?

$$P_I(S) = \frac{180}{200} = 0,9 = 90\%.$$

C'est bien le cas : 90 % des clients ayant acheté leur billet en agence sont satisfaits.

Bac Première 2026 — Centres étrangers G1 (TECHNO)

Affirmation 1 : $u_3 = 47$, avec $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Vrai ou faux ?

$$u_1 = 2 \times 5 + 1 = 11, u_2 = 2 \times 11 + 1 = 23, u_3 = 2 \times 23 + 1 = 47.$$

L'affirmation 1 est VRAIE.

Affirmation 2 : $V_{n+1} = 1,1V_n + 200$ modélise une perte d'un dixième d'abonnés puis un gain de 200. Vrai ou faux ?

Perdre un dixième des abonnés revient à en conserver les neuf dixièmes, soit multiplier par $1 - \frac{1}{10} = 0,9$, puis ajouter 200 : $V_{n+1} = 0,9V_n + 200$.

La formule proposée ($1,1V_n + 200$) correspondrait à une **hausse** de 10 %, pas à une perte d'un dixième.

L'affirmation 2 est FAUSSE.

Affirmation 3 : $w_n = (n + 4)/3$ est arithmétique de premier terme 4 et de raison $\frac{1}{3}$. Vrai ou faux ?

$$w_0 = \frac{0 + 4}{3} = \frac{4}{3} \neq 4.$$

L'affirmation 3 est FAUSSE (le premier terme est $\frac{4}{3}$, pas 4).

Affirmation 4 : la probabilité qu'un élève se rende au lycée en bus est $\frac{3}{4}$. Vrai ou faux ?

$$P(\text{Bus}) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}.$$

L'affirmation 4 est VRAIE.

Affirmation 5 : sachant que l'élève a pris le bus, la probabilité que ce soit un garçon est 0,6. Vrai ou faux ?

Parmi les 150 élèves prenant le bus, 90 sont des filles, donc $150 - 90 = 60$ sont des garçons.

$$P_{\text{Bus}}(\text{Garçon}) = \frac{60}{150} = 0,4 \neq 0,6.$$

L'affirmation 5 est FAUSSE.

Brevet 2025 — Métropole

1. Une famille part au Mont-Dore depuis Angoulême, en suivant un trajet en pointillés sur une carte mesurant $5,9 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 6 \text{ cm}$. Calculer la distance totale sur la carte, en cm.

$$5,9 + 5 + 6 = 16,9 \text{ cm}.$$

2. L'échelle indique que 2 cm sur la carte représentent 3 000 000 cm en réalité, soit 15 km par cm. Calculer la distance réelle du trajet.

$$16,9 \times 15 = 253,5 \text{ km.}$$

3.a En tenant compte du trajet complet (800 km), un graphique donne la consommation de carburant en fonction de la distance parcourue. Est-elle proportionnelle à la distance ?

Le graphique est une droite passant par l'origine : **oui, la consommation est proportionnelle à la distance parcourue.**

3.b Quelle est la consommation pour 800 km parcourus (lecture graphique) ?

La lecture graphique donne **40 litres** pour 800 km.

3.c La voiture consomme 5 L/100 km et le réservoir contient 35 L. Faudra-t-il refaire le plein pour parcourir les 800 km ?

$35 = 7 \times 5$: avec un réservoir plein, la voiture peut parcourir $7 \times 100 = 700 \text{ km}$.

Comme $800 > 700$, **il faudra refaire le plein** en cours de trajet pour parcourir les 800 km.

Brevet 2025 — Amérique du Nord

Situation 1. Une urne contient 40 boules (5 rouges, 20 vertes, 15 blanches). Calculer la probabilité d'obtenir une boule verte en tirant au hasard.

Il y a 20 boules vertes sur 40 : la probabilité est $\frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Situation 2. Décomposer 1 050 en produit de facteurs premiers.

$$1\,050 = 105 \times 10 = 5 \times 21 \times 2 \times 5 = 5 \times 3 \times 7 \times 2 \times 5 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7.$$

Situation 3. Un article coûte 25 €. Calculer son prix après une augmentation de 14 %.

Augmenter de 14 %, c'est multiplier par $1 + \frac{14}{100} = 1,14$.

$25 \times 1,14 = 28,50 \text{ €}$: le nouveau prix est **28,50 €**.

Situation 4. Le polygone 2 est un agrandissement du polygone 1, de coefficient 2,5. L'aire du polygone 1 est $7,5 \text{ cm}^2$. Calculer l'aire du polygone 2.

Si les longueurs sont multipliées par k , les aires le sont par k^2 , ici $2,5^2 = 6,25$.

L'aire du polygone 2 est donc $7,5 \times 6,25 = 46,875 \text{ cm}^2$.

Situation 5.1 Une classe de 3e a des tailles réparties ainsi : 152 cm ($\times 2$), 157 ($\times 4$), 160 ($\times 2$), 162 ($\times 5$), 165 ($\times 2$), 170 ($\times 4$), 174 ($\times 6$), 180 ($\times 5$). Calculer la moyenne des tailles.

$$\bar{t} = \frac{2 \times 152 + 4 \times 157 + 2 \times 160 + 5 \times 162 + 2 \times 165 + 4 \times 170 + 6 \times 174 + 5 \times 180}{2 + 4 + 2 + 5 + 2 + 4 + 6 + 5} = \frac{5\,016}{30} = 167,2 \text{ cm.}$$

Situation 5.2 Quelle est la médiane des tailles de cette classe ?

Il y a 30 élèves : dans l'ordre croissant, la 15e taille est 165 cm et la 16e est 170 cm. Toute valeur entre 165 cm et 170 cm peut être prise comme médiane de cette série.

Brevet 2025 — Amérique du Nord

1. Trois scripts Scratch tracent des motifs répétés (Motif 1 : répéter $3 \times$ avancer 30/tourner 120° ; Motif 2 : répéter $6 \times$ avancer 30/tourner 60°). Associer les scripts 1 et 2 à un hexagone et un triangle équilatéral.

Le script 1 (angles de 120° , 3 répétitions) trace un **triangle équilatéral**, et le script 2 (angles de 60° , 6 répétitions) trace un **hexagone régulier**.

2. Le script 3 (répéter 2 fois une partie effacée) dessine un losange. La partie effacée contient dans le désordre : « tourner de 60° », « tourner de 120° », « avancer de 30 pas ». Remettre ces instructions dans l'ordre.

Dans l'ordre : **tourner de 120°** , puis **avancer de 30 pas**, puis **tourner de 60°** (ce triplet, répété deux fois, referme bien le losange).

3. Un script principal place le lutin en $(-200 ; 0)$ puis l'oriente à 90° . Quelles sont les coordonnées du point de départ du lutin ?

Les coordonnées du point de départ sont $(-200 ; 0)$.

4. Le script tire un nombre aléatoire entre 1 et 3 ; s'il vaut 3, il trace 6 losanges espacés de 60 pas et affiche « Voici le dessin ! », sinon il affiche « Perdu ! ». Parmi 5 captures d'écran proposées, lesquelles sont possibles ?

Si le nombre aléatoire tiré est **3**, le script dessine 6 losanges espacés de 60 pas et affiche « Voici le dessin ! ».

Si le nombre tiré est **1** ou **2**, le script affiche directement « Perdu ! », sans dessiner de losange.

5. On clique sur le drapeau vert. Quelle est la probabilité que le message affiché soit « Voici le dessin ! » ?

Il y a 1 chance sur 3 d'obtenir le nombre 3 : la probabilité est $\frac{1}{3} \approx 33,3 \%$.

6.a On relance le programme 100 fois : « Voici le dessin ! » apparaît 40 fois, « Perdu ! » 60 fois. Calculer la fréquence d'apparition de « Voici le dessin ! ».

La fréquence observée est $\frac{40}{100} = 0,4$, soit **40 %**.

6.b Pourquoi ce résultat est-il différent de celui de la question 5 ?

La question 5 donne la probabilité théorique ($\frac{1}{3} \approx 33,3\%$), valable pour un très grand nombre de répétitions ; la fréquence observée sur seulement 100 essais (40 %) fluctue naturellement autour de cette valeur théorique sans lui être exactement égale.

Brevet 2025 — Asie

Question 1. Une urne contient 4 boules bleues, 6 violettes, 7 rouges, 3 jaunes, indiscernables au toucher. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule violette en tirant au hasard ?

Il y a $4 + 6 + 7 + 3 = 20$ boules en tout, situation d'équiprobabilité : $P = \frac{\text{issues favorables}}{\text{issues possibles}}$.

Il y a 6 boules violettes sur 20 : $P = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$. **Réponse : $\frac{3}{10}$.**

Question 2. Calculer 70 % d'une quantité revient à multiplier cette quantité par :

Prendre 70 % d'une quantité revient à multiplier par le coefficient $\frac{70}{100} = 0,70$. **Réponse : 0,70.**

Les autres propositions correspondent à des erreurs classiques : $0,30 = 1 - 0,7$ (coefficient d'une baisse de 70 %), $1,70 = 1 + 0,7$ (hausse de 70 %), $1,30 = 1 + 0,3$ (hausse de 30 %).

Question 3. On considère la série 7 ; 18 ; 12 ; 13 ; 15. Quelle affirmation est vraie parmi : étendue = 8, médiane = 12, moyenne = 53, moyenne = 13 ?

La moyenne vaut $\frac{7 + 18 + 12 + 13 + 15}{5} = \frac{65}{5} = 13$. **Réponse : la moyenne de cette série est 13.**

Les autres propositions sont fausses : l'étendue vaut $18 - 7 = 11$ (et non 8, en oubliant de ranger la série avant de soustraire) ; la médiane, une fois la série rangée (7 ; 12 ; 13 ; 15 ; 18), vaut 13 (et non 12) ; la « moyenne » 53 vient d'un calcul sans les parenthèses ($7 + 18 + 12 + 13 + 15 \div 5 = 53$, faux).

Question 4. Une fonction affine f a pour représentation une droite passant par (0 ; 4) et (1 ; 2). Quelle est l'expression de f parmi : $2x + 4$, $4x - 2$, $-2x + 4$, $-4x + 2$?

La droite coupe l'axe des ordonnées en (0 ; 4), donc l'ordonnée à l'origine est $b = 4$.

En passant de (0 ; 4) à (1 ; 2), l'ordonnée diminue de 2 quand l'abscisse augmente de 1 : le coefficient directeur est $a = -2$.

Réponse : $f(x) = -2x + 4$.

Brevet 2025 — Métropole

1. Dans un repère, un point A est placé sur la grille. Quelles sont ses coordonnées ?

D'après le repère, $A(4; 3)$.

2. Un sac de 32 billes contient 4 billes vertes. Quelle est la probabilité de tirer une bille verte au hasard ?

Il y a 4 billes vertes sur 32 : la probabilité est $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

3. Quelle est la solution de l'équation $5x - 4 = 6$?

$$5x - 4 = 6 \iff 5x = 10 \iff x = 2.$$

4. Dans la liste 13, 5, 9, 11, 15, 8, 14, 16, 17, quelle est la médiane ?

En rangeant dans l'ordre croissant : 5, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17 : la valeur du milieu (5e sur 9) est 13.

5. Dans une configuration où (DB) est parallèle à (EC), avec A, D, B alignés et A, E, C alignés, quelle égalité donne le théorème de Thalès ?

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \text{ (les rapports des longueurs sur chaque droite sécante sont égaux).}$$

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 1)

Partie A — 1. Les connexions se répartissent : 25 % via A, 15 % via B, le reste via C ; 90 % des connexions via A sont stables, 80 % via B, 85 % via C. Compléter l'arbre pondéré.

Le reste des connexions transite via C, soit $1 - 0,25 - 0,15 = 0,6$, donc $P(C) = 0,6$.

Sur la première branche : $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,15$, $P(C) = 0,6$.

Sur les branches suivantes : $P_A(S) = 0,9$ et $P_A(\bar{S}) = 0,1$; $P_B(S) = 0,8$ et $P_B(\bar{S}) = 0,2$; $P_C(S) = 0,85$ et $P_C(\bar{S}) = 0,15$.

Partie A — 2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à 0,12.

$$P(S \cap B) = P(B) \times P_B(S) = 0,15 \times 0,8 = 0,12.$$

Partie A — 3. Calculer $P(C \cap \bar{S})$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

$$P(C \cap \bar{S}) = P(C) \times P_C(\bar{S}) = 0,6 \times 0,15 = 0,09.$$

Cela signifie que 9 % des connexions de l'entreprise transitent via le serveur C et sont instables.

Partie A — 4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0,855$.

Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) + P(C) \times P_C(S) = 0,25 \times 0,9 + 0,15 \times 0,8 + 0,6 \times 0,85 = 0,225 + 0,12 + 0,51 = 0,855.$$

Partie A — 5. Sachant que la connexion est stable, calculer la probabilité qu'elle ait eu lieu via le serveur B (arrondie au millième).

$$P_S(B) = \frac{P(S \cap B)}{P(S)} = \frac{0,12}{0,855} \approx \mathbf{0,140} \text{ (au millième).}$$

Partie B — 1.a On étudie un échantillon de 50 connexions choisies au hasard (assimilable à un tirage avec remise). On admet que le nombre X de connexions instables suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

Chaque connexion est une épreuve à deux issues : « instable », de probabilité $p = P(\bar{S}) = 1 - 0,855 = 0,145$, répétée $n = 50$ fois de façon indépendante.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$.

Partie B — 1.b Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables (arrondie au millième).

À la calculatrice, $P(X \leq 8) \approx \mathbf{0,704}$ (au millième).

Partie B — 2.a On constitue un échantillon de n connexions ; X_n suit la loi binomiale de paramètres n et 0,145. Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité p_n qu'au moins une connexion soit instable.

« Au moins une connexion instable » est l'évènement contraire de « aucune connexion instable », c'est-à-dire $\{X_n = 0\}$.

$$P(X_n = 0) = \binom{n}{0} \times 0,145^0 \times 0,855^n = 0,855^n, \text{ donc } p_n = 1 - 0,855^n.$$

Partie B — 2.b Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $p_n \geq 0,99$.

$$p_n \geq 0,99 \iff 1 - 0,855^n \geq 0,99 \iff 0,855^n \leq 0,01.$$

En passant au logarithme népérien (croissant) : $n \ln(0,855) \leq \ln(0,01)$, et comme $\ln(0,855) < 0$, cela équivaut à $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)}$.

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)} \approx 29,4$, donc c'est à partir de $n = \mathbf{30}$ que $p_n \geq 0,99$.

Partie B — 3.a On note $F_n = X_n/n$ la fréquence de connexions instables dans un échantillon de n connexions. Calculer l'espérance $E(F_n)$, sachant que $V(F_n) = 0,123975/n$.

$$E(X_n) = np = 0,145n, \text{ et par linéarité de l'espérance, } E(F_n) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n} \times 0,145n = \mathbf{0,145}.$$

Partie B — 3.b Vérifier que $P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq 12,5/n$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à F_n avec une précision $t = 0,1$:

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq t) \leq \frac{V(F_n)}{t^2}, \text{ donc } P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{0,123975/n}{0,01} = \frac{12,3975}{n}.$$

Comme $12,3975 < 12,5$, on a bien $P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,5}{n}$.

Partie B — 3.c Un responsable étudie un échantillon de 1 000 connexions et constate $F_{1000} = 0,3$. Doit-il soupçonner un dysfonctionnement des serveurs ?

$|0,3 - 0,145| = 0,155 \geq 0,1$: cette observation réalise l'évènement $\{|F_{1000} - 0,145| \geq 0,1\}$.

D'après la question précédente, cet évènement a une probabilité inférieure ou égale à $\frac{12,5}{1\,000} = 0,0125$ sous un fonctionnement normal : un tel écart est donc très peu probable si les serveurs fonctionnent normalement.

Le responsable a raison de soupçonner un dysfonctionnement.

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 2)

Partie A — 1. Victor réussit un panier à trois points avec une probabilité de 0,32. Il tente 15 lancers indépendants. On note N le nombre de paniers marqués. On admet que N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

L'épreuve est répétée 15 fois de façon indépendante, avec une probabilité de succès de 0,32 à chaque lancer : N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(15 ; 0,32)$.

Partie A — 2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers.

$$P(N = 4) = \binom{15}{4} \times 0,32^4 \times 0,68^{11} \approx \mathbf{0,206} \text{ (au millième).}$$

Partie A — 3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers.

À la calculatrice, $P(N \leq 6) \approx \mathbf{0,828}$.

Partie A — 4. Déterminer l'espérance de N .

$E(N) = n \times p = 15 \times 0,32 = 4,8$: en moyenne, sur une série de 15 lancers, Victor marque 4,8 paniers.

Partie A — 5.a On note T le nombre de points marqués. Exprimer T en fonction de N .

Chaque panier réussi rapporte 3 points : $T = 3N$.

Partie A — 5.b En déduire l'espérance de T et interpréter cette valeur.

Par linéarité de l'espérance, $E(T) = E(3N) = 3E(N) = 3 \times 4,8 = 14,4$: en moyenne, Victor marque 14,4 points par série de 15 lancers à trois points.

Partie A — 5.c Calculer $P(12 \leq T \leq 18)$.

$$P(12 \leq T \leq 18) = P(12 \leq 3N \leq 18) = P(4 \leq N \leq 6).$$

$$P(4 \leq N \leq 6) = P(N = 4) + P(N = 5) + P(N = 6) \approx 0,206 + 0,213 + 0,167 \approx \mathbf{0,586}.$$

Partie B — 1.a On note X les points marqués par Victor lors d'un match, avec $E(X) = 22$ et $V(X) = 65$. Victor joue $n = 50$ matchs indépendants suivant la même loi que X ; on pose $M_{50} = (X_1 + \dots + X_{50})/50$. Que représente M_{50} ?

M_{50} représente la moyenne empirique, sur 50 matchs, du nombre de points marqués par Victor.

Partie B — 1.b Déterminer l'espérance et la variance de M_{50} .

Chaque X_i suit la même loi que X , donc $E(M_{50}) = E(X) = 22$.

$$\text{Les } X_i \text{ étant indépendantes : } V(M_{50}) = \frac{1}{50} V(X) = \frac{65}{50} = 1,3.$$

Partie B — 1.c Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $a > 0$: $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.

$$\text{Ici : } P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{V(M_{50})}{3^2} = \frac{1,3}{9} = \frac{13}{90}.$$

Partie B — 1.d En déduire que la probabilité de l'évènement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à 0,85.

L'évènement « $19 < M_{50} < 25$ » équivaut à $|M_{50} - 22| < 3$, donc $P(|M_{50} - 22| < 3) = 1 - P(|M_{50} - 22| \geq 3)$.

$$\text{Comme } P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}, \text{ on a } P(19 < M_{50} < 25) \geq 1 - \frac{13}{90} = \frac{77}{90} \approx 0,856 > 0,85.$$

Partie B — 2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « il n'existe aucun entier naturel n tel que $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$ ».

D'après la loi faible des grands nombres, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq t) = 0$ pour tout réel $t > 0$, donc en particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - 22| \geq 3) = 0$.

Il existe donc un rang N à partir duquel $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$: l'affirmation est fausse.

Autre méthode : l'inégalité de concentration donne $P(|M_n - 22| \geq 3) \leq \frac{65}{9n}$, et $\frac{65}{9n} \leq 0,01 \iff n \geq \frac{6500}{9} \approx 722,2$: dès $n \geq 723$, l'inégalité voulue est vérifiée, ce qui confirme que l'affirmation est fausse.

Bac Terminale 2025 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. 95 % des jouets réussissent le test de fabrication F ; parmi eux, 98 % réussissent le test de sécurité S. Donner $P(F)$ et $P_F(S)$.

D'après l'énoncé : $P(F) = 0,95$ et $P_F(S) = 0,98$.

Partie A — 2.a Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

L'arbre a pour première branche $P(F) = 0,95$ et $P(\bar{F}) = 0,05$; sur la branche F, $P_F(S) = 0,98$ et $P_F(\bar{S}) = 0,02$; sur la branche $\bar{F}$, les probabilités $P_{\bar{F}}(S)$ et $P_{\bar{F}}(\bar{S})$ restent à déterminer.

Partie A — 2.b 1 % des jouets ne réussissent aucun des deux tests. Montrer que $P_{\bar{F}}(\bar{S}) = 0,2$.

D'après l'énoncé, $P(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0,01$.

$$P_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{P(\bar{F} \cap \bar{S})}{P(\bar{F})} = \frac{0,01}{0,05} = 0,2.$$

Partie A — 3. Calculer la probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests.

$$P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0,95 \times 0,98 = 0,931, \text{ soit } \mathbf{0,93} \text{ arrondi au centième.}$$

Partie A — 4. Montrer que la probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut **0,97** arrondi au centième.

$\{F, \bar{F}\}$ forme une partition, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(S) = P(F \cap S) + P(\bar{F} \cap S)$.

$$P(\bar{F} \cap S) = P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(S) = 0,05 \times 0,8 = 0,04 \text{ (car } P_{\bar{F}}(S) = 1 - 0,2 = 0,8).$$

$$P(S) = 0,931 + 0,04 = 0,971 \approx \mathbf{0,97}.$$

Partie A — 5. Lorsque le jouet a réussi le test de sécurité, quelle est la probabilité qu'il réussisse le test de fabrication (arrondie au centième) ?

$$P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{0,931}{0,971} \approx \mathbf{0,96}.$$

Partie B — 1. On note S_n le nombre de jouets sur n réussissant le test de fabrication, suivant la loi binomiale de paramètres n et $0,95$. Exprimer $E(S_n)$ et $V(S_n)$ en fonction de n .

$$E(S_n) = np = 0,95n \text{ et } V(S_n) = np(1-p) = n \times 0,95 \times 0,05 = 0,0475n.$$

Partie B — 2.a Pour $n = 150$, déterminer une valeur approchée de $P(S_{150} = 145)$ à 10^{-3} près et interpréter.

À la calculatrice : $P(S_{150} = 145) \approx \mathbf{0,109}$.

Cela signifie que, dans environ 10,9 % des cas, exactement 145 des 150 jouets du lot réussissent le test de fabrication.

Partie B — 2.b Déterminer la probabilité qu'au moins 94 % des jouets du lot réussissent le test de fabrication (arrondie à 10^{-3}).

94 % de 150 jouets correspond à 141 jouets : la probabilité cherchée est $P(S_{150} \geq 141)$.

À la calculatrice, $P(S_{150} \geq 141) \approx \mathbf{0,781}$.

Partie B — 3.a On pose $F_n = S_n/n$. Montrer que $E(F_n) = 0,95$ et $V(F_n) = 0,0475/n$.

$$E(F_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E(S_n)}{n} = \frac{0,95n}{n} = 0,95.$$

$$V(F_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{0,0475n}{n^2} = \frac{0,0475}{n}.$$

Partie B — 3.b On note I l'évènement « la proportion de jouets réussissant le test de fabrication est strictement comprise entre 93 % et 97 % ». Déterminer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, une taille de lot n à partir de laquelle $P(I) \geq 0,96$.

L'évènement I s'écrit $|F_n - 0,95| < 0,02$, donc $P(I) = 1 - P(|F_n - 0,95| \geq 0,02)$.

D'après Bienaymé-Tchebychev, avec $t = 0,02$: $P(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \leq \frac{V(F_n)}{0,02^2} = \frac{0,0475}{0,0004n}$.

$$\text{On veut } 1 - \frac{0,0475}{0,0004n} \geq 0,96 \iff \frac{0,0475}{0,0004n} \leq 0,04 \iff n \geq \frac{0,0475}{0,04 \times 0,0004} = 2\,968,75.$$

Il faut donc un lot d'au moins **2 969 jouets** pour garantir $P(I) \geq 0,96$.

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 1)

Partie A — 1. Un contrôle en caisse automatique est total (T) une fois sur dix. Un contrôle total détecte une erreur dans 30 % des cas ; un contrôle partiel n'en détecte pas dans 85 % des cas. Construire un arbre pondéré et déterminer $P(\overline{T} \cap E)$.

L'arbre pondéré donne : $P(T) = 0,1$, $P(\overline{T}) = 0,9$; $P_T(E) = 0,3$, $P_T(\overline{E}) = 0,7$; $P_{\overline{T}}(E) = 0,15$, $P_{\overline{T}}(\overline{E}) = 0,85$.

$$P(\overline{T} \cap E) = P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(E) = 0,9 \times 0,15 = 0,135.$$

Partie A — 2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.

$\{T, \overline{T}\}$ forme une partition, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(T \cap E) + P(\overline{T} \cap E) = 0,1 \times 0,3 + 0,135 = 0,03 + 0,135 = 0,165.$$

Partie A — 3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée (arrondie au centième).

$$P_E(T) = \frac{P(T \cap E)}{P(E)} = \frac{0,1 \times 0,3}{0,165} \approx 0,18.$$

Partie B — 1. Sur une journée, une caisse déclenche 15 contrôles ; la probabilité qu'un contrôle détecte une erreur est $p = 0,165$, indépendamment. X compte le nombre d'erreurs détectées. Préciser la loi et les paramètres de X .

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,165$.

Partie B — 2. Déterminer la probabilité qu'exactly 5 erreurs soient détectées (arrondie au centième).

$$P(X = 5) = \binom{15}{5} \times 0,165^5 \times 0,835^{10} \approx 0,06.$$

Partie B — 3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée (arrondie au centième).

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,835^{15} \approx 0,93.$$

Partie B — 4. Déterminer le nombre de contrôles à déclencher chaque jour pour que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée dépasse 99 %.

Avec n contrôles, on veut $1 - 0,835^n \geq 0,99 \iff 0,835^n \leq 0,01$.

En passant au logarithme népérien : $n \ln(0,835) \leq \ln(0,01)$, et comme $\ln(0,835) < 0$: $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \approx 25,5$.

Il faut donc déclencher au moins **26 contrôles** par jour.

Partie C — 1. Trois caisses déclenchent chacune 20 contrôles ; X_1, X_2, X_3 (nombre d'erreurs par caisse) suivent chacune la loi binomiale de paramètres 20 et 0,165. Déterminer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

$$E(X_1) = np = 20 \times 0,165 = 3,3 \text{ et } V(X_1) = np(1-p) = 20 \times 0,165 \times 0,835 = 2,7555.$$

Partie C — 2. On pose $S = X_1 + X_2 + X_3$. Justifier que $E(S) = 9,9$ et $V(S) = 8,2665$, puis montrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que $P(6 < S < 14) > 0,48$.

$$\text{Par linéarité de l'espérance : } E(S) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 3,3 = 9,9.$$

$$\text{Les } X_i \text{ étant indépendantes, par additivité de la variance : } V(S) = 3 \times V(X_1) = 3 \times 2,7555 = 8,2665.$$

L'évènement « $6 < S < 14$ » (avec $E(S) \approx 10$) équivaut à $|S - 10| < 4$, donc $P(|S - 10| < 4) = 1 - P(|S - 10| \geq 4)$.

$$\text{D'après Bienaymé-Tchebychev, avec } t = 4 : P(|S - 10| \geq 4) \leq \frac{V(S)}{4^2} = \frac{8,2665}{16}.$$

$$\text{Donc } P(|S - 10| < 4) \geq 1 - \frac{8,2665}{16} \approx 0,483 > 0,48.$$

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 1)

1. Dans la population française, 45 % sont du groupe A (85 % rhésus+), 10 % du groupe B (84 % rhésus+), 3 % du groupe AB (82 % rhésus+), le reste du groupe O. Compléter l'arbre pondéré.

Le reste correspond au groupe O : $1 - 0,45 - 0,10 - 0,03 = 0,42$. L'arbre a pour première branche $P(A) = 0,45$, $P(B) = 0,10$, $P(AB) = 0,03$, $P(O) = 0,42$, puis sur chaque branche $P_A(R) = 0,85$, $P_B(R) = 0,84$, $P_{AB}(R) = 0,82$ (les probabilités $P_O(R)$ ne sont pas encore connues à ce stade).

2. Montrer que $P(B \cap R) = 0,084$ et interpréter.

$$P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0,10 \times 0,84 = 0,084.$$

Cela signifie que 8,4 % de la population française est à la fois de groupe sanguin B et de rhésus positif.

3. On précise que $P(R) = 0,8397$. Montrer que $P_O(R) = 0,83$.

Les évènements A, B, AB, O forment une partition, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(AB \cap R) + P(O \cap R), \text{ soit } P(O \cap R) = 0,8397 - 0,45 \times 0,85 - 0,084 - 0,03 \times 0,82 = 0,3486.$$

$$P_O(R) = \frac{P(O \cap R)}{P(O)} = \frac{0,3486}{0,42} = 0,83.$$

4. Un donneur universel est de groupe O et de rhésus négatif. Montrer que la probabilité qu'un individu soit donneur universel est 0,0714.

On cherche $P(O \cap \bar{R}) = P(O) \times P_O(\bar{R}) = P(O) \times (1 - P_O(R))$.

$$P(O \cap \bar{R}) = 0,42 \times (1 - 0,83) = 0,42 \times 0,17 = 0,0714.$$

5.a Sur un échantillon de 100 personnes (tirage avec remise), X compte le nombre de donneurs universels. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

L'épreuve « être donneur universel », de probabilité $p = 0,0714$, est répétée 100 fois de façon indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise) : X suit la **loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0714$.**

5.b Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans l'échantillon.

À la calculatrice, $P(X \leq 7) \approx 0,577$.

5.c Montrer que $E(X) = 7,14$ et $V(X) \approx 6,63$ (à 10^{-2} près).

$$E(X) = np = 100 \times 0,0714 = 7,14 \text{ et } V(X) = np(1 - p) = 100 \times 0,0714 \times 0,9286 \approx 6,63.$$

6. On organise une collecte dans N villes ; $X_1, \dots, X_N$ (indépendantes, même loi que X) comptent les donneurs universels par ville, avec $E=7,14$ et $V=6,63$. On pose $M_N = (X_1 + \dots + X_N)/N$. Que représente M_N ?

M_N représente le nombre moyen de donneurs universels par collecte, sur les N collectes organisées.

7. Calculer $E(M_N)$.

M_N étant la moyenne empirique de variables de même loi que X : $E(M_N) = E(X) = 7,14$.

8. Montrer que $V(M_N) = 6,63/N$.

$$V(M_N) = \frac{V(X)}{N} = \frac{6,63}{N}.$$

9. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(7 < M_N < 7,28) \geq 0,95$.

L'évènement « $7 < M_N < 7,28$ » équivaut à $|M_N - 7,14| < 0,14$, donc $P(|M_N - 7,14| < 0,14) = 1 - P(|M_N - 7,14| \geq 0,14)$.

On veut $P(|M_N - 7,14| \geq 0,14) \leq 0,05$. D'après Bienaymé-Tchebychev, avec $t = 0,14$: $P(|M_N - 7,14| \geq 0,14) \leq \frac{6,63}{N \times 0,14^2}$.

$$\text{On veut donc } \frac{6,63}{0,0196 N} \leq 0,05 \iff N \geq \frac{6,63}{0,05 \times 0,0196} \approx 6\,765,3.$$

La plus petite valeur qui convient est donc $N = 6\,766$.

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 2)

Partie A — 1. Dans un centre multisports, une personne peut chuter en séance 1 (A, $P(A)=0,6$) puis en séance 2 (B) ; $P_A(B) = 0,3$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,4$. Représenter la situation par un arbre pondéré.

L'arbre a pour première branche $P(A) = 0,6$, $P(\bar{A}) = 0,4$, puis $P_A(B) = 0,3$, $P_A(\bar{B}) = 0,7$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,4$, $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,6$.

Partie A — 2. Calculer $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ et interpréter.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,4 \times 0,6 = 0,24.$$

Cela signifie que 24 % des personnes ne chutent ni lors de la première ni lors de la deuxième séance.

Partie A — 3. Montrer que $P(B) = 0,34$.

$\{A, \bar{A}\}$ forme une partition, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4 = 0,18 + 0,16 = 0,34$.

Partie A — 4. Sachant que la personne n'a pas chuté à la deuxième séance, calculer la probabilité qu'elle n'ait pas chuté à la première.

$$P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,24}{1 - 0,34} = \frac{0,24}{0,66} \approx 0,364.$$

Partie A — 5.a Sur un échantillon de 100 personnes (tirage avec remise), X compte celles n'ayant chuté ni à la première ni à la deuxième séance (probabilité 0,24). Justifier la loi de X et ses paramètres.

L'épreuve « ne pas chuter » (probabilité 0,24) est répétée 100 fois de façon indépendante : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,24$.

Partie A — 5.b Quelle est la probabilité d'avoir au moins 20 personnes sur 100 n'ayant chuté à aucune des deux séances ?

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx 1 - 0,145 \approx 0,855.$$

Partie A — 5.c Calculer $E(X)$ et interpréter.

$E(X) = np = 100 \times 0,24 = 24$: en moyenne, sur 100 personnes, 24 ne chuteront ni lors de la première ni lors de la deuxième séance.

Partie B — 1. T_1 (temps d'attente samedi, $E=40$, écart-type=10) et T_2 (dimanche, $E=60$, écart-type=16) sont indépendantes ; $T = T_1 + T_2$. Déterminer $E(T)$ et interpréter.

Par linéarité de l'espérance : $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 40 + 60 = 100$: il faut attendre en moyenne 100 minutes sur les deux jours.

Partie B — 2. Montrer que $V(T) = 356$.

T_1 et T_2 étant indépendantes : $V(T) = V(T_1) + V(T_2) = \sigma(T_1)^2 + \sigma(T_2)^2 = 10^2 + 16^2 = 100 + 256 = 356$.

Partie B — 3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $P(60 < T < 140) > 0,77$.

L'évènement « $60 < T < 140$ » équivaut à $|T - 100| < 40$ (en centrant sur $E(T) = 100$).

D'après Bienaymé-Tchebychev, avec $t = 40$: $P(|T - 100| \geq 40) \leq \frac{V(T)}{40^2} = \frac{356}{1600}$.

Donc $P(|T - 100| < 40) \geq 1 - \frac{356}{1600} = \frac{1244}{1600} \approx 0,7775 > 0,77$.

Bac Terminale 2025 — Polynésie française (jour 2)

Partie A — 1.a Une donnée binaire (0 ou 1) est transmise de machine en machine, fidèlement (90 %) ou de façon contraire (10 %). V_n : « la n -ième machine détient 1 ». Compléter l'arbre de probabilité.

Chaque transmission fidèle a une probabilité 0,9 et chaque transmission contraire 0,1 : l'arbre a pour branches $P_{V_n}(V_{n+1}) = 0,9$, $P_{V_n}(\overline{V_{n+1}}) = 0,1$, $P_{\overline{V_n}}(V_{n+1}) = 0,1$, $P_{\overline{V_n}}(\overline{V_{n+1}}) = 0,9$.

Partie A — 1.b Démontrer que $P(V_3) = 0,82$ et interpréter.

$\{V_2, \overline{V_2}\}$ forme une partition, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(V_3) = P(V_2) \times P_{V_2}(V_3) + P(\overline{V_2}) \times P_{\overline{V_2}}(V_3)$.

$P(V_2) = 0,9$ (car $P(V_1) = 1$), donc $P(V_3) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,1 = 0,81 + 0,01 = 0,82$.

Cela signifie qu'il y a 82 % de chances que la troisième machine détienne la valeur 1.

Partie A — 1.c Sachant que la troisième machine a reçu 1, calculer la probabilité que la deuxième ait aussi reçu 1.

$$P_{V_3}(V_2) = \frac{P(V_2 \cap V_3)}{P(V_3)} = \frac{0,9 \times 0,9}{0,82} = \frac{81}{82} \approx 0,988.$$

Partie A — 2.a On note $p_n = P(V_n)$, $p_1 = 1$. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1$.

$\{V_n, \overline{V_n}\}$ forme une partition, donc $p_{n+1} = P(V_n) \times P_{V_n}(V_{n+1}) + P(\overline{V_n}) \times P_{\overline{V_n}}(V_{n+1}) = 0,9p_n + 0,1(1 - p_n)$.

$$p_{n+1} = 0,9p_n + 0,1 - 0,1p_n = 0,8p_n + 0,1.$$

Partie A — 2.b Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$.

Initialisation : pour $n = 1$, $0,5 \times 0,8^0 + 0,5 = 0,5 + 0,5 = 1 = p_1$: la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : on suppose que, pour un entier $n \geq 1$, $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$. Alors : $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1 = 0,8(0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5) + 0,1 = 0,5 \times 0,8^n + 0,4 + 0,1 = 0,5 \times 0,8^n + 0,5$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$.

Partie A — 2.c Calculer la limite de p_n et interpréter.

Comme $-1 < 0,8 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^{n-1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,5$.

Quand le nombre de machines tend vers l'infini, la probabilité que la dernière détienne la valeur 1 tend vers 0,5 (la donnée devient totalement aléatoire).

Partie B — 1. On donne un script Python `simulation(n)` (`donnee=1` ; puis pour chaque étape : `if rand()<0.1 : donnee=1-donnee`). Déterminer le rôle des lignes « `if rand()<0.1` » et « `donnee=1-donnee` ».

`'rand()'` renvoie un nombre aléatoire de $[0 ; 1[$; la condition `'rand()<0.1'` est donc vraie avec une probabilité de 0,1 (proportionnelle à la longueur de l'intervalle $[0 ; 0,1[$).

Cette ligne simule donc l'évènement « transmission contraire » (probabilité 0,1) ; la ligne `'donnee = 1 - donnee'` inverse alors la valeur (0 devient 1, 1 devient 0), simulant cette transmission contraire.

Partie B — 2. Calculer la probabilité que `simulation(4)` renvoie `[1,1,1,1]` et que `simulation(6)` renvoie `[1,0,1,0,0,1]`.

`[1,1,1,1]` correspond à 4 transmissions fidèles successives : $P = 0,9^4 = 0,6561 \approx \mathbf{0,656}$.

`[1,0,1,0,0,1]` correspond à 3 transmissions contraires, puis fidèle, puis contraire, puis fidèle : $P = 0,1^3 \times 0,9 \times 0,1 \times 0,9 = 0,9^2 \times 0,1^4 = 8,1 \times 10^{-5} \approx \mathbf{0,000}$ (au millième).

Brevet 2024 — Amérique du Nord

1. Un magasin relève les prix de cinq vêtements : 12 €, 15 €, 10 €, 7 € et 13 €. Affirmation A : la moyenne des prix est 11,40 €. Affirmation B : la médiane des prix est 10 €. Ces affirmations sont-elles vraies ou fausses ?

Affirmation A : la moyenne vaut $\frac{12 + 15 + 10 + 7 + 13}{5} = \frac{57}{5} = 11,4$ €. L'affirmation A est **vraie**.

Affirmation B : en rangeant les prix dans l'ordre croissant, on obtient 7 ; 10 ; 12 ; 13 ; 15. La valeur centrale (la 3e sur 5) est 12 €, donc la médiane est 12 € et non 10 €. L'affirmation B est **fausse**.

2. Lors d'un entraînement, une élève parcourt 20 m en 6 secondes. Affirmation C : sa vitesse moyenne est de 14 km/h. Vrai ou faux ?

La vitesse moyenne est $v = \frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{20}{6} \approx 3,33$ m/s.

Pour convertir en km/h, on multiplie par 3,6 (puisque 1 m/s = 3,6 km/h) : $3,33 \times 3,6 \approx 12$ km/h.

La vitesse moyenne de l'élève est donc d'environ 12 km/h, et non 14 km/h. L'affirmation C est **fausse**.

3. Une urne contient 15 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 15. Affirmation D : la probabilité de tirer une boule portant un nombre premier est $\frac{7}{15}$. Vrai ou faux ?

Les nombres premiers compris entre 1 et 15 sont 2, 3, 5, 7, 11 et 13 : il y en a 6.

La probabilité de tirer un nombre premier est donc $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$, et non $\frac{7}{15}$. L'affirmation D est **fausse**.

4. Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport (-3). Affirmation E : l'aire du triangle A'B'C' est égale à 3 fois l'aire du triangle ABC. Vrai ou faux ?

Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$, et donc les aires par k^2 .

Ici $k = -3$, donc les aires sont multipliées par $(-3)^2 = 9$, et non par 3.

L'aire du triangle A'B'C' est donc égale à 9 fois celle du triangle ABC, et non à 3 fois. L'affirmation E est **fausse**.

Brevet 2024 — Asie

Trois affirmations sont proposées ; pour chacune, il fallait dire si elle est vraie ou fausse en justifiant. 1. Un assemblage de quatre cubes identiques est représenté en perspective cavalière (trois cubes posés sur un même plan et un quatrième cube posé au-dessus). Affirmation 1 : « La vue de droite de cet assemblage est un rectangle simple, sans trait supplémentaire. » Vrai ou faux ?

L'affirmation est **fausse**.

Le solide comporte un cube supplémentaire posé au-dessus des trois autres. Sur n'importe quelle vue latérale (de face, de dos, de gauche ou de droite), ce cube du dessus doit apparaître comme un rectangle plus petit, dessiné au-dessus (ou empiétant sur) le contour du reste du solide.

Un simple rectangle plein, sans trait indiquant la présence de ce cube supplémentaire, ne peut donc pas être la bonne vue de droite.

2. Sur un schéma (non fourni à l'échelle), cinq points U, O, S, D, N sont placés de sorte que S, N, O soient alignés dans cet ordre et que S, U, D soient alignés dans cet ordre, avec $ON = 6$ cm, $SU = 5$ cm et $UD = 6$ cm. Affirmation 2 : « Les droites (NU) et (OD) sont parallèles. » Vrai ou faux ?

L'affirmation est **fausse**.

Les points S, N, O sont alignés dans cet ordre, avec $ON = 6$ cm : N est le milieu de [SO], donc $\frac{SN}{SO} = \frac{1}{2}$.

Les points S, U, D sont alignés dans cet ordre, avec $SU = 5$ cm et $UD = 6$ cm, donc $SD = SU + UD = 11$ cm, et $\frac{SU}{SD} = \frac{5}{11}$.

Or $\frac{1}{2} \neq \frac{5}{11}$ (on peut comparer $1 \times 11 = 11$ et $2 \times 5 = 10$, qui sont différents).

D'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (NU) et (OD) ne sont donc pas parallèles.

3. Une urne opaque contient 4 boules rouges et 6 boules bleues indiscernables au toucher ; on y tire une boule au hasard. Un dé non truqué à 6 faces numérotées de 1 à 6 est lancé. Affirmation 3 : « La probabilité de tirer une boule bleue dans l'urne est supérieure à la probabilité d'obtenir un nombre pair avec le dé. » Vrai ou faux ?

L'affirmation est **vraie**.

Les boules étant indiscernables au toucher, le tirage dans l'urne est équiprobable : l'urne contient $4 + 6 = 10$ boules dont 6 bleues, donc $P(\text{bleue}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6$.

Le dé étant non truqué, chaque face a la même probabilité : les issues paires sont 2, 4 et 6, soit 3 issues favorables sur 6, donc $P(\text{pair}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Comme $0,6 > 0,5$, la probabilité d'obtenir une boule bleue est bien supérieure à celle d'obtenir un nombre pair.

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. Au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient été infectés par la COVID-19. On prélève un individu au hasard ; quelle est la probabilité qu'il ait déjà été infecté (événement I) ?

Par équiprobabilité, $P(I) = 0,057$.

Partie A — 2.a On prélève 100 personnes (tirage assimilé avec remise) ; X compte les personnes déjà infectées. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

L'épreuve « être déjà infecté » (probabilité 0,057) est répétée 100 fois de façon indépendante : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,057$.

Partie A — 2.b Calculer son espérance et interpréter.

$E(X) = 100 \times 0,057 = 5,7$: en moyenne, un échantillon de 100 adultes contient 5,7 personnes déjà infectées.

Partie A — 2.c Quelle est la probabilité qu'aucune personne de l'échantillon ne soit infectée (à 10^{-4} près) ?

$$P(X = 0) = 0,943^{100} \approx 0,0028.$$

Partie A — 2.d Quelle est la probabilité qu'au moins 2 personnes soient infectées (à 10^{-4} près) ?

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,9801.$$

Partie A — 2.e Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leq n) > 0,9$, et interpréter.

À la calculatrice, $P(X \leq 8) \approx 0,883$ et $P(X \leq 9) \approx 0,941$: le plus petit entier est $n = 9$. Il y a plus de 9 chances sur 10 que l'échantillon contienne au plus 9 personnes déjà infectées.

Partie B — 1. Un test a une sensibilité de 0,8 ($P_I(T)$, test positif sachant infecté) et une spécificité de 0,99 ($P_{\bar{I}}(\bar{T})$). Compléter l'arbre de probabilités.

$$P(I) = 0,057, P(\bar{I}) = 0,943 ; P_I(T) = 0,8, P_I(\bar{T}) = 0,2 ; P_{\bar{I}}(T) = 0,01, P_{\bar{I}}(\bar{T}) = 0,99.$$

Partie B — 2. Montrer que $P(T) = 0,05503$.

Par les probabilités totales : $P(T) = P(I \cap T) + P(\bar{I} \cap T) = 0,057 \times 0,8 + 0,943 \times 0,01 = 0,0456 + 0,00943 = 0,05503$.

Partie B — 3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif (à 10^{-4} près) ?

$$P_T(I) = \frac{P(I \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0456}{0,05503} \approx 0,8286.$$

Partie C. Dans un autre pays, avec le même test, la proportion de tests positifs est de 29,44 %. Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard ait été infecté ?

En notant x la proportion d'infectés : $P(T) = 0,8x + 0,01(1 - x) = 0,79x + 0,01$.

$0,79x + 0,01 = 0,2944 \iff 0,79x = 0,2844 \iff x = 0,36$: la probabilité d'avoir été infecté est **0,36** (36 % de la population).

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 2)

1. Léa estime que si elle gagne une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas ; si elle perd, elle gagne la suivante avec probabilité 0,2 ; et $g_1 = 0,5$. Quelle est la valeur de $P_{G_1}(D_2)$?

Si Léa gagne la première partie, elle perd la deuxième dans $1 - 0,7 = 0,3$ des cas : $P_{G_1}(D_2) = 0,3$.

2. Compléter l'arbre de probabilités des deux premières parties.

$P(G_1) = 0,5$, $P(D_1) = 0,5$; $P_{G_1}(G_2) = 0,7$, $P_{G_1}(D_2) = 0,3$; $P_{D_1}(G_2) = 0,2$, $P_{D_1}(D_2) = 0,8$.

3. Calculer g_2 .

Par les probabilités totales : $g_2 = 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 = 0,35 + 0,1 = 0,45$.

4.a Compléter l'arbre pour les parties n et $n + 1$.

Depuis G_n (probabilité g_n) : $P_{G_n}(G_{n+1}) = 0,7$, $P_{G_n}(D_{n+1}) = 0,3$; depuis D_n (probabilité $1 - g_n$) : $P_{D_n}(G_{n+1}) = 0,2$, $P_{D_n}(D_{n+1}) = 0,8$.

4.b Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2$.

$\{G_n, D_n\}$ forme une partition : $g_{n+1} = g_n \times 0,7 + (1 - g_n) \times 0,2 = 0,7g_n + 0,2 - 0,2g_n = 0,5g_n + 0,2$.

5.a On pose $v_n = g_n - 0,4$. Montrer que (v_n) est géométrique, en précisant premier terme et raison.

$v_{n+1} = g_{n+1} - 0,4 = 0,5g_n - 0,2 = 0,5(v_n + 0,4) - 0,2 = 0,5v_n$: (v_n) est géométrique de raison **0,5**, de premier terme $v_1 = 0,5 - 0,4 = 0,1$.

5.b Montrer que, pour tout n non nul, $g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$.

$$v_n = v_1 \times 0,5^{n-1} = 0,1 \times 0,5^{n-1}, \text{ donc } g_n = v_n + 0,4 = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n) .

$$g_{n+1} - g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1}(0,5 - 1) = -0,1 \times 0,5^n < 0 : \text{ la suite } (g_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

7. Donner la limite de la suite (g_n) et interpréter.

Comme $-1 < 0,5 < 1$, $0,5^{n-1} \rightarrow 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = 0,4$. Sur le long terme, Léa gagne environ **40 %** de ses parties.

8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leq 0,001$.

$$0,1 \times 0,5^{n-1} \leq 0,001 \iff 0,5^{n-1} \leq 0,01 \iff (n-1) \ln(0,5) \leq \ln(0,01).$$

$$n-1 \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \approx 6,64 \text{ (le sens change car } \ln(0,5) < 0), \text{ donc } n \geq 7,64 : \text{ le plus petit entier est } n = 8.$$

9. Compléter la fonction Python ‘seuil(e)’ (initialisée avec $g=0.5$, $n=1$) pour qu’elle renvoie le plus petit rang à partir duquel $g_n \leq 0,4 + e$.

Ligne 4 : ‘while $g > 0.4 + e$:’; ligne 6 : ‘ $n = n + 1$ ’.

Bac Terminale 2024 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. Un sac contient 8 jetons numérotés de 1 à 8 ; on pioche trois fois avec remise et on note la liste ordonnée des numéros. Déterminer le nombre de tirages possibles.

Chaque pioche offre 8 possibilités, avec remise : il y a $8^3 = \mathbf{512}$ tirages possibles.

2.a Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.

Sans répétition, on a 8 choix pour le premier numéro, 7 pour le deuxième, 6 pour le troisième : $8 \times 7 \times 6 = \mathbf{336}$ tirages.

2.b En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition.

$$512 - 336 = \mathbf{176} \text{ tirages avec au moins une répétition (complémentaire des tirages sans répétition).}$$

3. On note X_1 le numéro du premier jeton pioché. Établir la loi de probabilité de X_1 .

Les jetons étant indiscernables, la loi est équirépartie : $P(X_1 = k) = \frac{1}{8}$ pour chaque k de 1 à 8.

4. Déterminer l'espérance de X_1 .

$$E(X_1) = \frac{1 + 2 + \cdots + 8}{8} = \frac{36}{8} = 4,5.$$

5. On pose $S = X_1 + X_2 + X_3$. Déterminer l'espérance de S .

Par linéarité, et les trois variables suivant la même loi : $E(S) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 4,5 = 13,5$.

6. Déterminer $P(S = 24)$.

La somme 24 n'est réalisée que par le tirage (8 ; 8 ; 8), une issue sur 512 : $P(S = 24) = \frac{1}{512}$.

7.a Un joueur gagne un lot si $S \geq 22$. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages gagnants.

$S = 24$: uniquement (8 ; 8 ; 8), soit 1 tirage. $S = 23$: la somme 7+8+8, avec 3 positions possibles pour le 7, soit 3 tirages.

$S = 22$: les sommes 6+8+8 et 7+7+8, chacune donnant 3 tirages (3 positions du numéro isolé), soit 6 tirages.

Total : $1 + 3 + 6 = 10$ tirages gagnants.

7.b En déduire la probabilité de gagner un lot.

$$P(S \geq 22) = \frac{10}{512} = \frac{5}{256}.$$

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 1)

1. Les achats d'un téléviseur se font sur internet (60 %), en magasin d'électroménager (30 %) ou en grande surface (10 %), avec des taux de satisfaction de 75 %, 90 % et 80 %. Compléter l'arbre pondéré.

$$P(I) = 0,6, P(M) = 0,3, P(G) = 0,1; P_I(S) = 0,75, P_I(\bar{S}) = 0,25; P_M(S) = 0,9, P_M(\bar{S}) = 0,1; P_G(S) = 0,8, P_G(\bar{S}) = 0,2.$$

2. Calculer la probabilité que le client ait acheté sur internet et soit satisfait.

$$P(I \cap S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45.$$

3. Démontrer que $P(S) = 0,8$.

Par les probabilités totales : $P(S) = 0,45 + 0,3 \times 0,9 + 0,1 \times 0,8 = 0,45 + 0,27 + 0,08 = 0,8$.

4. Un client est satisfait. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté sur internet (à 10^{-3} près) ?

$$P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0,45}{0,8} = \frac{9}{16} \approx 0,563.$$

5.a On contacte 30 clients (tirage assimilé avec remise) ; X compte les satisfaits. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

Chaque client est une épreuve à deux issues (satisfait, probabilité 0,8), répétée 30 fois de façon indépendante : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,8$.

5.b Déterminer la probabilité qu'au moins 25 clients soient satisfaits (à 10^{-3} près).

$$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) \approx 1 - 0,572 = 0,428.$$

6. Déterminer la taille minimale de l'échantillon pour que la probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.

La probabilité que tous soient satisfaits est $0,8^n$: on veut $1 - 0,8^n > 0,99 \iff 0,8^n < 0,01$.

$$n \ln(0,8) < \ln(0,01), \text{ donc } n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,6 : \text{ il faut contacter au moins } \mathbf{21} \text{ clients.}$$

7.a Le temps de livraison est $T = T_1 + T_2$, avec T_1 et T_2 indépendantes, $E(T_1) = 4$, $V(T_1) = 2$, $E(T_2) = 3$, $V(T_2) = 1$. Déterminer $E(T)$ et $V(T)$.

$$E(T) = 4 + 3 = 7 ; \text{ par indépendance, } V(T) = 2 + 1 = 3.$$

7.b Justifier que la probabilité que le téléviseur arrive entre 5 et 9 jours est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

« $5 \leq T \leq 9$ » contient l'évènement $|T - 7| < 3$ (les valeurs de T étant entières), dont la probabilité vaut $1 - P(|T - 7| \geq 3)$.

$$\text{L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne } P(|T - 7| \geq 3) \leq \frac{V(T)}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Donc } P(5 \leq T \leq 9) \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 2)

1. À l'issue d'un examen, 91,7 % des étudiants ont répondu « oui » à la question « Pensez-vous avoir réussi ? » ; 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non », et 98 % de ceux ayant réussi ont répondu « oui ». Préciser $P(Q)$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q})$.

$P(Q) = 0,917$ (proportion de « oui ») et $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0,65$ (probabilité d'avoir répondu « non » sachant qu'on a échoué).

2.a En notant $x = P(R)$, compléter l'arbre pondéré.

$$P(R) = x, P(\bar{R}) = 1 - x ; P_R(Q) = 0,98, P_R(\bar{Q}) = 0,02 ; P_{\bar{R}}(Q) = 0,35, P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0,65.$$

2.b Montrer que $x = 0,9$.

Par les probabilités totales : $P(Q) = 0,98x + 0,35(1 - x) = 0,63x + 0,35$.

$$0,63x + 0,35 = 0,917 \iff 0,63x = 0,567 \iff x = 0,9.$$

3. L'étudiant interrogé a répondu « oui ». Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen (à 10^{-3} près) ?

$$P_Q(R) = \frac{P(Q \cap R)}{P(Q)} = \frac{0,9 \times 0,98}{0,917} \approx \mathbf{0,962}.$$

4. La note N suit la loi binomiale de paramètres $(20; 0,615)$. À partir de quelle note la directrice doit-elle récompenser pour que 65 % des étudiants le soient ?

À la calculatrice : $P(N \geq 11) \approx 0,797$ et $P(N \geq 12) \approx 0,649$: en récompensant à partir de la note 11, environ 80 % des étudiants sont récompensés, ce qui est le premier seuil garantissant au moins 65 %.

5. Les notes $N_1, \dots, N_{10}$ de dix étudiants sont indépendantes et suivent la même loi binomiale $(20; 0,615)$. Calculer $E(S)$ et $V(S)$ pour $S = N_1 + \dots + N_{10}$.

Pour chaque note : $E(N_i) = 20 \times 0,615 = 12,3$ et $V(N_i) = 20 \times 0,615 \times 0,385 = 4,7355$.

$$E(S) = 10 \times 12,3 = 123 \text{ et, par indépendance, } V(S) = 10 \times 4,7355 = 47,355.$$

6.a On pose $M = \frac{S}{10}$. Que modélise cette variable aléatoire ?

M modélise la moyenne des notes obtenues par les dix étudiants choisis au hasard.

6.b Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.

$$E(M) = \frac{1}{10}E(S) = 12,3 \text{ et } V(M) = \frac{1}{100}V(S) = 0,47355.$$

6.c À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier que la probabilité que la moyenne de dix étudiants soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 %.

L'intervalle $]10,3; 14,3[$ est centré sur $E(M) = 12,3$: l'évènement s'écrit $|M - 12,3| < 2$.

Bienaymé-Tchebychev : $P(|M - 12,3| \geq 2) \leq \frac{0,47355}{4} \approx 0,118$, donc $P(|M - 12,3| < 2) \geq 0,88 \geq 0,8$.

L'affirmation est justifiée.

Bac Terminale 2024 — Polynésie française (jour 2)

1. Un sondage indique que 60 % des personnes de plus de 15 ans comptent regarder les Jeux Olympiques et Paralympiques (JOP) 2024 à la télévision, et que parmi elles, 8 sur 9 déclarent pratiquer une activité sportive régulière. On note J l'évènement « la personne compte regarder les JOP » et S « la personne pratique une activité sportive régulière ». Démontrer que $P(J \cap S) = \frac{8}{15}$.

$$P(J \cap S) = P(J) \times P_J(S) = 0,6 \times \frac{8}{9} = \frac{6}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}.$$

2.a Le sondage indique par ailleurs que $P(S) = \frac{2}{3}$. Calculer $P(\bar{J} \cap S)$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $(J, \bar{J}) : P(S) = P(J \cap S) + P(\bar{J} \cap S)$, donc $P(\bar{J} \cap S) = \frac{2}{3} - \frac{8}{15} = \frac{10}{15} - \frac{8}{15} = \frac{2}{15}$.

2.b En déduire $P_{\bar{J}}(S)$.

$$P(\bar{J}) = 1 - 0,6 = 0,4 = \frac{2}{5}, \text{ donc } P_{\bar{J}}(S) = \frac{P(\bar{J} \cap S)}{P(\bar{J})} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{15} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{3}.$$

3.a On interroge 30 personnes de plus de 15 ans au hasard, assimilé à un tirage avec remise. X compte le nombre de personnes, parmi les 30, déclarant une activité sportive régulière. Préciser la loi de X .

Les 30 tirages sont indépendants et identiques, chacun avec probabilité $P(S) = \frac{2}{3}$ de succès : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = \frac{2}{3}$.

3.b Calculer la probabilité qu'exactement 16 personnes parmi les 30 déclarent une activité sportive régulière (arrondi au millième).

$$P(X = 16) = \binom{30}{16} \left(\frac{2}{3}\right)^{16} \left(\frac{1}{3}\right)^{14} \approx 0,046.$$

3.c On offre une place à 380 € pour chaque personne déclarant une activité sportive régulière, avec un budget de 10 000 €. Quelle est la probabilité que ce budget soit insuffisant (arrondi au millième) ?

Le budget permet d'offrir au plus $\left\lfloor \frac{10\,000}{380} \right\rfloor = \lfloor 26,31 \dots \rfloor = 26$ places.

Le budget est insuffisant si $X \geq 27$, soit $X > 26$. À la calculatrice, $P(X \leq 26) \approx 0,997$, donc $P(X \geq 27) = 1 - P(X \leq 26) \approx 0,003$.

Brevet 2023 — Métropole, Antilles et Guyane

1.a Une piscine propose un tarif A à 5,90 € l'entrée. Calculer le prix total pour 10 entrées avec le tarif A.

Avec le tarif A, le prix de 10 entrées est $5,90 \times 10 = \mathbf{59 \text{ €}}$.

1.b Le tarif B coûte 4,40 € l'entrée, avec en plus une carte d'abonnement annuelle de 30 €. Calculer le prix total pour 10 entrées avec le tarif B.

Avec le tarif B, le prix de 10 entrées est $4,40 \times 10 + 30 = 44 + 30 = \mathbf{74 \text{ €}}$.

2. On note $f(x)$ et $g(x)$ les prix, en euros, payés respectivement avec le tarif A et le tarif B pour x entrées. Donner les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.

Le tarif A est proportionnel au nombre d'entrées : $f(x) = 5,90x$. Le tarif B ajoute un forfait fixe de 30 € au prix proportionnel des entrées : $g(x) = 4,40x + 30$.

3.a Résoudre l'équation $5,90x = 4,40x + 30$.

On regroupe les termes en x d'un côté de l'égalité : $5,90x - 4,40x = 30$, soit $1,5x = 30$.

On en déduit $x = \frac{30}{1,5} = \mathbf{20}$.

L'ensemble des solutions de cette équation est $\{20\}$.

3.b Quel est le nombre d'entrées pour lequel les tarifs A et B donnent le même prix à payer ?

D'après la résolution de l'équation précédente, les deux tarifs donnent le même prix pour **20 entrées**.

4.a Le nombre d'entrées relevé chaque mois de l'année est : 12 500, 13 700, 10 400, 13 600, 12 300, 11 700, 10 400, 11 600, 10 200, 13 800, 12 600 et 11 800. Calculer le nombre moyen d'entrées par mois.

La moyenne s'obtient en divisant la somme des douze valeurs mensuelles par 12.

La somme des entrées sur l'année est $12\,500 + 13\,700 + 10\,400 + 13\,600 + 12\,300 + 11\,700 + 10\,400 + 11\,600 + 10\,200 + 13\,800 + 12\,600 + 11\,800 = 144\,600$.

Le nombre moyen d'entrées par mois est donc $\frac{144\,600}{12} = \mathbf{12\,050 \text{ entrées}}$.

4.b Calculer l'étendue du nombre d'entrées par mois.

L'étendue d'une série statistique est la différence entre sa plus grande et sa plus petite valeur.

Le maximum mensuel est 13 800 (octobre) et le minimum est 10 200 (septembre), donc l'étendue vaut $13\,800 - 10\,200 = \mathbf{3\,600 \text{ entrées}}$.

5. La piscine a la forme d'un pavé droit de 50 m de longueur, 25 m de largeur et 3 m de profondeur. En supposant qu'elle soit entièrement remplie, déterminer, en m^3 , le volume d'eau évacué lors de la vidange.

Le volume d'un pavé droit est le produit de ses trois dimensions : longueur $\times$ largeur $\times$ hauteur.

Le volume d'eau à évacuer est donc $50 \times 25 \times 3 = \mathbf{3\,750\,m^3}$.

Brevet 2023 — Amérique du Nord

Situation 1. Donner la décomposition de 780 en produit de facteurs premiers (aucune justification attendue).

On divise successivement par les plus petits nombres premiers : $780 = 2 \times 390 = 2 \times 2 \times 195 = 2 \times 2 \times 3 \times 65 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13$.

La décomposition en produit de facteurs premiers est donc $780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$.

Situation 2.a Dans un jeu de 32 cartes (quatre familles de huit cartes chacune : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as), on tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir le 8 de pique (aucune justification attendue) ?

Le tirage est équiprobable sur les 32 cartes, et une seule carte correspond à l'évènement (le 8 de pique).

La probabilité d'obtenir le 8 de pique est donc $\frac{1}{32}$.

Situation 2.b Quelle est la probabilité d'obtenir un roi ou un cœur (aucune justification attendue) ?

Il y a 4 rois (un par famille) et 8 cœurs, mais le roi de cœur est compté dans les deux catégories : il ne faut donc le compter qu'une seule fois.

Le nombre d'issues favorables est $4 + 8 - 1 = 11$, sur un total de 32 issues équiprobables.

La probabilité d'obtenir un roi ou un cœur est donc $\frac{11}{32}$.

Situation 3. Développer et réduire l'expression $A = (2x + 5)(3x - 4)$.

On développe chaque produit : $A = 2x \times 3x + 2x \times (-4) + 5 \times 3x + 5 \times (-4) = 6x^2 - 8x + 15x - 20$.

En réduisant les termes de même degré : $A = 6x^2 + 7x - 20$.

Situation 4.a Un prisme droit a pour base un triangle rectangle de côtés 60 cm et 80 cm (les deux côtés de l'angle droit), et pour hauteur 120 cm. Quel est le volume, en cm^3 , de ce prisme droit ?

L'aire du triangle rectangle de base est $\mathcal{A}_{\text{base}} = \frac{60 \times 80}{2} = 2\,400 \text{ cm}^2$.

Le volume du prisme droit est $\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = 2\,400 \times 120 = 288\,000 \text{ cm}^3$.

Situation 4.b Convertir ce volume en litre (rappel : $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$).

On convertit d'abord les cm^3 en dm^3 , sachant que $1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$: $288\,000 \text{ cm}^3 = 288 \text{ dm}^3$.

Comme $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$, le volume du prisme est donc de **288 L**.

Situation 5. Le polygone 2 est un agrandissement du polygone 1, de coefficient 3. L'aire du polygone 1 est 11 cm^2 . Quelle est l'aire du polygone 2 ?

Lors d'un agrandissement de coefficient k , les aires sont multipliées par k^2 (et non par k).

Ici $k = 3$, donc les aires sont multipliées par $3^2 = 9$.

L'aire du polygone 2 est donc $9 \times 11 = \mathbf{99 \text{ cm}^2}$.

Brevet 2023 — Nouvelle-Calédonie

1. D'après des chercheurs, la probabilité qu'une personne subisse une attaque mortelle de rein au cours de sa vie est l'une des trois valeurs suivantes : $2,7 \times 10^{-7}$, $2,7 \times 10^0$ ou $2,7 \times 10^7$. Laquelle ?

Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1. Or $2,7 \times 10^0 = 2,7$ et $2,7 \times 10^7$ sont bien supérieurs à 1 : seule $2,7 \times 10^{-7}$ (un nombre très petit, proche de 0) peut être une probabilité.

2. Calculer $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{7}{4}$.

On commence par le produit : $\frac{2}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{2 \times 7}{5 \times 4} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$.

On met ensuite les deux fractions au même dénominateur : $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$, donc $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{6}{10} - \frac{7}{10} = -\frac{1}{10}$.

3. Un pantalon vendu 80 € est affiché à 60 € sur un site. Quel est le pourcentage de réduction ?

La réduction représente $80 - 60 = 20$ € sur un prix de départ de 80 €.

Le taux de réduction est donc $\frac{20}{80} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100}$, soit **25 %**.

4. ABCD est un parallélogramme de centre E. Que peut-on dire de l'homothétie de centre A qui transforme B en F, où F est le milieu de [AB] ?

Dans un parallélogramme ABCD, les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu commun E : E est donc le milieu de [AC].

F étant le milieu de [AB], l'homothétie de centre A qui envoie B sur son milieu F a pour rapport $\frac{1}{2}$; cette même homothétie envoie alors C, par le même rapport, sur le milieu de [AC], c'est-à-dire sur E.

5. Déterminer la médiane de la série de valeurs : 11 ; 17 ; 8 ; 14 ; 3 ; 20 ; 5 ; 10 ; 12.

On range d'abord les 9 valeurs par ordre croissant : 3 ; 5 ; 8 ; 10 ; 11 ; 12 ; 14 ; 17 ; 20.

Comme il y a 9 valeurs (nombre impair), la médiane est la 5e valeur de cette liste triée, soit **11**.

Brevet 2023 — Nouvelle-Calédonie

1.a Une fonction f est représentée graphiquement par une courbe donnée en annexe. Cette fonction f est-elle une fonction affine ?

Une fonction affine est toujours représentée par une **droite**. Or la courbe donnée en annexe n'est pas une droite (c'est une courbe, une parabole) : **f n'est donc pas une fonction affine**.

1.b Le tableau de valeurs de f, lu sur le graphique, donne notamment $f(-3) = 0$ et $f(-2) = -3$. Compléter les valeurs de $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

En lisant les coordonnées des points de la courbe sur le graphique, on obtient $f(-1) = -4$, $f(0) = -3$, $f(1) = 0$ et $f(2) = 5$.

1.c Une formule saisie dans la cellule B2 d'un tableur, puis étendue en C2, permet de retrouver les valeurs de f à partir de celles de x en ligne 1. Parmi « =B1+3 », « =(B1+3)*(B1-1) » et « =SOMME(B1 :G1) », laquelle correspond à f ?

On teste la formule « =B1+3 » avec $x = -3$: elle donnerait $-3 + 3 = 0$, ce qui correspond à $f(-3) = 0$... mais avec $x = -2$ elle donnerait $-2 + 3 = 1$, alors que $f(-2) = -3$: cette formule ne convient pas.

On teste « =(B1+3)*(B1-1) » : avec $x = -3$, $(-3 + 3) \times (-3 - 1) = 0 \times (-4) = 0$, et avec $x = -2$, $(-2 + 3) \times (-2 - 1) = 1 \times (-3) = -3$: les deux valeurs correspondent.

La bonne formule est donc « **=(B1+3)*(B1-1)** ».

2.a On considère la fonction affine g définie par $g(x) = 2x + 1$. Calculer l'image de -2 par g .

$$g(-2) = 2 \times (-2) + 1 = -4 + 1 = \mathbf{-3}.$$

2.b Calculer $g(3)$.

$$g(3) = 2 \times 3 + 1 = 6 + 1 = \mathbf{7}.$$

2.c Déterminer l'antécédent de 2 par la fonction g .

On cherche x tel que $g(x) = 2$, c'est-à-dire $2x + 1 = 2$.

$$\text{D'où } 2x = 1, \text{ soit } x = \frac{1}{2}.$$

2.d Tracer, sur le graphique de l'annexe, la représentation graphique de la fonction g .

La fonction g étant affine, sa représentation est une droite : il suffit de placer deux de ses points, par exemple $(0 ; 1)$ et $(3 ; 7)$ (trouvés aux questions précédentes), puis de tracer la droite qui les relie.

3.a On admet que $f(x) = (x + 3)(x - 1)$. Développer et réduire cette expression.

$$\text{En développant : } (x + 3)(x - 1) = x \times x - x \times 1 + 3 \times x - 3 \times 1 = x^2 - x + 3x - 3 = x^2 + 2x - 3.$$

3.b Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $f(x) = g(x)$?

$$\text{On résout l'équation } x^2 + 2x - 3 = 2x + 1.$$

$$\text{En simplifiant (les termes en } 2x \text{ s'annulent) : } x^2 - 3 = 1, \text{ soit } x^2 = 4.$$

$$\text{Cette équation équivaut à } x^2 - 4 = 0, \text{ soit } (x - 2)(x + 2) = 0 \text{ (identité remarquable).}$$

Un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul : $x - 2 = 0$ soit $x = 2$, ou $x + 2 = 0$ soit $x = -2$.

Les solutions sont donc $x = 2$ et $x = -2$.

Bac Terminale 2023 — Amérique du Nord (jour 1)

Partie A — 1. Une entreprise classe ses déchets en trois catégories : **69 %** sont minéraux non dangereux (M), **28 %** sont non minéraux non dangereux (N), le reste est dangereux (D). Par ailleurs, **73 %** des déchets M sont recyclables, **49 %** des déchets N le sont, et **35 %** des déchets dangereux le sont. On prélève un déchet au hasard : compléter l'arbre pondéré donnant les probabilités de M, N, D puis de R (recyclable) sachant chacun d'eux.

Les proportions de l'énoncé s'interprètent comme des probabilités, puisque le déchet est prélevé au hasard.

Comme M, N et D partagent les déchets restants, on a $P(D) = 1 - 0,69 - 0,28 = 0,03$.

L'arbre porte donc, sur la première branche : $P(M) = 0,69$, $P(N) = 0,28$, $P(D) = 0,03$.

Puis sur les branches secondaires : $P_M(R) = 0,73$ et $P_M(\bar{R}) = 0,27$; $P_N(R) = 0,49$ et $P_N(\bar{R}) = 0,51$; $P_D(R) = 0,35$ et $P_D(\bar{R}) = 0,65$.

Partie A — 2. Justifier que la probabilité qu'un déchet soit à la fois dangereux et recyclable vaut 0,0105.

L'évènement « le déchet est dangereux et recyclable » est $D \cap R$, donc $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,03 \times 0,35 = \mathbf{0,0105}$.

Partie A — 3. Calculer $P(M \cap \bar{R})$ et interpréter le résultat.

$$P(M \cap \bar{R}) = P(M) \times P_M(\bar{R}) = 0,69 \times 0,27 = \mathbf{0,1863}.$$

Cela signifie que 18,63 % de l'ensemble des déchets produits par l'entreprise sont à la fois minéraux et non recyclables.

Partie A — 4. Démontrer que $P(R) = 0,6514$.

Les évènements M, N et D forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(M \cap R) + P(N \cap R) + P(D \cap R) = 0,69 \times 0,73 + 0,28 \times 0,49 + 0,03 \times 0,35.$$

$$P(R) = 0,5037 + 0,1372 + 0,0105 = \mathbf{0,6514}, \text{ ce qui est bien la valeur annoncée.}$$

Partie A — 5. Sachant que le déchet prélevé est recyclable, déterminer la probabilité qu'il soit non minéral et non dangereux (arrondie au dix-millième).

$$P_R(N) = \frac{P(N \cap R)}{P(R)} = \frac{0,28 \times 0,49}{0,6514} = \frac{0,1372}{0,6514} \approx \mathbf{0,2106}.$$

Partie B — 1.a On prélève avec remise un échantillon de 20 déchets ; X compte le nombre de déchets recyclables (on rappelle $P(R) = 0,6514$). Préciser la loi suivie par X et ses paramètres.

Le tirage avec remise correspond à la répétition de 20 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « le déchet est recyclable » de probabilité $p = 0,6514$: X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0,6514)$.

Partie B — 1.b Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables (arrondie au dix-millième).

$$P(X = 14) = \binom{20}{14} \times 0,6514^{14} \times 0,3486^6 \approx \mathbf{0,1723}.$$

Partie B — 2.a On prélève désormais n déchets (n entier naturel non nul). Exprimer en fonction de n la probabilité p_n qu'aucun déchet de l'échantillon ne soit recyclable.

En notant X_n le nombre de déchets recyclables parmi les n prélevés, X_n suit la loi $\mathcal{B}(n ; 0,6514)$, donc $p_n = P(X_n = 0) = \binom{n}{0} \times 0,6514^0 \times 0,3486^n = 0,3486^n$.

Partie B — 2.b Déterminer à partir de quel entier naturel n la probabilité qu'au moins un déchet de l'échantillon soit recyclable dépasse ou égale 0,9999.

L'évènement « au moins un déchet est recyclable » est le contraire de celui de probabilité p_n , donc on doit résoudre $1 - p_n \geq 0,9999$, c'est-à-dire $p_n \leq 0,0001$.

$0,3486^n \leq 0,0001 \iff n \ln(0,3486) \leq \ln(0,0001)$, et comme $\ln(0,3486) < 0$, l'inégalité s'inverse en divisant : $n \geq \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,3486)}$.

Or $\frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,3486)} \approx 8,74$, donc, comme n est un entier, c'est à partir de $n = 9$ que la probabilité qu'au moins un déchet soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

Bac Terminale 2023 — Asie (jour 2)

1. On considère la liste L des termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 7 et de raison 3, du type $L = [7, 10, \dots, 2023]$. Déterminer le nombre de termes de cette liste.

Le terme de rang n (en indexant à partir de 1) de cette suite arithmétique s'écrit $7 + 3(n - 1)$. On cherche n tel que $7 + 3(n - 1) = 2023$.

$$3(n - 1) = 2016 \iff n - 1 = 672 \iff n = 673.$$

Donc, la réponse est **673 termes**.

2. On choisit au hasard un nombre de cette liste. Déterminer la probabilité de tirer un nombre pair.

Un terme de la liste s'écrit $7 + 3(n - 1) = 3n + 4$, pour n entier de 1 à 673. Ce nombre est pair si et seulement si $3n + 4$ est pair, c'est-à-dire si et seulement si $3n$ est pair, donc si et seulement si n est pair (3 étant impair).

Parmi les entiers n de 1 à 673 (673 valeurs), les entiers pairs sont 2, 4, ..., 672, soit 336 valeurs.

Donc, la réponse est $P(\text{nombre pair}) = \frac{336}{673}$.

3. On note A l'évènement « obtenir un multiple de 4 » et B l'évènement « obtenir un nombre dont le chiffre des unités est 6 », sachant que $P(A) = \frac{168}{673}$ et $P(A \cap B) = \frac{34}{673}$ (valeurs obtenues par dénombrement direct dans la liste). Donner la probabilité d'obtenir un multiple de 4 se terminant par 6.

Un nombre qui est à la fois un multiple de 4 et qui se termine par 6 est exactement un élément de $A \cap B$. Donc, la réponse est $P(A \cap B) = \frac{34}{673}$ (donnée directement par l'énoncé, qui correspond bien à un dénombrement des multiples de 4 de la liste se terminant par 6).

4. Sachant de plus que $P(\bar{A} \cap B) = \frac{505}{673} \times \frac{33}{505}$, calculer $P_B(A)$.

D'abord $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{34}{673} + \frac{505}{673} \times \frac{33}{505} = \frac{34}{673} + \frac{33}{673} = \frac{67}{673}$ (le facteur $\frac{505}{673}$ se simplifie avec le 505 du numérateur).

Par définition de la probabilité conditionnelle : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{34}{673}}{\frac{67}{673}} = \frac{34}{67}$.

Donc, la réponse est $P_B(A) = \frac{34}{67}$.

5. On choisit successivement et au hasard 10 nombres de la liste (un même nombre pouvant être choisi plusieurs fois). Déterminer la probabilité qu'aucun des 10 nombres tirés ne soit un multiple de 4.

La probabilité de ne pas tirer un multiple de 4 en un seul tirage vaut $P(\bar{A}) = 1 - \frac{168}{673} = \frac{505}{673}$.

Les 10 tirages sont indépendants et identiques (tirage avec remise) : la probabilité qu'aucun des 10 ne soit un multiple de 4 est donc $\left(\frac{505}{673}\right)^{10}$.

Donc, la réponse est $P \approx 0,057$ (au millième).

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1 + 2^n}{3 + 5^n}$. Quel est son comportement : diverge vers $+\infty$, converge vers $\frac{2}{5}$, converge vers 0, ou converge vers $\frac{1}{3}$?

En factorisant numérateur et dénominateur par 5^n : $u_n = \frac{5^n \left(\frac{1}{5^n} + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{5^n \left(\frac{3}{5^n} + 1\right)} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{3}{5^n}}$.

Les suites géométriques de raisons $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{5}$, toutes deux strictement comprises entre -1 et 1 , convergent vers 0 : par limite de somme puis de quotient, u_n converge vers $\frac{0+0}{1+0} = 0$.

Réponse : la suite converge vers 0.

2. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$. Quelle est l'expression de $f'(x)$?

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$f'(x) = 2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x = x(2 \ln(x) + 1).$$

Réponse : $f'(x) = x(2 \ln(x) + 1)$.

3. Une fonction h , continue sur $\mathbb{R}$, admet le tableau de variations suivant : h décroît de $+\infty$ (en $-\infty$) jusqu'à $-\infty$... en réalité h croît de $-\infty$ vers $+\infty$, en s'annulant en $x = 1$. On note H la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Que peut-on affirmer : H positive sur $] -\infty ; 0]$, H croissante sur $] -\infty ; 1]$, H négative sur $] -\infty ; 1]$, ou H croissante sur $\mathbb{R}$?

h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 1, donc $h(x) < 0$ pour tout $x < 1$.

H étant une primitive de h , on a $H' = h$: ainsi $H'(x) < 0$ sur $] -\infty ; 1[$, donc H est strictement décroissante sur cet intervalle.

Pour tout $x \leq 0$, x et 0 appartiennent à $] -\infty ; 1[$ où H décroît, donc $x \leq 0 \implies H(x) \geq H(0)$.

Or $H(0) = 0$ par définition de H , donc $H(x) \geq 0$ sur $] -\infty ; 0]$.

Réponse : H est positive sur $] -\infty ; 0]$.

4. Soit $a < b$ deux réels et f une fonction définie, continue et strictement croissante sur $[a ; b]$, qui s'annule en un réel α . Parmi quatre fonctions Python proposées (méthode de dichotomie), laquelle donne bien une valeur approchée de α à 0,001 près ?

Le programme correct doit recalculer le milieu $m = \frac{a+b}{2}$ à chaque tour de boucle (et non une seule fois avant la boucle), avec un test d'arrêt \og tant que l'écart dépasse 0,001 \fg correctement écrit.

Comme f est strictement croissante sur $[a ; b]$ et s'annule en α , on a $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Si $f(m) < 0$, alors α se trouve entre m et b : il faut donc remplacer a par m (et garder b) pour l'itération suivante ; sinon, on remplace b par m .

Seule la version qui recalcule m à l'intérieur de la boucle, avec la condition 'while abs(b-a) >= 0.001', et l'affectation 'a = m' quand $f(m) < 0$, respecte ce principe.

Réponse : le programme qui recalcule m dans la boucle et affecte $a = m$ lorsque $f(m) < 0$.

5. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont 7 bleues et 3 vertes. On effectue trois tirages successifs avec remise. Quelle expression donne la probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes ?

Chaque tirage est une épreuve à deux issues (\og verte \fg ou pas), de probabilité de succès $p = \frac{3}{10}$, répétée $n = 3$ fois de façon identique et indépendante (tirages avec remise).

En notant X le nombre de boules vertes obtenues, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3; \frac{3}{10}\right)$.

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^1 = \binom{3}{2} \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{3}{10}\right)^2.$$

Réponse : $\binom{3}{2} \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{3}{10}\right)^2$.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

Partie A — 1. Une entreprise loue des trottinettes électriques et contrôle leur état chaque lundi. On admet que si une trottinette est en bon état un lundi donné, la probabilité qu'elle le soit encore le lundi suivant est 0,9 ; si elle est en mauvais état, la probabilité qu'elle passe en bon état la semaine suivante est 0,4. On note B_n l'événement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et $p_n = P(B_n)$, avec $p_0 = 1$. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.

Comme la trottinette est en bon état à l'instant 0 ($p_0 = 1$), on a directement $p_1 = P_{B_0}(B_1) = 0,9$.

En construisant l'arbre pondéré sur les deux premières semaines (issues B_1 ou $\overline{B_1}$, puis B_2 ou $\overline{B_2}$ à chaque fois), la formule des probabilités totales donne : $p_2 = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(B_2) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = 0,81 + 0,04 = 0,85$.

On obtient bien $p_1 = 0,9$ et $p_2 = 0,85$.

Partie A — 2. Reproduire et compléter l'arbre pondéré traduisant le passage de la semaine n à la semaine $n + 1$.

L'arbre a pour première branche B_n avec probabilité p_n (puis B_{n+1} avec probabilité 0,9 et $\overline{B_{n+1}}$ avec probabilité 0,1), et pour seconde branche $\overline{B_n}$ avec probabilité $1 - p_n$ (puis B_{n+1} avec probabilité 0,4 et $\overline{B_{n+1}}$ avec probabilité 0,6).

Partie A — 3. En déduire que, pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

Les événements B_n et $\overline{B_n}$ forment une partition de l'univers, donc la formule des probabilités totales donne : $p_{n+1} = P(B_n) \times 0,9 + P(\overline{B_n}) \times 0,4 = 0,9p_n + 0,4(1 - p_n) = 0,9p_n + 0,4 - 0,4p_n$.

Donc, la réponse est $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

Partie A — 4.a Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,8$.

Initialisation : $p_0 = 1 \geq 0,8$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que pour un entier naturel n donné, $p_n \geq 0,8$. Alors, en multipliant par $0,5 > 0$: $0,5p_n \geq 0,4$, puis en ajoutant $0,4$: $0,5p_n + 0,4 \geq 0,8$, c'est-à-dire $p_{n+1} \geq 0,8$. La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : par principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,8$.

Partie A — 4.b Quelle communication l'entreprise peut-elle envisager à partir de ce résultat ?

En interprétant p_n comme la proportion de trottinettes en bon état, l'entreprise peut communiquer sur le fait qu'au moins 80 % de son parc reste en permanence en bon état, quelle que soit la semaine considérée.

Partie A — 5.a On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = p_n - 0,8$. Montrer que (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = (0,5p_n + 0,4) - 0,8 = 0,5p_n - 0,4 = 0,5(p_n - 0,8) = 0,5u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0,5$, de premier terme $u_0 = p_0 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$.

Partie A — 5.b En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n .

D'après la forme explicite d'une suite géométrique : $u_n = u_0 \times q^n = 0,2 \times 0,5^n$ pour tout entier naturel n . Comme $p_n = u_n + 0,8$, on obtient $p_n = 0,2 \times 0,5^n + 0,8$.

Partie A — 5.c En déduire la limite de la suite (p_n) .

La raison $0,5$ est strictement comprise entre -1 et 1 , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0 + 0,8 = 0,8$.

Partie B — 1. On modélise désormais l'état des trottinettes du parc par une probabilité de bon état égale à $0,8$, indépendamment d'une trottinette à l'autre. On note X le nombre de trottinettes en bon état dans un lot de 15 , ce prélèvement pouvant être assimilé à un tirage avec remise. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

On répète 15 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve à deux issues (« la trottinette est en bon état », de probabilité $0,8$) : X compte le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(15 ; 0,8)$.

Partie B — 2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes du lot soient toutes en bon état.

$$P(X = 15) = 0,8^{15} \approx \mathbf{0,0352} \text{ (arrondi au dix-millième).}$$

Partie B — 3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes du lot soient en bon état.

$$\text{À la calculatrice, } P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx \mathbf{0,9389} \text{ (arrondi au dix-millième).}$$

Partie B — 4. On admet que $E(X) = 12$. Interpréter ce résultat.

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, on a $E(X) = np = 15 \times 0,8 = 12$. Cela signifie qu'en moyenne, sur un grand nombre de lots de 15 trottinettes prélevées dans le parc, 12 d'entre elles sont en bon état.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. On pose $f(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$. Parmi $F(x) = \frac{x^2}{2}e^x$, $F(x) = (x-1)e^x$, $F(x) = (x+1)e^x$ et $F(x) = \frac{2}{x}e^{x^2}$, laquelle est une primitive de f sur $\mathbb{R}$?

Testons $F(x) = (x-1)e^x$, dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, avec $u(x) = x-1$ et $v(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.

$$F' = u'v + uv' \text{ donc } F'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x = f(x) \text{ pour tout réel } x.$$

Donc, la réponse est $F(x) = (x-1)e^x$.

2. La courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ admet un maximum en $x = 3$ et un unique point d'inflexion d'abscisse 5. Que peut-on affirmer parmi : f et f' de même signe sur $]0; 5[$; f et f' de même signe sur $]5; +\infty[$; f' et f'' de même signe sur $]0; 5[$; f et f'' de même signe sur $]5; +\infty[$?

Par lecture graphique de $\mathcal{C}$, $f(x) < 0$ sur $]0; 1[$ et $f(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$.

Le maximum étant atteint en $x = 3$, $f'(x) > 0$ sur $]0; 3[$ et $f'(x) < 0$ sur $]3; +\infty[$.

Le seul point d'inflexion étant d'abscisse 5, et la courbe étant concave puis convexe, $f''(x) < 0$ sur $]0; 5[$ et $f''(x) > 0$ sur $]5; +\infty[$.

Sur $]5; +\infty[$, $f(x) > 0$ et $f''(x) > 0$: ces deux fonctions sont donc de même signe sur cet intervalle.

Donc, la réponse est « f et f'' sont de même signe sur $]5; +\infty[$ ».

3. Soit g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = \frac{a}{b + e^{-t}}$, avec $g(0) = 2$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 3$. Déterminer a et b parmi les couples $(2 ; 3)$, $(4 ; \frac{4}{3})$, $(4 ; 1)$ et $(6 ; 2)$.

$$g(0) = \frac{a}{b + e^0} = \frac{a}{b + 1} = 2, \text{ donc } a = 2(b + 1) = 2b + 2.$$

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-t) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, on a par composition $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} (b + e^{-t}) = b$ et, par quotient, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \frac{a}{b}$.

Donc $\frac{a}{b} = 3$, soit $a = 3b$. En combinant avec $a = 2b + 2 : 3b = 2b + 2$, donc $b = 2$, puis $a = 3 \times 2 = 6$.

Donc, la réponse est $a = 6$ et $b = 2$.

4. Alice tire au hasard une urne parmi A (2 boules vertes, 2 rouges) et B (3 boules vertes, 1 rouge), puis une boule dans cette urne, et obtient une boule verte. Quelle est la probabilité qu'elle ait choisi l'urne B, parmi $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{8}$?

Notons A et B le choix de chaque urne, et V l'évènement « la boule tirée est verte ». On a $P(A) = \frac{1}{2}$, $P_A(V) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $P_B(V) = \frac{3}{4}$.

$$P(V \cap B) = P(B) \times P_B(V) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

Comme A et B forment une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne $P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

$$\text{On cherche } P_V(B) = \frac{P(V \cap B)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{8} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{5}.$$

Donc, la réponse est $\frac{3}{5}$.

5. On pose $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}$. Parmi quatre scripts Python (a, b, c, d) proposés pour calculer S , lequel convient ?

- Le script a réaffecte S à chaque tour de boucle sans cumuler les termes précédents : il renvoie seulement le dernier terme, pas la somme — écarté.
- Le script c initialise un compteur k mais teste la condition sur une variable S qui n'a pas été initialisée avant la boucle : il provoque une erreur — écarté.
- Le script d initialise k à 0 mais ne l'incrmente jamais dans la boucle : la condition ' $k < 100$ ' reste indéfiniment vraie, la boucle ne s'arrête jamais — écarté.
- Le script b initialise S à 0, puis cumule bien $S = S + 1/(k+1)$ pour k allant de 0 à 99 : c'est le seul qui calcule correctement S .

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Une chaîne de télévision hésite à programmer un jeu réunissant quatre candidats en deux phases : une phase de qualification où chaque candidat est qualifié avec une probabilité de 0,6 indépendamment des autres, puis une phase finale qui n'a lieu que si au moins deux candidats sont qualifiés, et dont la durée (en minutes) dépend du nombre de qualifiés selon le tableau : 0 qualifié $\rightarrow$ 0 min, 1 $\rightarrow$ 0 min, 2 $\rightarrow$ 5 min, 3 $\rightarrow$ 9 min, 4 $\rightarrow$ 11 min. Le jeu n'est retenu que si la phase finale a lieu dans au moins 80 % des cas ET si sa durée moyenne ne dépasse pas 6 minutes. Le jeu peut-il être retenu ?

Condition 1. Chaque candidat est qualifié ou non de façon indépendante avec la même probabilité 0,6 : en notant X le nombre de candidats qualifiés parmi les quatre, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0,6)$.

La phase finale a lieu dès que $X \geq 2$. À la calculatrice, $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0,0256 - 0,1536 \approx 0,821$.

Comme $0,821 \geq 0,8$, la condition 1 est vérifiée.

Condition 2. Notons T la variable aléatoire égale à la durée de la phase finale ; elle prend les valeurs 0, 5, 9 et 11.

$$\begin{aligned} P(T = 11) &= P(X = 4) = 0,6^4 \approx 0,1296; \quad P(T = 9) = P(X = 3) = \binom{4}{3} \times 0,6^3 \times 0,4 \approx 0,3456; \\ P(T = 5) &= P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,6^2 \times 0,4^2 \approx 0,3456; \quad P(T = 0) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx \\ &0,0256 + 0,1536 = 0,1792. \end{aligned}$$

L'espérance de T vaut $E(T) = 0 \times 0,1792 + 5 \times 0,3456 + 9 \times 0,3456 + 11 \times 0,1296 = 1,728 + 3,1104 + 1,4256 = 6,264$ minutes.

Comme $6,264 > 6$, la durée moyenne dépasse 6 minutes : la condition 2 n'est **pas** vérifiée.

Donc, la réponse est : la condition 1 est remplie mais pas la condition 2, donc **le jeu ne peut pas être retenu** en l'état.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 1)

Partie A — 1. Un télévendeur relance une personne au premier appel : la probabilité qu'elle ne décroche pas vaut 0,6, et si elle décroche, la probabilité qu'elle achète vaut 0,3. Si elle n'a pas décroché, on tente un second appel : la probabilité qu'elle ne décroche toujours pas vaut 0,3, et si elle décroche cette fois, la probabilité d'achat vaut 0,2. On note D_1 , D_2 et A les événements « décroche au 1er appel », « décroche au 2e appel » et « achète le produit ». Compléter l'arbre pondéré.

L'arbre comporte deux niveaux : sur la première branche, $P(D_1) = 0,4$ et $P(\overline{D_1}) = 0,6$, avec $P_{D_1}(A) = 0,3$ et $P_{D_1}(\overline{A}) = 0,7$; sur la seconde branche (issue de $\overline{D_1}$), $P_{\overline{D_1}}(D_2) = 0,7$ et $P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) =$

0,3, avec $P_{\overline{D_1} \cap D_2}(A) = 0,2$ et $P_{\overline{D_1} \cap D_2}(\overline{A}) = 0,8$.

Partie A — 2. En utilisant l'arbre, montrer que $P(A) = 0,204$.

D'après la formule des probabilités totales, l'achat se produit soit dès le premier appel, soit après le second : $P(A) = P(D_1 \cap A) + P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap A) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \times 0,2 = 0,12 + 0,084 = \mathbf{0,204}$.

Partie A — 3. Sachant que la personne a acheté le produit, quelle est la probabilité qu'elle ait décroché dès le premier appel ?

Il s'agit de calculer $P_A(D_1) = \frac{P(D_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{0,4 \times 0,3}{0,204} = \frac{0,12}{0,204} \approx \mathbf{0,588}$.

Partie B — 1.a On prélève un échantillon aléatoire de 30 personnes ; X compte le nombre d'entre elles qui achètent le produit (on admet l'indépendance des situations). Donner, sans justification, la loi suivie par X et ses paramètres.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,204$.

Partie B — 1.b Déterminer, au millième près, la probabilité que 6 personnes exactement de l'échantillon achètent le produit.

$$P(X = 6) = \binom{30}{6} \times 0,204^6 \times (1 - 0,204)^{30-6} \approx \mathbf{0,179}.$$

Partie B — 1.c Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

$E(X) = np = 30 \times 0,204 = \mathbf{6,12}$. Cela signifie que, sur un grand nombre d'échantillons de 30 personnes contactées, le nombre d'acheteurs est en moyenne de 6,12 par échantillon.

Partie B — 2. Pour un échantillon de n personnes, déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins une personne achète le produit soit supérieure ou égale à 0,99.

Notons toujours X le nombre d'acheteurs parmi les n personnes, de loi binomiale de paramètres n et $p = 0,204$. On veut le plus petit n tel que $P(X \geq 1) \geq 0,99$, c'est-à-dire $1 - P(X = 0) \geq 0,99$, soit $P(X = 0) \leq 0,01$.

Or $P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,204^0 \times (1 - 0,204)^n = 0,796^n$. L'inéquation devient $0,796^n \leq 0,01$.

En passant au logarithme népérien (croissant) : $n \ln(0,796) \leq \ln(0,01)$, puis, comme $\ln(0,796) < 0$, on divise en changeant le sens de l'inégalité : $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)} \approx 20,18$.

Le plus petit entier convenable est donc $n = 21$ (on vérifie que $n = 20$ donne $P(X \geq 1) \approx 0,9896 < 0,99$, tandis que $n = 21$ donne $P(X \geq 1) \approx 0,9917 \geq 0,99$).

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 2)

Partie A — 1. Un vendeur de matelas propose deux modèles : RESSORTS et MOUSSE, chaque client n'achetant qu'un seul matelas. On sait que 20 % des clients choisissent un matelas RESSORTS, que 90 % d'entre eux sont satisfaits, et que 82 % de l'ensemble des clients sont satisfaits. On note R l'évènement « le client a acheté un matelas RESSORTS » et S « le client est satisfait ». Compléter l'arbre pondéré décrivant la situation.

L'arbre comporte deux branches initiales $P(R) = 0,2$ et $P(\overline{R}) = 0,8$, puis sur la branche R : $P_R(S) = 0,9$ et $P_R(\overline{S}) = 0,1$; sur la branche $\overline{R}$: $P_{\overline{R}}(S) = x$ et $P_{\overline{R}}(\overline{S}) = 1 - x$, où x désigne la probabilité d'être satisfait sachant que le matelas n'est pas de type RESSORTS.

Partie A — 2. Montrer que $x = 0,8$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée à l'évènement S : $P(S) = P(R \cap S) + P(\overline{R} \cap S)$.

Or $P(R \cap S) = P(R) \times P_R(S) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$ et $P(\overline{R} \cap S) = P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(S) = 0,8x$.

Comme $P(S) = 0,82$, on obtient l'équation $0,18 + 0,8x = 0,82$, soit $0,8x = 0,64$, d'où $x = 0,8$.

Partie A — 3. Un client s'avère satisfait de son achat. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS (résultat arrondi au centième) ?

Il s'agit de calculer $P_S(R) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{0,18}{0,82} = \frac{9}{41} \approx 0,22$.

Partie B — 1.a On interroge 5 clients au hasard et X compte le nombre de clients satisfaits parmi eux. On admet que X suit une loi binomiale : donner ses paramètres.

Chaque client interrogé est soumis à une épreuve à deux issues (satisfait ou non, avec probabilité 0,82 de succès), les 5 tirages étant indépendants : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,82$.

Partie B — 1.b Déterminer la probabilité qu'au maximum trois des cinq clients soient satisfaits (résultat arrondi au millièm).

À la calculatrice : $P(X \leq 3) \approx 0,222$.

Partie B — 2.a Soit n un entier naturel non nul. On interroge maintenant n clients, ce choix étant assimilable à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits. Montrer que $p_n = 0,82^n$.

Chaque client est satisfait de façon indépendante avec la probabilité 0,82. La probabilité que les n clients le soient tous est donc le produit de n facteurs égaux à 0,82, c'est-à-dire $p_n = 0,82^n$.

Partie B — 2.b Déterminer les entiers naturels n tels que $p_n < 0,01$, puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

On résout dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0,82^n < 0,01$. En passant au logarithme népérien (croissant) : $n \ln(0,82) < \ln(0,01)$.

Comme $\ln(0,82) < 0$, l'inégalité change de sens en divisant : $n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,82)} \approx 23,2$.

Le plus petit entier convenable est donc $n = 24$: dès que l'on interroge au moins 24 clients, la probabilité qu'ils soient tous satisfaits devient inférieure à 1 %.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 1)

1. Un technicien contrôle des machines identiques. On sait que 20 % des machines sont sous garantie (événement G), que 0,2 % sont à la fois défectueuses et sous garantie, et que 8,2 % sont défectueuses (événement D). Quelle est la probabilité $p_G(D)$ que la machine soit défectueuse sachant qu'elle est sous garantie ?

On a $p(G) = 0,2$ et $p(G \cap D) = 0,002$, donc $p_G(D) = \frac{p(G \cap D)}{p(G)} = \frac{0,002}{0,2} = 0,01$. Donc, la réponse est **b. 0,01**.

2. Quelle est la probabilité $p(\overline{G} \cap D)$ que la machine soit défectueuse et non sous garantie ?

D'après la formule des probabilités totales appliquée à D : $p(D) = p(G \cap D) + p(\overline{G} \cap D)$, donc $p(\overline{G} \cap D) = p(D) - p(G \cap D) = 0,082 - 0,002 = 0,08$. Donc, la réponse est **b. 0,08**.

3. Sachant que la machine est défectueuse, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'elle soit sous garantie ?

On cherche $p_D(G) = \frac{p(G \cap D)}{p(D)} = \frac{0,002}{0,082} \approx 0,0244$. Donc, la réponse est **b. 0,024**.

4. On choisit au hasard et de façon indépendante $n = 50$ machines ; X compte le nombre de machines défectueuses parmi elles et suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,082$. Quelle est la valeur, arrondie au millièmes, de $p(X > 2)$?

À la calculatrice, $p(X \leq 2) \approx 0,2114$, donc $p(X > 2) = 1 - p(X \leq 2) \approx 1 - 0,2114 \approx 0,789$. Donc, la réponse est **b. 0,789**.

5. Pour un lot de taille n , on cherche la plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité que toutes les machines fonctionnent correctement reste supérieure à 0,4.

Toutes les machines fonctionnent correctement lorsque $X = 0$, avec $p(X = 0) = (1 - 0,082)^n = 0,918^n$ (aucune machine défectueuse parmi les n).

On résout $0,918^n > 0,4$. Par croissance de la fonction $\ln : n \ln(0,918) > \ln(0,4)$, et comme $\ln(0,918) < 0$, cela équivaut à $n < \frac{\ln(0,4)}{\ln(0,918)}$.

Or $\frac{\ln(0,4)}{\ln(0,918)} \approx 10,71$, donc le plus grand entier n vérifiant l'inégalité est $n = 10$. Donc, la réponse est **c. 10**.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 2)

1. Dans un jeu vidéo en ligne, chaque joueur choisit un monde A ou un monde B avant de jouer une partie. On sait que $P(A) = \frac{2}{5}$, que la probabilité de gagner sachant que le joueur a choisi le monde A est $P_A(G) = \frac{7}{10}$, et que la probabilité de gagner la partie (tous mondes confondus) est $P(G) = \frac{12}{25}$. Quelle est la probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie ?

$P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$. Donc, la réponse est **c**.

2. Quelle est la probabilité $P_B(G)$ de gagner sachant que le joueur a choisi le monde B ?

Les événements A et B étant complémentaires, $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

D'après la formule des probabilités totales, $P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G)$, donc $P(B \cap G) = P(G) - P(A \cap G) = \frac{12}{25} - \frac{7}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

Donc $P_B(G) = \frac{P(B \cap G)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$. Donc, la réponse est **b**.

3. Un joueur enchaîne 10 parties, assimilées à des tirages indépendants avec remise, avec une probabilité de gain de $\frac{12}{25}$ à chaque partie. Quelle est la probabilité, arrondie au millièm, qu'il gagne exactement 6 parties ?

Le nombre X de parties gagnées sur les 10 suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{12}{25}$.

$P(X = 6) = \binom{10}{6} \times \left(\frac{12}{25}\right)^6 \times \left(\frac{13}{25}\right)^4 \approx 0,188$ (calculatrice). Donc, la réponse est **c**.

4. Pour un entier naturel n , la probabilité arrondie au millièème que le joueur gagne au plus n parties vaut 0,207. Quelle est la valeur de n ?

En testant les valeurs à la calculatrice avec la loi de X ci-dessus, on trouve $P(X \leq 3) \approx 0,207$. Donc, la réponse est **b** ($n = 3$).

5. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les 10 ?

L'évènement contraire de « gagner au moins une partie » est « ne gagner aucune partie », c'est-à-dire $X = 0$.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \left(\frac{12}{25}\right)^0 \left(\frac{13}{25}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$. Donc, la réponse est **d**.

Bac Terminale 2023 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

1. Un club de 200 adhérents (filles ou garçons) pratique l'aviron ou le basket, selon le tableau : filles-aviron 25, filles-basket 80 (105 filles), garçons-aviron 50, garçons-basket 45 (95 garçons), total aviron 75, total basket 125. On choisit un adhérent au hasard ; F : « c'est une fille », A : « il/elle pratique l'aviron ». La probabilité de F sachant A vaut : a. $\frac{25}{100}$; b. $\frac{25}{75}$; c. $\frac{25}{105}$; d. $\frac{75}{105}$.

Parmi les 75 adhérents pratiquant l'aviron, 25 sont des filles, donc $P_A(F) = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}$.

Donc, la réponse est : **réponse b**.

2. Avec les mêmes données, la probabilité de l'évènement $A \cup F$ vaut : a. $\frac{9}{10}$; b. $\frac{1}{8}$; c. $\frac{31}{40}$; d. $\frac{5}{36}$.

Les adhérents qui pratiquent l'aviron ou qui sont des filles sont : les 75 pratiquant l'aviron, plus les filles au basket (80), soit $75 + 80 = 155$ adhérents sur 200.

$$P(A \cup F) = \frac{155}{200} = \frac{31}{40}.$$

Donc, la réponse est : **réponse c**.

3. Albert se rend au travail en bus ou en train. La probabilité que le bus tombe en panne vaut b , celle que le train tombe en panne vaut t , ces pannes étant indépendantes. La probabilité p_1 que le bus ou le train soit en panne vaut : a. bt ; b. $1 - bt$; c. $b + t$; d. $b + t - bt$.

Notons B : « le bus est en panne » et T : « le train est en panne ». Par indépendance, $P(B \cap T) = bt$.

$$p_1 = P(B \cup T) = P(B) + P(T) - P(B \cap T) = b + t - bt.$$

Donc, la réponse est : **réponse d**.

4. Avec les mêmes notations, la probabilité p_2 qu'Albert puisse se rendre au travail vaut :
 a. bt ; b. $1 - bt$; c. $b + t$; d. $b + t - bt$.

Albert ne peut pas se rendre au travail seulement si le bus **et** le train sont en panne en même temps, événement $B \cap T$ de probabilité bt .

$$p_2 = P(\overline{B \cap T}) = 1 - P(B \cap T) = 1 - bt.$$

Donc, la réponse est : **réponse b.**

5. Une pièce donne **FACE** avec probabilité x ; on la lance n fois de façon indépendante. La probabilité p d'obtenir au moins une fois **FACE** vaut : a. x^n ; b. $(1 - x)^n$; c. $1 - x^n$; d. $1 - (1 - x)^n$.

L'événement contraire de « au moins un **FACE** » est « aucun **FACE** », c'est-à-dire n fois **PILE** de suite, de probabilité $(1 - x)^n$ par indépendance.

$$p = 1 - (1 - x)^n.$$

Donc, la réponse est : **réponse d.**

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 1)

Partie A — Dans une ville, les cyclistes se répartissent en deux groupes : ceux qui roulent pour leur travail et ceux qui roulent seulement pour les loisirs. Une enquête indique que 21 % des cyclistes ont moins de 35 ans ; parmi eux, 68 % roulent uniquement pour les loisirs (les autres pour le travail). Parmi les 35 ans ou plus, 20 % roulent pour le travail (les autres pour les loisirs). On note J : « la personne a moins de 35 ans » et T : « la personne roule pour le travail ». 1. Calculer la probabilité qu'un cycliste interrogé au hasard ait moins de 35 ans et roule pour le travail (un arbre pondéré peut aider).

L'énoncé donne $P(J) = 0,21$ donc $P(\bar{J}) = 0,79$, et comme 68 % des moins de 35 ans roulent seulement pour les loisirs, la proportion restante roule pour le travail : $P_J(T) = 1 - 0,68 = 0,32$.

L'arbre pondéré part de J et $\bar{J}$, puis se subdivise en T et $\bar{T}$ avec les probabilités conditionnelles $P_J(T) = 0,32$, $P_J(\bar{T}) = 0,68$, $P_{\bar{J}}(T) = 0,20$, $P_{\bar{J}}(\bar{T}) = 0,80$.

$$P(J \cap T) = P(J) \times P_J(T) = 0,21 \times 0,32 = \mathbf{0,0672}.$$

Partie A — 2. Calculer la valeur exacte de $P(T)$.

$$\text{On calcule de même } P(\bar{J} \cap T) = P(\bar{J}) \times P_{\bar{J}}(T) = 0,79 \times 0,20 = 0,158.$$

D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet $\{J, \bar{J}\}$: $P(T) = P(J \cap T) + P(\bar{J} \cap T) = 0,0672 + 0,158 = \mathbf{0,2252}$.

Partie A — 3. On interroge un cycliste qui roule pour le travail. Montrer que la probabilité qu'il ait moins de 35 ans vaut 0,30 à 10^{-2} près.

Il s'agit de la probabilité conditionnelle $P_T(J) = \frac{P(J \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0672}{0,2252} \approx 0,2984$. Donc, la réponse est $P_T(J) \approx 0,30$ au centième près.

Partie B — Parmi les cyclistes qui roulent pour le travail, on admet que 30 % ont moins de 35 ans. On interroge, en tirage aléatoire avec remise, un échantillon de 120 d'entre eux, et X compte le nombre de personnes de moins de 35 ans dans cet échantillon. 1. Donner la loi suivie par X et ses paramètres.

Les 120 tirages sont indépendants et identiques (tirage avec remise), chacun ayant deux issues (« moins de 35 ans » ou non) avec probabilité de succès 0,30 à chaque fois. Donc, la réponse est que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(120 ; 0,30)$.

Partie B — 2. Calculer la probabilité qu'au moins 50 des 120 personnes de l'échantillon aient moins de 35 ans (arrondir au millième).

À la calculatrice, $P(X \geq 50) = 1 - P(X \leq 49) \approx 1 - 0,9956 \approx 0,004$ (soit 0,0044 arrondi au dix-millième).

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 2)

Partie A — 1. Un athlète doit franchir une haie chaque jour d'entraînement. S'il réussit un jour donné, il réussit à nouveau le lendemain avec une probabilité de 90 % ; s'il échoue un jour donné, il échoue encore le lendemain avec une probabilité de 70 %. On note R_n l'événement « l'athlète franchit la haie à la n -ième séance », $p_n = P(R_n)$, et $p_0 = 0,6$. Reproduire l'arbre pondéré à deux niveaux en complétant les probabilités manquantes.

Sur la branche partant de R_n (de probabilité p_n), les probabilités conditionnelles sont 0,9 vers R_{n+1} et 0,1 vers $\overline{R_{n+1}}$. Sur la branche partant de $\overline{R_n}$ (de probabilité $1 - p_n$), elles sont 0,3 vers R_{n+1} et 0,7 vers $\overline{R_{n+1}}$.

Partie A — 2. En s'appuyant sur l'arbre, justifier que pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3$.

Les événements R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers, donc, par la formule des probabilités totales : $p_{n+1} = P(R_n \cap R_{n+1}) + P(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) = p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,3$.

En développant : $p_{n+1} = 0,9p_n + 0,3 - 0,3p_n = 0,6p_n + 0,3$. Donc, la réponse est $p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3$.

Partie A — 3.a On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = p_n - 0,75$. Montrer que (u_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75 = (0,6p_n + 0,3) - 0,75 = 0,6p_n - 0,45$.

Or $p_n = u_n + 0,75$, donc $u_{n+1} = 0,6(u_n + 0,75) - 0,45 = 0,6u_n + 0,45 - 0,45 = 0,6u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0,6$, de premier terme $u_0 = p_0 - 0,75 = 0,6 - 0,75 = -0,15$.

Partie A — 3.b En déduire que, pour tout entier naturel n , $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$.

Comme (u_n) est géométrique de premier terme $-0,15$ et de raison $0,6$, on a $u_n = -0,15 \times 0,6^n$ pour tout n . Comme $p_n = u_n + 0,75$, on obtient $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$. Donc, la réponse est $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$.

Partie A — 3.c En déduire que (p_n) converge et donner sa limite ℓ .

La raison $0,6$ vérifie $-1 < 0,6 < 1$, donc $0,6^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par somme de limites, $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$ tend vers $\ell = 0,75$.

Partie A — 3.d Interpréter la valeur de ℓ dans le contexte de l'exercice.

En assimilant la limite d'une probabilité à une proportion sur le long terme, cela signifie qu'après un grand nombre de séances, l'athlète franchit la haie dans environ 75 % des cas.

Partie B — 1. Après beaucoup d'entraînement, l'entraîneur considère que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de $0,75$, indépendamment des haies précédentes. On note X le nombre de haies franchies sur un 400 mètres haies comportant 10 haies. Préciser la loi suivie par X et ses paramètres.

On répète 10 fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues (« franchir » avec probabilité $0,75$, « ne pas franchir » avec probabilité $0,25$) : X compte le nombre de succès. X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,75)$.

Partie B — 2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,75^{10} \times 0,25^0 = 0,75^{10} \approx \mathbf{0,056}.$$

Partie B — 3. Calculer $P(X \geq 9)$ à 10^{-3} près.

$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$. À la calculatrice, $P(X = 9) = \binom{10}{9} \times 0,75^9 \times 0,25 \approx 0,188$, et $P(X = 10) \approx 0,056$, d'où $P(X \geq 9) \approx \mathbf{0,244}$.

Brevet 2022 — Nouvelle-Calédonie

1. Gabriel lance deux fois de suite un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4, et note le couple (résultat du premier lancer ; résultat du second lancer). Il a noté (3 ; 2). Quel numéro a-t-il obtenu au premier lancer, puis au second lancer ?

Par définition du couple noté, Gabriel a obtenu **3** au premier lancer, puis **2** au second lancer.

2. Quelles sont les 16 issues possibles de ce jeu ?

Il y a $4 \times 4 = 16$ issues possibles, en associant chacun des 4 résultats du premier lancer à chacun des 4 résultats du second lancer : (1 ; 1), (1 ; 2), (1 ; 3), (1 ; 4), (2 ; 1), (2 ; 2), (2 ; 3), (2 ; 4), (3 ; 1), (3 ; 2), (3 ; 3), (3 ; 4), (4 ; 1), (4 ; 2), (4 ; 3), (4 ; 4).

3. Que dire de l'événement A : « obtenir 1 en additionnant les deux numéros obtenus » ?

La plus petite somme possible est $1 + 1 = 2$ (obtenue avec l'issue (1 ; 1)) : il est donc **impossible** d'obtenir une somme de 1. **L'événement A est impossible.**

4. Donner les issues possibles qui réalisent l'événement C : « obtenir 5 en additionnant les deux numéros obtenus ».

Les couples dont la somme vaut 5 sont (1 ; 4), (2 ; 3), (3 ; 2) et (4 ; 1), soit 4 issues.

5. Quelle est la probabilité que l'événement C se réalise ?

Il y a 4 issues favorables sur les 16 issues possibles (équiprobables), donc $p(C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \mathbf{0,25}$.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 1)

Partie A — 1.a Chaque jour travaillé, Paul rejoint la gare à vélo avec probabilité $\frac{2}{3}$, sinon en voiture. À vélo, il rate son train avec probabilité $\frac{1}{50}$; en voiture, avec probabilité $\frac{1}{10}$. On note V l'évènement « Paul prend son vélo » et R l'évènement « Paul rate son train ». Représenter la situation par un arbre pondéré.

L'arbre part de la racine avec les branches V (probabilité $\frac{2}{3}$) et $\bar{V}$ (probabilité $\frac{1}{3}$) ; sous V , les branches R ($\frac{1}{50}$) et $\bar{R}$ ($\frac{49}{50}$) ; sous $\bar{V}$, les branches R ($\frac{1}{10}$) et $\bar{R}$ ($\frac{9}{10}$).

Partie A — 1.b Montrer que la probabilité que Paul rate son train vaut $\frac{7}{150}$.

D'après la formule des probabilités totales : $P(R) = P(V) \times P_V(R) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{150} + \frac{5}{150} = \frac{7}{150}$.

Partie A — 1.c Sachant que Paul a raté son train, déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo.

$$P_R(V) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{50}}{\frac{7}{150}} = \frac{\frac{2}{150}}{\frac{7}{150}} = \frac{2}{7}.$$

Partie A — 2.a Sur un mois, Paul se rend 20 fois à la gare selon les mêmes modalités, les choix des différents jours étant indépendants. X compte le nombre de jours où il prend son vélo. Déterminer la loi suivie par X et ses paramètres.

La répétition de 20 épreuves identiques et indépendantes à deux issues (vélo ou non, avec probabilité $\frac{2}{3}$ de prendre le vélo) est un schéma de Bernoulli répété : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{3}$, notée $X \sim \mathcal{B}\left(20 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 2.b Calculer la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur les 20 (arrondi au millième).

$$P(X = 10) = \binom{20}{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \approx \mathbf{0,054} \text{ (à la calculatrice).}$$

Partie A — 2.c Calculer la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur les 20 (arrondi au millième).

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx \mathbf{0,962} \text{ (à la calculatrice).}$$

Partie A — 2.d En moyenne, sur une période de 20 jours, combien de fois Paul prend-il son vélo pour rejoindre la gare (arrondi à l'entier) ?

L'espérance de X vaut $E(X) = np = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} \approx 13,33$. En moyenne, Paul prend donc son vélo environ **13 jours** sur 20.

Partie A — 3. Quand Paul se rend à la gare en voiture, le temps de trajet T (en minutes, arrondi à la minute) suit la loi donnée par le tableau : k de 10 à 18 minutes avec $P(T = k)$ valant respectivement 0,14 ; 0,13 ; 0,13 ; 0,12 ; 0,12 ; 0,11 ; 0,10 ; 0,08 ; 0,07. Déterminer l'espérance de T et l'interpréter.

$$E(T) = 10 \times 0,14 + 11 \times 0,13 + 12 \times 0,13 + 13 \times 0,12 + 14 \times 0,12 + 15 \times 0,11 + 16 \times 0,10 + 17 \times 0,08 + 18 \times 0,07 = 13,5.$$

Donc, sur un grand nombre de trajets en voiture, la durée moyenne du trajet est de **13,5 minutes**, soit 13 minutes et 30 secondes.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 2)

1. Une société de location de vélos dispose de deux points A et B ; chaque vélo change ou reste, avec les probabilités suivantes d'un matin sur l'autre : s'il est en A, il y reste avec probabilité 0,84 ; s'il est en B, il y reste avec probabilité 0,76. Le premier matin, la moitié des vélos est en A, l'autre moitié en B. Pour $n \geq 1$, A_n (resp. B_n) désigne l'évènement « le vélo est en A (resp. B) le n -ième matin », de probabilités a_n et b_n , avec $a_1 = b_1 = 0,5$. Représenter la situation par un arbre pondéré sur les deux premiers matins.

L'arbre part de A_1 (probabilité 0,5) et B_1 (probabilité 0,5) ; sous A_1 , les branches A_2 (0,84) et B_2 (0,16) ; sous B_1 , les branches A_2 (0,24) et B_2 (0,76).

2.a Calculer a_2 .

D'après la formule des probabilités totales : $a_2 = P(A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) = 0,5 \times 0,84 + 0,5 \times 0,24 = 0,42 + 0,12 = \mathbf{0,54}$.

2.b Sachant que le vélo se trouve en A le deuxième matin, calculer la probabilité (arrondie au millième) qu'il se soit trouvé en B le premier matin.

$$P_{A_2}(B_1) = \frac{P(B_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0,5 \times 0,24}{0,54} = \frac{0,12}{0,54} \approx \mathbf{0,222}.$$

3.a Représenter, pour un entier naturel non nul n , l'arbre pondéré modélisant la situation entre le n -ième et le $(n+1)$ -ième matin.

L'arbre part de A_n (probabilité a_n) et B_n (probabilité $1 - a_n$, car $a_n + b_n = 1$) ; sous A_n , les branches A_{n+1} (0,84) et B_{n+1} (0,16) ; sous B_n , les branches A_{n+1} (0,24) et B_{n+1} (0,76).

3.b Justifier que, pour tout entier naturel non nul n , $a_{n+1} = 0,6 a_n + 0,24$.

D'après la formule des probabilités totales : $a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) = 0,84 a_n + 0,24(1 - a_n)$.

En développant : $a_{n+1} = 0,84 a_n + 0,24 - 0,24 a_n = 0,6 a_n + 0,24$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

Initialisation : $a_1 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^0 = 0,6 - 0,1 = 0,5$, ce qui correspond bien à la valeur donnée. La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : supposons que, pour un entier $n \geq 1$ donné, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$. D'après la question 3.b : $a_{n+1} = 0,6 a_n + 0,24 = 0,6 (0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}) + 0,24 = 0,36 - 0,1 \times 0,6^n + 0,24 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel non nul n , $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

Comme $0,6 \in]-1 ; 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^{n-1} = 0$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,6$: au bout d'un grand nombre de jours, la probabilité qu'un vélo se trouve au point A se stabilise autour de **60 %**.

6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geq 0,599$, et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

$$a_n \geq 0,599 \iff 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} \geq 0,599 \iff -0,1 \times 0,6^{n-1} \geq -0,001 \iff 0,6^{n-1} \leq 0,01.$$

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$: $(n-1) \times \ln(0,6) \leq \ln(0,01)$. Comme $\ln(0,6) < 0$, l'inégalité change de sens en divisant : $n-1 \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \approx 10,02$.

Donc, le plus petit entier convenable est $n = 11$: c'est à partir du 11-ième matin que la probabilité qu'un vélo soit au point A dépasse 0,599.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 2)

1. Le réel $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ est égal à : a. $1 - \frac{1}{2}\ln(3)$; b. $\frac{1}{2}\ln(3)$; c. $3\ln(3) + \frac{1}{2}$; d. $-\frac{1}{2}\ln(3)$.

$$a = \ln(3^2) + \ln(\sqrt{3}) - \ln(3) - \ln(3^2) = 2\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(3) - 2\ln(3) = -\frac{1}{2}\ln(3).$$

Réponse d.

2. On considère l'équation (E) : $\ln(x) + \ln(x-10) = \ln(3) + \ln(7)$, d'inconnue réelle x . a. 3 est solution ; b. $5 - \sqrt{46}$ est solution ; c. (E) admet une unique solution réelle ; d. (E) admet deux solutions réelles.

Le domaine de définition impose $x > 0$ et $x > 10$, donc $x \in]10 ; +\infty[$.

Sur ce domaine, (E) $\iff \ln(x(x-10)) = \ln(21) \iff x(x-10) = 21 \iff x^2 - 10x - 21 = 0$, un trinôme de discriminant $\Delta = 100 + 84 = 184 = 4 \times 46$, donc $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{46}$.

Les racines sont $x_1 = 5 - \sqrt{46}$ et $x_2 = 5 + \sqrt{46}$. Comme $\sqrt{46} > 5$ (car $46 > 25$), $x_1 < 0$ n'appartient pas au domaine, tandis que $x_2 > 10$ appartient au domaine.

L'équation (E) admet donc une unique solution réelle, $5 + \sqrt{46}$. **Réponse c.**

3. Soit f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2(-1 + \ln(x))$. a. $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$; b. f est croissante sur $]0 ; +\infty[$; c. $f'(\sqrt{e})$ est différent de 0 ; d. la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}e$ est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, avec $f'(x) = 2x(-1 + \ln(x)) + x^2 \times \frac{1}{x} = -2x + 2x\ln(x) + x = x(2\ln(x) - 1)$.

$f'(x) = 0 \iff 2\ln(x) - 1 = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$: la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$ est donc horizontale, d'équation $y = f(\sqrt{e})$.

$$f(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^2(-1 + \ln(\sqrt{e})) = e\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e.$$

Donc, la tangente au point d'abscisse $\sqrt{e}$ a bien pour équation $y = -\frac{1}{2}e$. **Réponse d.**

4. Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons. La probabilité de tirer exactement 2 jetons jaunes, arrondie au millièm, est : a. 0,683 ; b. 0,346 ; c. 0,230 ; d. 0,165.

Les tirages étant successifs, indépendants et avec remise, la variable X comptant le nombre de jetons jaunes obtenus suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$.

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \approx \mathbf{0,346}. \text{ Réponse b.}$$

5. Dans les mêmes conditions (sac de 20 jetons jaunes, 30 bleus, 5 tirages avec remise), la probabilité de tirer au moins un jeton jaune, arrondie au millièm, est : a. 0,078 ; b. 0,259 ; c. 0,337 ; d. 0,922.

$$X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{2}{5}\right). P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^5 \approx \mathbf{0,922}.$$

Réponse d.

6. Toujours dans les mêmes conditions, si on répète l'expérience un très grand nombre de fois, le nombre moyen de jetons jaunes obtenus est égal à : a. 0,4 ; b. 1,2 ; c. 2 ; d. 2,5.

L'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ vaut $E(X) = np$. Ici, $E(X) = 5 \times \frac{2}{5} = 2$.

Réponse c.

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 1)

1.a Lors d'une kermesse, une roue comporte quatre cases blanches et huit cases rouges, et un sac contient cinq jetons numérotés de 1 à 5. On tourne la roue : si la case est blanche, on tire un seul jeton du sac ; si elle est rouge, on tire successivement et sans remise deux jetons. Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair. On note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R « la case obtenue est rouge » et G « le joueur gagne la partie ». Donner la valeur de $P_B(G)$.

Si la case est blanche, on tire un seul jeton parmi les 5 ; il y a 3 numéros impairs (1, 3, 5). Donc $P_B(G) = \frac{3}{5} = 0,6$.

1.b On admet que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à 0,3. Construire l'arbre de probabilités complet de l'expérience.

La roue comporte $4 + 8 = 12$ cases : $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et $P(R) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Sur la branche B , un seul jeton est tiré : $P_B(G) = 0,6$ donc $P_B(\overline{G}) = 0,4$.

Sur la branche R , deux jetons sont tirés successivement sans remise : $P_R(G) = 0,3$ (valeur admise) donc $P_R(\overline{G}) = 0,7$.

L'arbre pondéré comporte donc, à la racine, les branches B (poids $\frac{1}{3}$) et R (poids $\frac{2}{3}$), puis sur chacune les branches G et $\overline{G}$ avec les poids ci-dessus.

2.a Montrer que $P(G) = 0,4$.

D'après la formule des probabilités totales, $P(G) = P(B \cap G) + P(R \cap G) = P(B) \times P_B(G) + P(R) \times P_R(G) = \frac{1}{3} \times 0,6 + \frac{2}{3} \times 0,3 = 0,2 + 0,2 = 0,4$.

2.b Un joueur gagne la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?

On cherche $P_G(B) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$.

3. Les évènements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.

$$P(B) \times P(G) = \frac{1}{3} \times 0,4 = \frac{2}{15} \approx 0,133.$$

$$P(B \cap G) = \frac{1}{3} \times 0,6 = 0,2.$$

Comme $P(B) \times P(G) \neq P(B \cap G)$, les évènements B et G ne sont pas indépendants.

4.a Un même joueur fait dix parties indépendantes, les jetons étant remis dans le sac après chaque partie. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

On répète 10 fois, de façon identique et indépendante, l'épreuve de Bernoulli « gagner une partie » de probabilité de succès $P(G) = 0,4$. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,4)$.

4.b Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,4^3 \times 0,6^7 \approx 0,215.$$

4.c Calculer $P(X \geq 4)$ arrondie à 10^{-3} près, et interpréter ce résultat.

À la calculatrice, $P(X \leq 3) \approx 0,382$, donc $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0,618$.

Sur dix parties jouées, le joueur a donc plus de 6 chances sur 10 d'en gagner au moins quatre.

5.a Un joueur fait n parties (indépendantes) et on note p_n la probabilité de l'évènement « le joueur gagne au moins une partie ». Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$.

L'évènement contraire de « gagner au moins une partie sur n » est « ne gagner aucune partie », de probabilité $(1 - 0,4)^n = 0,6^n$ par indépendance des parties. Donc $p_n = 1 - 0,6^n$.

5.b Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99.

On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0,6^n \geq 0,99$, soit $0,6^n \leq 0,01$.

Comme $0 < 0,6 < 1$, la fonction logarithme népérien est strictement croissante, donc $0,6^n \leq 0,01 \iff n \ln(0,6) \leq \ln(0,01) \iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)}$ (l'inégalité change de sens car $\ln(0,6) < 0$).

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \approx 9,02$. Donc, la réponse est $n = 10$: il faut jouer au moins 10 parties pour gagner au moins une partie avec une probabilité d'au moins 99 %.

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 2)

Partie 1 — 1. Julien doit prendre l'avion et a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport. S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'arriver à temps ; sinon, il ne peut plus arriver à temps. On note B l'évènement « Julien réussit à prendre son bus », de probabilité $P(B) = 0,2$, et V l'évènement « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ». Donner la valeur de $P_B(V)$.

S'il réussit à prendre son bus, Julien est certain d'être à l'heure à l'aéroport pour son vol. Donc, la réponse est $P_B(V) = 1$.

Partie 1 — 2. S'il manque son bus, Julien prend une compagnie de voitures privées, avec une probabilité 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport. Représenter la situation par un arbre pondéré.

On représente un arbre à deux niveaux : le premier niveau donne les branches B (probabilité 0,2) et $\bar{B}$ (probabilité $1 - 0,2 = 0,8$).

Depuis B partent les branches V (probabilité 1, puisque $P_B(V) = 1$) et $\bar{V}$ (probabilité 0).

Depuis $\bar{B}$ partent les branches V (probabilité 0,5) et $\bar{V}$ (probabilité 0,5).

Partie 1 — 3. Montrer que $P(V) = 0,6$.

D'après la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'évènements $\{B, \bar{B}\}$:

$$P(V) = P(B \cap V) + P(\bar{B} \cap V) = P(B) \times P_B(V) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(V).$$

$$P(V) = 0,2 \times 1 + 0,8 \times 0,5 = 0,2 + 0,4 = 0,6.$$

Donc, la réponse est $P(V) = 0,6$.

Partie 1 — 4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ?

$$\text{On cherche } P_V(B) = \frac{P(V \cap B)}{P(V)} = \frac{P(B \cap V)}{P(V)} = \frac{0,2 \times 1}{0,6} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}.$$

Donc, la réponse est $P_V(B) = \frac{1}{3}$.

Partie 2 — 1. Une compagnie aérienne pratique le surbooking : chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement, indépendamment des autres. Pour un vol de 200 places où 206 billets ont été vendus, on note X la variable aléatoire comptant le nombre de passagers se présentant à l'embarquement. Justifier que X suit une loi binomiale, en précisant ses paramètres.

On répète 206 fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues : « le passager se présente » (probabilité $1 - 0,05 = 0,95$) ou « le passager ne se présente pas » (probabilité 0,05). X compte le nombre de succès.

Donc, la réponse est que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 206$ et $p = 0,95$.

Partie 2 — 2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?

L'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p vaut $n \times p$, donc $E(X) = 206 \times 0,95 = 195,7$.

Donc, la réponse est qu'en moyenne, environ 196 passagers se présentent à l'embarquement.

Partie 2 — 3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement, arrondie à 10^{-3} près.

$$P(X = 201) = \binom{206}{201} \times 0,95^{201} \times 0,05^5.$$

Donc, la réponse est $P(X = 201) \approx 0,031$ (à 10^{-3} près).

Partie 2 — 4. Calculer $P(X \leq 200)$, arrondi à 10^{-3} près, puis interpréter ce résultat.

La calculatrice donne $P(X \leq 200) \approx 0,948$ (à 10^{-3} près).

Donc, la réponse est qu'il y a environ 94,8 % de chances qu'au plus 200 passagers se présentent, c'est-à-dire que tous les passagers présents puissent embarquer : il est donc très probable que l'avion ne soit pas en surcapacité.

Partie 2 — 5.a Chaque billet coûte 250 €. Si plus de 200 passagers se présentent, la compagnie doit rembourser le billet et payer une pénalité de 600 € à chaque passager lésé. On note Y le nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ; sa loi de probabilité est donnée par $P(Y=0) = 0,94775$, $P(Y=1) = 0,03063$, $P(Y=2) = 0,01441$, $P(Y=3) = 0,00539$, $P(Y=4) = 0,00151$, $P(Y=5) = 0,00028$. Compléter la loi de probabilité en calculant $P(Y = 6)$.

Y ne peut prendre que les valeurs 0 à 6 (au maximum $206 - 200 = 6$ passagers surnuméraires), et la somme de toutes les probabilités d'une loi vaut 1.

$$P(Y = 6) = 1 - (P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) + P(Y=5)).$$

$$P(Y = 6) = 1 - (0,94775 + 0,03063 + 0,01441 + 0,00539 + 0,00151 + 0,00028) = 1 - 0,99997 = 0,00003.$$

Donc, la réponse est $P(Y = 6) = 0,00003$.

Partie 2 — 5.b Justifier que $C = 51\,500 - 850Y$, où C est le chiffre d'affaires de la compagnie sur ce vol.

La compagnie encaisse d'abord la vente des 206 billets, soit $206 \times 250 = 51\,500$ €.

Pour chacun des Y passagers ne pouvant pas embarquer, elle doit rembourser le billet (250 €) et verser une pénalité de 600 €, soit $250 + 600 = 850$ € par passager lésé, donc un total de $850Y$ € à déduire.

Donc, la réponse est $C = 51\,500 - 850Y$.

Partie 2 — 5.c Donner la loi de probabilité de C sous forme d'un tableau, puis calculer l'espérance de C à l'euro près.

D'après la relation $C = 51\,500 - 850Y$ et la loi de Y , on obtient les valeurs suivantes : $c_0 = 51\,500$, $c_1 = 50\,650$, $c_2 = 49\,800$, $c_3 = 48\,950$, $c_4 = 48\,100$, $c_5 = 47\,250$, $c_6 = 46\,400$ (chacune avec la même probabilité que la valeur y_i correspondante de Y).

Par linéarité de l'espérance, $E(C) = 51\,500 - 850 \times E(Y)$, ou directement $E(C) = \sum_i c_i \times P(Y=y_i)$.

$$E(C) \approx 51\,500 \times 0,94775 + 50\,650 \times 0,03063 + 49\,800 \times 0,01441 + 48\,950 \times 0,00539 + 48\,100 \times 0,00151 + 47\,250 \times 0,00028 + 46\,400 \times 0,00003 \approx 51\,429,25.$$

Donc, la réponse est $E(C) \approx 51\,429$ € (à l'euro près).

Partie 2 — 5.d Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

En vendant exactement 200 billets (sans risque de pénalité), la compagnie réalise un chiffre d'affaires de $200 \times 250 = 50\,000$ €.

En pratiquant le surbooking à 206 billets, elle peut espérer un chiffre d'affaires moyen de 51 429 € (question précédente), soit 1 429 € de plus.

Donc, la réponse est que le surbooking est en moyenne plus avantageux pour la compagnie que la vente de 200 billets seulement.

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 2)

1.a On étudie le développement d'une bactérie, qui a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et 0,7 de se diviser en deux bactéries filles, ces probabilités étant les mêmes à chaque génération. On note p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie, avec $p_0 = 0,3$ et $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$ pour tout entier naturel n . Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 , et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.

$$p_1 = 0,3 + 0,7 \times p_0^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,3^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,09 = 0,3 + 0,063 = 0,363.$$

$$p_2 = 0,3 + 0,7 \times p_1^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,363^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,131769 = 0,3 + 0,0922383 = 0,3922383.$$

Donc, la réponse est $p_1 = 0,363$ et $p_2 = 0,3922383$: p_1 est la probabilité d'obtenir au plus une descendance (c'est-à-dire de mourir sans descendance, ou de se diviser puis que les deux bactéries filles meurent sans descendance), et p_2 celle d'obtenir au plus deux descendances.

1.b Sachant que $p_{10} \approx 0,42802018$ (valeur fournie par une feuille de calcul), quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?

L'évènement « obtenir au moins 11 descendances » est l'évènement contraire de « obtenir au plus 10 descendances », de probabilité p_{10} .

La probabilité cherchée vaut donc $1 - p_{10} \approx 1 - 0,42802018 \approx 0,57198$.

Donc, la réponse est environ 0,572 (à 10^{-3} près).

1.c En observant que les valeurs successives de p_n (fournies par une feuille de calcul) augmentent progressivement de 0,3 vers une valeur proche de 0,4285, formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n) .

Au vu de ces valeurs, la suite (p_n) semble croissante, et semble converger vers une limite proche de 0,4285 (les derniers termes calculés se rapprochant de plus en plus les uns des autres autour de cette valeur).

2.a Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n , $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

Initialisation : on a $p_0 = 0,3$ et $p_1 = 0,363$ (question 1.a), donc $0 \leq 0,3 \leq 0,363 \leq 0,5$, c'est-à-dire $0 \leq p_0 \leq p_1 \leq 0,5$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

La fonction carré étant croissante sur $[0 ; +\infty[$, on en déduit $0 \leq p_n^2 \leq p_{n+1}^2 \leq 0,5^2$, puis en multipliant chaque membre par $0,7 > 0$: $0 \leq 0,7p_n^2 \leq 0,7p_{n+1}^2 \leq 0,7 \times 0,25$.

En ajoutant $0,3$ à chaque membre : $0,3 \leq 0,3 + 0,7p_n^2 \leq 0,3 + 0,7p_{n+1}^2 \leq 0,3 + 0,175$, c'est-à-dire $0,3 \leq p_{n+1} \leq p_{n+2} \leq 0,475$.

Comme $0 \leq 0,3$ et $0,475 \leq 0,5$, on obtient $0 \leq p_{n+1} \leq p_{n+2} \leq 0,5$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

2.b Justifier que la suite (p_n) est convergente.

D'après la question précédente, la suite (p_n) est croissante (car $p_n \leq p_{n+1}$ pour tout n) et majorée par $0,5$. Donc, la réponse est que, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (p_n) est convergente.

3.a On note L la limite de la suite (p_n) . Justifier que L est solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.

Comme (p_n) converge vers L , la suite (p_{n+1}) converge aussi vers L (suite extraite en décalant les indices).

En passant à la limite dans la relation de récurrence $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$ (la fonction carré étant continue), on obtient $L = 0,3 + 0,7L^2$, soit $0,7L^2 - L + 0,3 = 0$.

Donc, la réponse est que L est bien solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.

3.b Déterminer la limite de la suite (p_n) .

Le discriminant de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$ vaut $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 0,7 \times 0,3 = 1 - 0,84 = 0,16 = 0,4^2 > 0$: l'équation admet donc deux solutions distinctes.

$$x_1 = \frac{1 + 0,4}{2 \times 0,7} = \frac{1,4}{1,4} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{1 - 0,4}{2 \times 0,7} = \frac{0,6}{1,4} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}.$$

D'après la question 2.a, la suite (p_n) est majorée par $0,5$, donc sa limite L vérifie $L \leq 0,5$: la solution $x_1 = 1$ est donc à exclure.

Donc, la réponse est $L = \frac{3}{7}$ (soit environ $0,4286$, cohérent avec la conjecture de la question 1.c).

4. La fonction Python ci-dessous doit renvoyer, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite (p_n) : ‘def suite(n) :’ puis, en corps de fonction, une ligne d’initialisation de ‘p’, une ligne ‘s=[p]’, une boucle ‘for i in range(...)’ contenant une ligne de mise à jour de ‘p’ et une ligne ‘s.append(p)’, puis ‘return(s)’. Recopier cette fonction en complétant les lignes d’initialisation, de boucle et de mise à jour.

- def suite(n) :
- p = 0.3
- s = [p]
- for i in range(n - 1) :
- p = 0.3 + 0.7 * p²
- s.append(p)
- return(s)

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

Partie A — 1. Lors de la fabrication d’une paire de lunettes, la paire de verres subit deux traitements T1 et T2. On prélève au hasard une paire de verres dans la production et on note A l’évènement « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 » et B l’évènement « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 ». On donne $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,2$, et la probabilité qu’une paire ne présente aucun des deux défauts est 0,75. Recopier et compléter le tableau à double entrée des probabilités (lignes $B/\overline{B}$, colonnes $A/\overline{A}$).

On sait que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,75$, donc, comme la ligne « Total » vaut 1, $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,2 = 0,8$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,1 = 0,9$.

Dans la ligne $\overline{B}$, la case $A \cap \overline{B}$ vaut donc $P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,8 - 0,75 = 0,05$.

Dans la colonne A , le total vaut $P(A) = 0,1$, donc la case $A \cap B$ vaut $0,1 - 0,05 = 0,05$.

Dans la ligne B , la case $\overline{A} \cap B$ vaut $P(B) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,05 = 0,15$; on vérifie que la colonne $\overline{A}$ totalise bien $0,15 + 0,75 = 0,9 = P(\overline{A})$.

Le tableau complété est donc : ligne B : 0,05 (A), 0,15 ($\overline{A}$), 0,2 (total); ligne $\overline{B}$: 0,05 (A), 0,75 ($\overline{A}$), 0,8 (total); ligne Total : 0,1, 0,9, 1.

Partie A — 2.a Déterminer, en justifiant, la probabilité qu'une paire de verres prélevée au hasard présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.

L'évènement « la paire présente un défaut pour au moins un des deux traitements » est l'évènement $A \cup B$, contraire de l'évènement « la paire ne présente aucun des deux défauts », c'est-à-dire $\overline{A \cap B}$.

Donc $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0,75 = 0,25$.

Partie A — 2.b Donner la probabilité qu'une paire de verres prélevée au hasard présente deux défauts, un pour chaque traitement T1 et T2.

D'après le tableau de la question 1, la probabilité que la paire présente les deux défauts à la fois est directement lue dans la case $A \cap B$: $P(A \cap B) = 0,05$.

Partie A — 2.c Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

Si A et B étaient indépendants, on aurait $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or $P(A) \times P(B) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$, alors que $P(A \cap B) = 0,05$ (question précédente).

Comme $0,02 \neq 0,05$, les évènements A et B ne sont donc pas indépendants.

Partie A — 3. Calculer la probabilité qu'une paire de verres prélevée au hasard présente un défaut pour un seul des deux traitements.

Présenter un défaut pour un seul des deux traitements correspond à l'évènement $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, réunion de deux évènements incompatibles.

D'après le tableau de la question 1, $P(A \cap \overline{B}) = 0,05$ et $P(\overline{A} \cap B) = 0,15$.

Donc, la probabilité cherchée vaut $0,05 + 0,15 = 0,2$.

Partie A — 4. Calculer la probabilité qu'une paire de verres prélevée au hasard présente un défaut pour le traitement T2, sachant qu'elle présente un défaut pour le traitement T1.

Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$$P_A(B) = \frac{0,05}{0,1} = 0,5.$$

Partie B — 1. On prélève au hasard un échantillon de 50 paires de verres, assimilé à un tirage avec remise vu la taille de la production. X est la variable aléatoire comptant, dans un tel échantillon, le nombre de paires présentant un défaut pour le traitement T1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

Le prélèvement est assimilé à la répétition de 50 tirages indépendants et identiques, chacun ayant deux issues : la paire présente le défaut T1 (probabilité $P(A) = 0,1$) ou non.

X compte le nombre de succès (le défaut T1) parmi ces 50 répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli : X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$, notée $X \sim \mathcal{B}(50 ; 0,1)$.

Partie B — 2. Donner l'expression permettant de calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, exactement 10 paires de verres présentant ce défaut. Effectuer ce calcul et arrondir le résultat à 10^{-3} .

$$P(X = 10) = \binom{50}{10} \times 0,1^{10} \times 0,9^{40}.$$

La calculatrice donne $P(X = 10) \approx \mathbf{0,015}$ au millième près.

Partie B — 3. En moyenne, combien de paires de verres présentant ce défaut peut-on trouver dans un échantillon de 50 paires ?

Le nombre moyen de paires présentant le défaut correspond à l'espérance de X , qui vaut $E(X) = n \times p = 50 \times 0,1 = 5$.

Donc, en moyenne, on trouve **5** paires de verres présentant ce défaut dans un échantillon de 50 paires.

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1.a Une urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs, tous indiscernables au toucher. On tire au hasard, successivement et avec remise, deux jetons de cette urne. Un joueur perd 9 € si les deux jetons tirés sont blancs, perd 1 € si les deux jetons tirés sont noirs, et gagne 5 € si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

Notons B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et N l'évènement « le jeton tiré est noir ». Comme l'urne contient 3 jetons blancs et 2 jetons noirs sur 5 au total, $p(B) = \frac{3}{5}$ et $p(N) = \frac{2}{5}$.

Les tirages étant effectués avec remise, les probabilités sont les mêmes au premier et au second tirage : l'arbre pondéré comporte, à la première branche, B (probabilité $\frac{3}{5}$) ou N (probabilité $\frac{2}{5}$) ; puis, sous chacune de ces deux branches, à nouveau B (probabilité $\frac{3}{5}$) ou N (probabilité $\frac{2}{5}$) au second tirage, ces deux tirages étant indépendants du fait de la remise.

1.b Calculer la probabilité de perdre 9 € sur une partie.

Perdre 9 € correspond à tirer deux jetons blancs. Notons X la variable aléatoire donnant le gain du joueur sur une partie ; comme les deux tirages sont indépendants (tirages avec remise) : $p(X = -9) = p(B) \times p(B) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Donc, la probabilité de perdre 9 € sur une partie est égale à $\frac{9}{25}$ (soit **0,36**).

2.a On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et N jetons noirs, avec $N \geq 2$ (le nombre exact de jetons noirs n'étant pas connu). Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie. Déterminer la loi de probabilité de X .

L'urne contient à présent $N+3$ jetons au total, dont 3 blancs et N noirs. Sur un tirage, $p(B) = \frac{3}{N+3}$ et $p(N) = \frac{N}{N+3}$. La variable X prend les valeurs -9 , -1 et 5 .

Pour perdre 9 € (deux jetons blancs, tirages indépendants) : $p(X = -9) = \left(\frac{3}{N+3}\right)^2 = \frac{9}{(N+3)^2}$.

Pour perdre 1 € (deux jetons noirs) : $p(X = -1) = \left(\frac{N}{N+3}\right)^2 = \frac{N^2}{(N+3)^2}$.

Pour gagner 5 € (un jeton de chaque couleur, dans l'un ou l'autre ordre) : $p(X = 5) = 2 \times \frac{3}{N+3} \times \frac{N}{N+3} = \frac{6N}{(N+3)^2}$.

La loi de probabilité de X est donc donnée par : $p(X = -9) = \frac{9}{(N+3)^2}$, $p(X = -1) = \frac{N^2}{(N+3)^2}$ et $p(X = 5) = \frac{6N}{(N+3)^2}$.

2.b Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle x : $-x^2 + 30x - 81 > 0$.

Le trinôme $-x^2 + 30x - 81$ a pour discriminant $\Delta = 30^2 - 4 \times (-1) \times (-81) = 900 - 324 = 576 = 24^2$.

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-30 - 24}{2 \times (-1)} = \frac{-54}{-2} = 27$ et $x_2 = \frac{-30 + 24}{2 \times (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$.

Le coefficient dominant du trinôme étant $-1 < 0$, celui-ci est positif entre ses racines et négatif à l'extérieur : donc, $-x^2 + 30x - 81 > 0 \iff x \in]3 ; 27[$.

2.c En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.

Le jeu est favorable au joueur si, et seulement si, l'espérance de gain $E(X)$ est strictement positive. D'après la loi de probabilité établie à la question 2.a : $E(X) = (-9) \times \frac{9}{(N+3)^2} + (-1) \times \frac{N^2}{(N+3)^2} + 5 \times \frac{6N}{(N+3)^2} = \frac{-81 - N^2 + 30N}{(N+3)^2} = \frac{-N^2 + 30N - 81}{(N+3)^2}$.

Comme $(N+3)^2 > 0$, $E(X)$ est du signe de son numérateur $-N^2 + 30N - 81$. D'après la question précédente, ce numérateur est strictement positif si, et seulement si, $N \in]3 ; 27[$.

Or N est un entier naturel (un nombre de jetons), donc $E(X) > 0$ si, et seulement si, N est un entier vérifiant $4 \leq N \leq 26$.

Donc, le jeu est favorable au joueur lorsque l'urne contient entre 4 et 26 jetons noirs (bornes incluses).

2.d Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?

Le gain moyen est maximal lorsque la fonction g , définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(N) = \frac{-N^2 + 30N - 81}{(N + 3)^2}$ (qui correspond à $E(X)$ vue comme fonction de N), atteint son maximum, c'est-à-dire lorsque $g'(N) = 0$ en changeant de signe.

La fonction g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. En utilisant la formule de dérivation d'un quotient : $g'(N) = \frac{(-2N + 30)(N + 3)^2 - (N + 3)^{2'} \times (-N^2 + 30N - 81)}{(N + 3)^4}$ avec $(N + 3)^{2'} = 2(N + 3)$.

En simplifiant par $(N + 3)$ au numérateur et au dénominateur : $g'(N) = \frac{(-2N + 30)(N + 3) - 2(-N^2 + 30N - 81)}{(N + 3)^3}$

Développons le numérateur : $(-2N + 30)(N + 3) = -2N^2 - 6N + 30N + 90 = -2N^2 + 24N + 90$, puis $-2(-N^2 + 30N - 81) = 2N^2 - 60N + 162$. La somme donne : $-2N^2 + 24N + 90 + 2N^2 - 60N + 162 = -36N + 252$.

Donc, $g'(N) = \frac{-36N + 252}{(N + 3)^3} = \frac{-36(N - 7)}{(N + 3)^3}$. Comme $(N + 3)^3 > 0$, $g'(N)$ est du signe de $-(N - 7)$: positif avant $N = 7$, négatif après.

La fonction g est donc croissante sur $[0 ; 7]$ puis décroissante sur $[7 ; +\infty[$: elle admet un maximum en $N = 7$.

Donc, le joueur doit demander que l'urne contienne **7 jetons noirs** pour que son gain moyen soit maximal.

3. On suppose que l'urne contient désormais 7 jetons noirs et 3 jetons blancs. On observe 10 joueurs qui effectuent chacun une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un joueur gagnant 5 euros ?

Avec $N = 7$ jetons noirs et 3 jetons blancs (10 jetons au total), la probabilité de gagner 5 € sur une partie est, d'après la question 2.a : $p = \frac{6 \times 7}{(7 + 3)^2} = \frac{42}{100} = \frac{21}{50} = 0,42$.

Notons Y la variable aléatoire donnant le nombre de joueurs (parmi les 10) gagnant 5 €. Les 10 parties sont indépendantes et identiques, chacune ayant deux issues possibles (gagner 5 € ou non) : Y suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,42$, notée $\mathcal{B}(10 ; 0,42)$.

La probabilité d'avoir au moins un joueur gagnant 5 € est $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0)$, avec $p(Y = 0) = (1 - 0,42)^{10} = 0,58^{10}$.

À la calculatrice, $0,58^{10} \approx 0,0043$, donc $p(Y \geq 1) \approx 1 - 0,0043 \approx 0,996$.

Donc, la probabilité qu'au moins un joueur parmi les 10 gagne 5 € est d'environ **0,996** : cet évènement est quasiment certain.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

1. Le directeur d'une grande entreprise a proposé à tous ses salariés un stage de formation à un nouveau logiciel, suivi par 25 % des salariés. Parmi les 52 % de femmes de l'entreprise, 40 % ont suivi le stage. On interroge au hasard un salarié et on note F l'évènement « le salarié interrogé est une femme » et S l'évènement « le salarié interrogé a suivi le stage ». a. Donner la probabilité de l'évènement S .

L'énoncé indique directement que le stage a été suivi par 25 % des salariés interrogés au hasard, donc $P(S) = 0,25$.

1.b Recopier et compléter les branches de l'arbre pondéré associé aux évènements F et S .

L'arbre part de la racine avec les branches F (probabilité 0,52) et $\overline{F}$ (probabilité $1 - 0,52 = 0,48$); sous F , les branches S (probabilité 0,40, donnée par l'énoncé) et $\overline{S}$ (probabilité $1 - 0,40 = 0,60$); sous $\overline{F}$, les branches S et $\overline{S}$ (probabilités encore inconnues à ce stade).

1.c Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage vaut 0,208.

On cherche $P(F \cap S)$. D'après la formule des probabilités composées : $P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0,52 \times 0,40 = 0,208$.

1.d Sachant que la personne interrogée a suivi le stage, quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

On cherche $P_S(F) = \frac{P(S \cap F)}{P(S)} = \frac{0,208}{0,25} = 0,832$. Donc, la probabilité que ce soit une femme sachant qu'elle a suivi le stage vaut 0,832.

1.e Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés, moins de 10 % ont suivi le stage. Justifier cette affirmation.

D'après la formule des probabilités totales appliquée à S : $P(S) = P(S \cap F) + P(S \cap \overline{F})$, donc $P(S \cap \overline{F}) = P(S) - P(S \cap F) = 0,25 - 0,208 = 0,042$.

On cherche $P_{\overline{F}}(S) = \frac{P(S \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{0,042}{0,48} = 0,0875$.

Comme $0,0875 < 0,1$, l'affirmation du directeur est vérifiée : moins de 10 % des hommes salariés ont suivi le stage.

2.a On note X la variable aléatoire qui, à un échantillon de 20 salariés choisis au hasard, associe le nombre d'entre eux ayant suivi le stage (l'effectif de l'entreprise est assez grand pour assimiler ce choix à un tirage avec remise). Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par X .

Choisir 20 salariés indépendamment, chacun ayant suivi ou non le stage avec la même probabilité $p = P(S) = 0,25$ (tirage assimilé à un tirage avec remise), constitue la répétition de 20 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. X compte le nombre de succès (« a suivi le stage ») : X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$, notée $X \sim \mathcal{B}(20 ; 0,25)$.

2.b Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

$P(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,25^5 \times 0,75^{15} \approx 0,202$ (à la calculatrice). Donc, la probabilité que 5 salariés exactement aient suivi le stage vaut environ 0,202.

2.c On donne un programme Python qui utilise la fonction 'binomiale(i, n, p)' renvoyant $P(X = i)$ pour $X \sim \mathcal{B}(n ; p)$: 'def proba(k) : ' puis 'P = 0', 'for i in range(0, k+1) : P = P + binomiale(i, 20, 0.25)', 'return P'. Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par 'proba(5)', et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

La boucle 'for i in range(0, k+1)' cumule les probabilités $P(X = i)$ pour i allant de 0 à k inclus. Donc 'proba(5)' calcule $P(X \leq 5) = \sum_{i=0}^5 P(X = i)$. À la calculatrice, $P(X \leq 5) \approx 0,617$. Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'il y a environ 61,7 % de chances qu'au plus 5 salariés, sur un échantillon de 20, aient suivi le stage.

2.d Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

L'évènement « au moins 6 salariés ont suivi le stage » est l'évènement contraire de « au plus 5 salariés ont suivi le stage ». Donc $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 1 - 0,617 = 0,383$. Donc, la probabilité qu'au moins 6 salariés sur 20 aient suivi le stage vaut environ 0,383.

3. Cette question est indépendante des précédentes. Pour inciter les salariés à se former, l'entreprise a décidé d'augmenter de 5 % le salaire des salariés ayant suivi le stage, et de 2 % celui des salariés ne l'ayant pas suivi. Quel est le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de l'entreprise dans ces conditions ?

Le pourcentage moyen d'augmentation dépend en réalité de la répartition des salaires entre les deux catégories de salariés (ceux ayant suivi le stage et les autres), et pas seulement des proportions de salariés (25 % et 75 %). Illustrons avec deux répartitions différentes de la masse salariale, à effectifs identiques (25 salariés ayant suivi le stage, 75 ne l'ayant pas suivi, sur un échantillon de 100).

Premier cas : les 25 salariés formés touchent 1000 € et les 75 autres touchent 1200 €. La masse salariale totale avant augmentation est $25 \times 1000 + 75 \times 1200 = 115\,000$ €, soit un salaire moyen de 1150 €. Après augmentation, la masse salariale devient $25 \times 1000 \times 1,05 + 75 \times 1200 \times 1,02 = 118\,050$ €, soit un salaire moyen de 1180,50 €. Le coefficient multiplicateur moyen est $\frac{1180,50}{1150} \approx 1,0265$, soit une augmentation moyenne d'environ **2,65 %**.

Deuxième cas : les 25 salariés formés touchent 1200 € et les 75 autres touchent 1000 €. La masse salariale totale avant augmentation est $25 \times 1200 + 75 \times 1000 = 105\,000$ €, soit un salaire moyen de 1050 €. Après augmentation, la masse salariale devient $25 \times 1200 \times 1,05 + 75 \times 1000 \times 1,02 = 108\,000$ €, soit un salaire moyen de 1080 €. Le coefficient multiplicateur moyen est $\frac{1080}{1050} \approx 1,0286$, soit une augmentation moyenne d'environ **2,86 %**.

Les deux répartitions donnent des pourcentages moyens différents (2,65 % contre 2,86 %) alors que les proportions de salariés formés (25 %) et non formés (75 %) sont identiques. Donc, **le pourcentage moyen d'augmentation ne peut pas être déterminé avec les seules données de l'énoncé : il dépend de la répartition des salaires entre les deux groupes.**

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 2)

Partie A — Le coyote est un mammifère sauvage proche du loup vivant en Amérique du Nord. Dans l'Oklahoma, 70 % des coyotes sont porteurs d'une maladie appelée l'ehrlichiose. Un test de dépistage existe : si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas ; s'il n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas. On capture un coyote au hasard et on lui applique le test. On note M l'évènement « le coyote est malade » et T l'évènement « le test est positif ». 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

L'arbre part de la racine avec les branches M (probabilité 0,7) et $\overline{M}$ (probabilité 0,3).

Sous M : les branches T (probabilité 0,97) et $\overline{T}$ (probabilité 0,03).

Sous $\overline{M}$: les branches T (probabilité 0,05) et $\overline{T}$ (probabilité 0,95).

2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et ait un test positif.

D'après l'arbre pondéré, $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,7 \times 0,97 = 0,679$.

3. Démontrer que $P(T) = 0,694$.

D'après la formule des probabilités totales, comme M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers : $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$.

Or $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$.

Donc, $P(T) = 0,679 + 0,015 = 0,694$.

4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif. Calculer cette valeur, arrondie au millièm.

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,679}{0,694} \approx 0,978 \text{ (arrondi au millièm).}$$

5.a Par analogie, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et la calculer, arrondie au millièm.

La valeur prédictive négative du test est la probabilité que le coyote ne soit effectivement pas malade sachant que son test est négatif, c'est-à-dire $P_{\bar{T}}(\bar{M})$.

On calcule $P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,694 = 0,306$ et $P(\bar{T} \cap \bar{M}) = P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,3 \times 0,95 = 0,285$.

$$\text{Donc, } P_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{P(\bar{T} \cap \bar{M})}{P(\bar{T})} = \frac{0,285}{0,306} \approx 0,931 \text{ (arrondi au millièm).}$$

5.b Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter le résultat.

Comme $0,978 > 0,931$, la valeur prédictive positive est supérieure à la valeur prédictive négative : un résultat positif au test permet donc de conclure à la maladie avec un peu plus de certitude (environ 2,2 % d'erreur) qu'un résultat négatif ne permet de conclure à l'absence de maladie (environ 6,9 % d'erreur).

Partie B — On admet désormais que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif vaut 0,694. 1.a On capture cinq coyotes au hasard, ce choix étant assimilé à un tirage avec remise ; X compte, parmi ces cinq coyotes, le nombre de ceux dont le test est positif. Quelle est la loi de X ? Justifier et préciser ses paramètres.

La capture des cinq coyotes correspond à la répétition de cinq épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (par assimilation à un tirage avec remise), chacune de paramètre de succès 0,694 (« le test est positif »). Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,694$, notée $X \sim \mathcal{B}(5 ; 0,694)$.

1.b Calculer la probabilité qu'un seul des cinq coyotes ait un test positif, arrondie au centièm.

$$P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,694^1 \times (1 - 0,694)^4 \approx 0,03 \text{ (arrondi au centièm).}$$

1.c Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre des cinq coyotes aient un test positif. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier.

Il s'agit de comparer $P(X \geq 4)$ à $\frac{1}{2}$, avec $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$.

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \times 0,694^4 \times 0,306^1 \approx 0,3549 \text{ et } P(X = 5) = \binom{5}{5} \times 0,694^5 \times 0,306^0 \approx 0,1610.$$

Donc, $P(X \geq 4) \approx 0,3549 + 0,1610 = 0,5159$, valeur strictement supérieure à 0,5.

L'affirmation du vétérinaire est donc **vraie**.

2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'au moins un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils en capturer pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ait un test positif soit supérieure à 0,99 ?

On note n le nombre de coyotes capturés et Y la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,694$ comptant le nombre de tests positifs parmi eux. On cherche le plus petit n tel que $P(Y \geq 1) > 0,99$.

Or $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,306^n$ (probabilité de l'évènement contraire, qu'aucun test ne soit positif).

On résout donc dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $1 - 0,306^n > 0,99 \iff 0,306^n < 0,01$.

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$: $\ln(0,306^n) < \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,306) < \ln(0,01)$.

Comme $\ln(0,306) < 0$, l'inégalité change de sens en divisant : $n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,306)} \approx 3,89$.

Donc, les vétérinaires doivent capturer au moins **4 coyotes**.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

Partie 1 — Stéphanie s'entraîne au basket-ball. Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points, et parmi eux 60 % sont réussis ; les trois quarts restants sont des tirs à trois points, et parmi eux 35 % sont réussis. Elle réalise un tir ; on note D l'évènement « le tir choisi est un tir à deux points » et R l'évènement « le tir est réussi ». 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

L'arbre part de la racine avec les branches D (probabilité 0,25) et $\overline{D}$ (probabilité 0,75). Sur la branche D , les sous-branches sont R (probabilité 0,6) et $\overline{R}$ (probabilité 0,4). Sur la branche $\overline{D}$, les sous-branches sont R (probabilité 0,35) et $\overline{R}$ (probabilité 0,65).

2. Calculer la probabilité $P(\overline{D} \cap R)$.

D'après la lecture de l'arbre : $P(\overline{D} \cap R) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(R) = 0,75 \times 0,35 = \mathbf{0,2625}$.

3. Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir quelconque est égale à 0,4125.

On calcule de même $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,25 \times 0,6 = 0,15$.

Les événements D et $\overline{D}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :
 $P(R) = P(D \cap R) + P(\overline{D} \cap R) = 0,15 + 0,2625 = \mathbf{0,4125}$, ce qui est le résultat annoncé.

4. Sachant que Stéphanie a réussi son tir, calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points (arrondir au centième).

D'après la définition de la probabilité conditionnelle : $P_R(\overline{D}) = \frac{P(R \cap \overline{D})}{P(R)} = \frac{0,2625}{0,4125}$.

On obtient $P_R(\overline{D}) \approx 0,6364$, soit, arrondi au centième, **0,64**.

Partie 2 — Stéphanie réalise une série de 10 tirs à trois points, supposés indépendants ; on rappelle que la probabilité de réussir un tir à trois points vaut 0,35. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de tirs réussis. 1. Justifier que X suit une loi binomiale, et préciser ses paramètres.

Les 10 tirs sont indépendants et chacun n'a que deux issues possibles (réussi ou raté), avec la même probabilité de succès 0,35 à chaque tir : X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$.

2. Calculer l'espérance de X , et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour une loi binomiale, $E(X) = np = 10 \times 0,35 = \mathbf{3,5}$. Cela signifie que, si Stéphanie répète très souvent des séries de 10 tirs à trois points, elle réussira en moyenne 3,5 tirs par série.

3. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus sur cette série de 10 (arrondir au centième).

Rater 4 tirs ou plus sur 10, c'est en réussissant au plus $10 - 4 = 6$: l'évènement demandé correspond donc à $(X \leq 6)$.

À la calculatrice, avec X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$: $P(X \leq 6) \approx \mathbf{0,97}$.

4. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs sur cette série de 10 (arrondir au centième).

Rater au plus 4 tirs sur 10, c'est en réussissant au moins $10 - 4 = 6$: l'évènement demandé correspond donc à $(X \geq 6)$.

À la calculatrice : $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx \mathbf{0,09}$.

Partie 3 — Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points indépendants, avec n entier naturel non nul, la probabilité de réussir chaque tir restant égale à 0,35. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité qu'elle réussisse au moins un tir parmi les n soit supérieure ou égale à 0,99.

La probabilité de rater un tir donné vaut $1 - 0,35 = 0,65$. Comme les tirs sont indépendants, la probabilité de les rater tous les n vaut $0,65^n$.

La probabilité de réussir au moins un tir parmi les n est donc l'évènement contraire de « tout rater », de probabilité $1 - 0,65^n$.

On cherche le plus petit entier naturel non nul n tel que $1 - 0,65^n \geq 0,99$, c'est-à-dire $0,65^n \leq 0,01$.

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, cette inégalité équivaut à $\ln(0,65^n) \leq \ln(0,01)$, soit $n \ln(0,65) \leq \ln(0,01)$.

Comme $\ln(0,65) < 0$, diviser par $\ln(0,65)$ inverse le sens de l'inégalité : $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,65)}$.

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,65)} \approx 10,69$, donc le plus petit entier naturel qui convient est $n = 11$: Stéphanie doit prévoir une série d'au moins 11 tirs.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 1)

1.a. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 6x + 4 \ln(x)$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

Quand x tend vers 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -6x = 0$, tandis que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} 4 \ln(x) = -\infty$.

Par somme de limites, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

1.b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Pour $x > 0$, on factorise : $x^2 - 6x = x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{6}{x}\right) = 1$, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right) = +\infty$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \ln(x) = +\infty$, donc, par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2.a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et $f'(x) = 2x - 6 + \frac{4}{x} = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$.

2.b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f .

Comme $x > 0$ sur l'intervalle d'étude, le signe de $f'(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ est celui du numérateur $2x^2 - 6x + 4$, c'est-à-dire celui de $x^2 - 3x + 2$ (même signe, car on divise par $2 > 0$).

Ce trinôme a pour racines évidentes 1 et 2 (leur somme vaut 3 et leur produit 2, ce qui correspond bien aux coefficients), donc $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Un trinôme du second degré de coefficient dominant positif est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur : $f'(x) < 0$ sur $]1 ; 2[$ et $f'(x) > 0$ sur $]0 ; 1[\cup]2 ; +\infty[$, avec $f'(1) = f'(2) = 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; 1]$, strictement décroissante sur $[1 ; 2]$, puis strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.

On calcule les valeurs aux bornes : $f(1) = 1 - 6 + 4 \ln(1) = 1 - 6 + 0 = -5$, et $f(2) = 4 - 12 + 4 \ln(2) = 4 \ln(2) - 8 \approx -5,23$.

Le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$ part donc de $-\infty$ (limite en 0), croît jusqu'à -5 en $x = 1$, décroît jusqu'à $4 \ln(2) - 8$ en $x = 2$, puis croît vers $+\infty$ (limite en $+\infty$).

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4 ; 5]$.

On calcule les images des bornes : $f(4) = 16 - 24 + 4 \ln(4) = -8 + 8 \ln(2) \approx -2,45$ et $f(5) = 25 - 30 + 4 \ln(5) = 4 \ln(5) - 5 \approx 1,44$.

Ainsi $f(4) < 0 < f(5)$. Or, d'après la question précédente, l'intervalle $[4 ; 5]$ est inclus dans $[2 ; +\infty[$, sur lequel f est continue (car dérivable) et strictement croissante.

Donc, d'après le théorème de la bijection (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[4 ; 5]$.

4.a. On admet que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}$. Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$ et préciser les coordonnées exactes des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Comme $x > 0$, le dénominateur x^2 est strictement positif, donc le signe de $f''(x)$ est celui du numérateur $2x^2 - 4$.

On résout $2x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$; seule la solution $x = \sqrt{2}$ appartient à $]0 ; +\infty[$.

Le trinôme $2x^2 - 4$ est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur, donc, restreint à $]0 ; +\infty[$: $f''(x) < 0$ sur $]0 ; \sqrt{2}[$ et $f''(x) > 0$ sur $] \sqrt{2} ; +\infty[$.

Donc f est concave sur $]0 ; \sqrt{2}]$ et convexe sur $[\sqrt{2} ; +\infty[$.

Comme f'' s'annule en $x = \sqrt{2}$ en changeant de signe, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion, d'abscisse $\sqrt{2}$.

Son ordonnée vaut $f(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \ln(\sqrt{2}) = 2 - 6\sqrt{2} + 4 \times \frac{1}{2} \ln(2) = 2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln(2)$.

Donc, le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées exactes $(\sqrt{2} ; 2 - 6\sqrt{2} + 2 \ln(2))$.

4.b. On note A le point de coordonnées $(\sqrt{2} ; f(\sqrt{2}))$. Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$ et M le point de coordonnées $(t ; f(t))$. En utilisant la question 4.a., indiquer, selon la valeur de t , les positions relatives du segment $[AM]$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Le segment $[AM]$ est une corde de la courbe $\mathcal{C}_f$ joignant le point d'inflexion A au point M.

Si $t \in]0 ; \sqrt{2}[$, les points A et M sont tous deux situés sur la partie de $\mathcal{C}_f$ où f est concave : une corde d'une courbe concave est toujours située en dessous de la courbe, donc le segment $[AM]$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$.

Si $t \in]\sqrt{2} ; +\infty[$, les points A et M sont tous deux situés sur la partie de $\mathcal{C}_f$ où f est convexe : une corde d'une courbe convexe est toujours située au-dessus de la courbe, donc le segment $[AM]$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 1)

1.a. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 e^x$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. Calculer u_1 puis u_2 (valeurs exactes puis approchées à 10^{-3} près).

$$u_1 = f(u_0) = f(-1) = (-1)^3 e^{-1} = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,368.$$

$$u_2 = f(u_1) = (-e^{-1})^3 \times e^{-e^{-1}} = -e^{-3} \times e^{-e^{-1}} = -e^{-3-e^{-1}} \approx -0,034.$$

1.b. Le code Python ci-dessous définit une fonction `fonc(n)` qui, partant de `u=-1`, applique `n` fois de suite l'instruction `u = u**3*exp(u)` avant de renvoyer `u`. Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc(2)`, arrondie à 10^{-3} près.

La boucle applique deux fois la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ à partir de $u_0 = -1$, donc `fonc(2)` renvoie la valeur de u_2 , soit environ **-0,034**.

2.a. Démontrer que, pour tout réel x , $f'(x) = x^2 e^x (x + 3)$.

La fonction $f(x) = x^3 e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. En dérivant ce produit, on obtient $f'(x) = 3x^2 \times e^x + x^3 \times e^x = x^2 e^x (3 + x)$, ce qui est bien le résultat annoncé.

2.b. Justifier le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (minimum en $x = -3$, limites 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$).

Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ et $e^x > 0$, donc le signe de $f'(x) = x^2 e^x (x+3)$ est celui de $(x+3)$, sauf en $x = 0$ où $f'(x) = 0$ car $x^2 = 0$.

On a $x+3 < 0 \iff x < -3$: donc $f'(x) < 0$ sur $] -\infty ; -3[$, et f y est strictement décroissante.

On a $x+3 > 0 \iff x > -3$: donc $f'(x) > 0$ sur $] -3 ; +\infty[$ (sauf au point isolé $x = 0$ où f' s'annule sans changer de signe), et f y est strictement croissante.

La fonction f admet donc un minimum en $x = -3$, qui vaut $f(-3) = (-3)^3 \times e^{-3} = -27e^{-3} = -\frac{27}{e^3} \approx -1,344$.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc, par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Ceci justifie bien le tableau de variations donné dans l'énoncé.

2.c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

Initialisation : on a $u_0 = -1$ et $u_1 = -e^{-1} \approx -0,368$. On vérifie bien $-1 \leq -1 \leq -0,368 \leq 0$, donc l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : supposons que, pour un entier naturel n fixé, on ait $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

D'après la question 2.b., la fonction f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$, donc en particulier sur $[-1 ; 0]$, qui contient tous les termes encadrés par hypothèse de récurrence.

En appliquant f , qui est croissante sur cet intervalle, à chaque membre de l'inégalité $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$, on obtient $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(0)$, c'est-à-dire $u_1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(0)$.

Or $f(0) = 0^3 \times e^0 = 0$ et $u_1 = -e^{-1} \approx -0,368 \geq -1$, donc on obtient bien $-1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0$: la relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et il est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

2.d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est donc croissante.

Toujours d'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq 0$, donc $u_n \leq 0$ (en particulier pour $u_0 = -1 \leq 0$) : la suite (u_n) est majorée par 0.

Donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite (u_n) , croissante et majorée, est convergente vers une limite ℓ vérifiant $\ell \leq 0$.

2.e. On note ℓ la limite de (u_n) , solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer ℓ , sachant que l'équation $x^2e^x - 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $] -1 ; 0[$.

D'après la question 2.c., tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[-1 ; 0]$, donc $\ell \in [-1 ; 0]$.

On résout l'équation $f(x) = x$ sur cet intervalle : $x^3e^x = x \iff x^3e^x - x = 0 \iff x(x^2e^x - 1) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul, donc $x = 0$ ou $x^2e^x - 1 = 0$.

Or, par hypothèse, l'équation $x^2e^x - 1 = 0$ n'a pas de solution dans $] -1 ; 0[$, donc, sur l'intervalle $[-1 ; 0]$, la seule solution possible de $f(x) = x$ est $x = 0$ (qui appartient bien à $[-1 ; 0]$).

Donc, $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 1)

Préambule (QCM). Un système de communication binaire transmet des bits (0 ou 1), avec un risque d'erreur de transmission (un 0 peut être reçu comme un 1 et réciproquement). Pour un bit choisi au hasard, on note E_0 : « le bit envoyé est 0 », E_1 : « le bit envoyé est 1 », R_0 : « le bit reçu est 0 », R_1 : « le bit reçu est 1 ». On donne $P(E_0) = 0,4$, $P_{E_0}(R_1) = 0,01$ et $P_{E_1}(R_0) = 0,02$.

On complète l'arbre pondéré : à la racine, les branches E_0 (probabilité 0,4) et E_1 (probabilité 0,6, car $P(E_1) = 1 - P(E_0)$). Sur la branche E_0 , les sous-branches sont R_0 (probabilité $1 - 0,01 = 0,99$) et R_1 (probabilité 0,01). Sur la branche E_1 , les sous-branches sont R_0 (probabilité 0,02) et R_1 (probabilité $1 - 0,02 = 0,98$).

1. Calculer la probabilité que le bit envoyé soit un 0 et que le bit reçu soit un 0.

D'après la formule des probabilités composées, $P(E_0 \cap R_0) = P(E_0) \times P_{E_0}(R_0) = 0,4 \times 0,99 = 0,396$.

2. Calculer la probabilité $P(R_0)$.

On calcule d'abord $P(E_1 \cap R_0) = P(E_1) \times P_{E_1}(R_0) = 0,6 \times 0,02 = 0,012$.

Les événements E_0 et E_1 forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(R_0) = P(E_0 \cap R_0) + P(E_1 \cap R_0) = 0,396 + 0,012 = 0,408$.

3. Donner une valeur approchée au millièème de la probabilité $P_{R_1}(E_0)$.

On calcule d'abord $P(R_1) = 1 - P(R_0) = 1 - 0,408 = 0,592$.

On calcule ensuite $P(E_0 \cap R_1) = P(E_0) \times P_{E_0}(R_1) = 0,4 \times 0,01 = 0,004$.

D'après la définition de la probabilité conditionnelle, $P_{R_1}(E_0) = \frac{P(E_0 \cap R_1)}{P(R_1)} = \frac{0,004}{0,592} \approx \mathbf{0,007}$ au millièème près.

4. Calculer la probabilité de l'évènement « il y a une erreur de transmission ».

Une erreur de transmission survient soit si un 0 est envoyé et reçu comme un 1 (évènement $E_0 \cap R_1$), soit si un 1 est envoyé et reçu comme un 0 (évènement $E_1 \cap R_0$) ; ces deux évènements sont incompatibles.

On a $P(E_0 \cap R_1) = 0,4 \times 0,01 = 0,004$ et $P(E_1 \cap R_0) = 0,6 \times 0,02 = 0,012$.

Donc $P(\text{erreur}) = P(E_0 \cap R_1) + P(E_1 \cap R_0) = 0,004 + 0,012 = \mathbf{0,016}$.

5. On admet que la probabilité qu'un octet (message de 8 bits) soit transmis sans erreur vaut 0,88. On transmet 10 octets de façon indépendante. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'exactly 7 octets soient transmis sans erreur.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'octets transmis sans erreur, parmi les 10 transmis de façon indépendante et avec la même probabilité de succès à chaque fois.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$.

On calcule $P(X = 7) = \binom{10}{7} \times 0,88^7 \times (1 - 0,88)^3 = \binom{10}{7} \times 0,88^7 \times 0,12^3 \approx \mathbf{0,085}$ au millièème près.

6. On transmet 10 octets de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'au moins 1 octet soit transmis sans erreur.

Avec X la même variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$, l'évènement contraire de « au moins 1 octet transmis sans erreur » est « aucun octet transmis sans erreur », soit $X = 0$.

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0,88^0 \times (1 - 0,88)^{10} = 0,12^{10}.$$

Donc $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,12^{10}$.

7. Soit N un entier naturel et N_0 la plus grande valeur de N pour laquelle la probabilité que les N octets soient tous transmis sans erreur reste supérieure ou égale à 0,1. Déterminer N_0 .

La probabilité que N octets soient tous transmis sans erreur, de façon indépendante, vaut $0,88^N$.

On cherche donc la plus grande valeur entière de N telle que $0,88^N \geq 0,1$.

À la calculatrice, on trouve $0,88^{18} \approx 0,1002 \geq 0,1$, tandis que $0,88^{19} \approx 0,0881 < 0,1$.

Donc $N_0 = 18$.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 1)

1. On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x^2 + x + 1)$. Parmi les quatre propositions, laquelle donne l'expression de $g'(x)$ pour tout x strictement positif : a. $g'(x) = \frac{1}{2x+1}$; b. $g'(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$; c. $g'(x) = \ln(2x+1)$; d. $g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$?

La fonction g est de la forme $\ln(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$, strictement positive sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de termes positifs.

La fonction g est donc dérivable comme composée de fonctions dérivables, de dérivée $g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u'(x) = 2x + 1$, soit $g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Donc, la réponse est **d**.

2. Parmi les quatre fonctions proposées, laquelle est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln(x)$: a. $x \mapsto \ln(x)$; b. $x \mapsto \frac{1}{x}$; c. $x \mapsto x \ln(x) - x$; d. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$?

On dérive chaque candidate pour repérer celle dont la dérivée vaut $\ln(x)$. Pour $h(x) = x \ln(x) - x$, dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables : $h'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

La fonction h est donc bien une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

Donc, la réponse est **c**.

3. On considère la suite (a_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par $a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n}$. Quelle est la limite de la suite (a_n) : a. $-\infty$; b. -1 ; c. 1 ; d. $+\infty$?

On met 3^n en facteur au numérateur et 2^n en facteur au dénominateur : $a_n = \frac{3^n \left(\frac{1}{3^n} - 1 \right)}{2^n \left(\frac{1}{2^n} + 1 \right)} =$

$$\left(\frac{3}{2} \right)^n \times \frac{\frac{1}{3^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, le quotient $\frac{\frac{1}{3^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1}$ tend vers $\frac{-1}{1} = -1$.

D'autre part, $\frac{3}{2} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$. Par produit d'une limite infinie par une limite négative, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$.

Donc, la réponse est **a**.

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2 ; 2]$, dont la dérivée f' admet le tableau de variations suivant sur $[-2 ; 2]$: f' vaut 1 en -2 , décroît jusqu'à -2 en 0, puis croît jusqu'à -1 en 2. Que peut-on en déduire sur f : a. f est convexe sur $[-2 ; -1]$; b. f est concave sur $[0 ; 1]$; c. f est convexe sur $[-1 ; 2]$; d. f est concave sur $[-2 ; 0]$?

La convexité de f se lit sur le sens de variation de sa dérivée f' : f est convexe là où f' est croissante, et concave là où f' est décroissante.

D'après le tableau, f' est strictement décroissante sur $[-2 ; 0]$ (elle passe de 1 à -2), donc f y est concave.

Donc, la réponse est **d**.

5. On donne la représentation graphique de la dérivée f' d'une fonction f définie sur $[-2 ; 4]$: la courbe part de $(-2 ; -3)$, monte en s'annulant en $x = -1$, atteint un maximum local proche de 1 en $x = 0$, redescend en s'annulant en $x = 1$ puis en $x = 2$, redevient positive et remonte jusqu'à $(4 ; 3)$. Quelle affirmation sur f est correcte : a. f est décroissante sur $[0 ; 2]$; b. f est décroissante sur $[-1 ; 0]$; c. f admet un maximum en 1 sur $[0 ; 2]$; d. f admet un maximum en 3 sur $[2 ; 4]$?

Le signe de f' donne le sens de variation de f : f croît là où f' est positive, et décroît là où f' est négative.

D'après la lecture graphique, $f'(x)$ est positive juste avant $x = 1$ puis devient négative juste après : f' change de signe en s'annulant en $x = 1$, en passant du positif au négatif.

La fonction f est donc croissante avant $x = 1$ puis décroissante après, sur l'intervalle $[0 ; 2]$: elle y admet donc un maximum atteint en $x = 1$.

Donc, la réponse est **c**.

6. Une action est cotée à 57 euros, et sa valeur augmente de 3 % chaque mois. On cherche un script Python 'seuil()' renvoyant le nombre de mois à attendre pour que la valeur dépasse 200 euros, parmi quatre propositions utilisant une boucle 'while' ou 'for'. Laquelle est correcte ?

- def seuil() :

- $m = 0$
- $v = 57$
- while $v < 200$:
- $m = m + 1$
- $v = v * 1.03$
- return m

6. (suite) Justifier le choix de ce script parmi les quatre propositions.

Le script doit répéter l'augmentation mensuelle tant que la valeur de l'action n'a pas encore dépassé 200 euros : la condition de la boucle 'while' doit donc être ' $v < 200$ ', et non ' $v > 200$ ' (qui arrêterait la boucle immédiatement, puisque $57 < 200$).

Chaque passage dans la boucle doit correspondre à un mois écoulé, donc le compteur ' m ' doit être incrémenté de 1 à chaque itération, avant ou après la mise à jour de la valeur ' $v = v * 1.03$ '.

Une boucle 'for' sur un nombre d'itérations fixé à l'avance, ou une simple instruction conditionnelle 'if', ne conviennent pas ici puisque le nombre de mois recherché n'est pas connu à l'avance.

En simulant ce script, on trouve $m = 43$ mois avant que la valeur ne dépasse 200 euros. Donc, la réponse est le script utilisant ' $v < 200$ ' avec incrémentation de ' m ' à chaque tour de boucle.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 2)

Partie 1 — Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. On estime que 20 % des casques portant ce logo sont des contrefaçons, que 2 % des casques authentiques présentent un défaut de conception, et que 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception. Un agent commande au hasard un casque affichant ce logo. On note C l'évènement « le casque est contrefait » et D l'évènement « le casque présente un défaut de conception » (les probabilités sont arrondies à 10^{-3} si besoin). 1. Calculer $P(C \cap D)$.

Puisque le casque est commandé au hasard, on assimile les proportions données aux probabilités des évènements correspondants : $P(C) = 0,2$, $P_C(D) = 0,1$ et $P_{\overline{C}}(D) = 0,02$.

On en déduit l'arbre pondéré à deux niveaux : depuis la racine, une branche vers C (probabilité 0,2) puis vers D (probabilité 0,1) ou $\overline{D}$ (probabilité 0,9) ; une branche vers $\overline{C}$ (probabilité 0,8) puis vers D (probabilité 0,02) ou $\overline{D}$ (probabilité 0,98).

Par la formule des probabilités composées : $P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D) = 0,2 \times 0,1 = 0,02$.

Donc, la réponse est $P(C \cap D) = 0,02$.

2. Démontrer que $P(D) = 0,036$.

Les événements C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers (tout casque est soit contrefait, soit authentique), donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(D) = P(C \cap D) + P(\overline{C} \cap D)$.

On a déjà $P(C \cap D) = 0,02$, et $P(\overline{C} \cap D) = P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(D) = 0,8 \times 0,02 = 0,016$.

D'où $P(D) = 0,02 + 0,016 = 0,036$. Donc, la réponse est $P(D) = 0,036$.

3. Le casque commandé présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

On demande de calculer la probabilité conditionnelle $P_D(C)$, définie par $P_D(C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$ (avec $P(D) \neq 0$).

$$P_D(C) = \frac{0,02}{0,036} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \approx 0,556 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Donc, la réponse est $P_D(C) \approx 0,556$.

Partie 2 — On commande n casques portant ce logo, expérience assimilée à un tirage aléatoire avec remise. X désigne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans le lot. 1.a Dans cette question, $n = 35$. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$ avec $n = 35$ et $p = 0,036$.

On répète $n = 35$ fois, de façon identique et indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise), une expérience de Bernoulli : commander un casque, avec pour succès l'événement « le casque présente un défaut », de probabilité $p = P(D) = 0,036$ d'après la question 2 de la partie 1.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès obtenus sur ces 35 répétitions indépendantes.

Donc, la réponse est que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(35 ; 0,036)$.

1.b Calculer la probabilité qu'exactement un casque parmi les 35 commandés présente un défaut de conception.

On veut calculer $P(X = 1)$, avec X suivant la loi $\mathcal{B}(35 ; 0,036)$: $P(X = 1) = \binom{35}{1} \times 0,036^1 \times (1 - 0,036)^{34} = 35 \times 0,036 \times 0,964^{34}$.

À la calculatrice, $P(X = 1) \approx 0,362$ à 10^{-3} près.

Donc, la réponse est $P(X = 1) \approx 0,362$.

1.c Calculer $P(X \leq 1)$.

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$. On calcule $P(X = 0) = \binom{35}{0} \times 0,036^0 \times 0,964^{35} \approx 0,278$, et on a déjà $P(X = 1) \approx 0,362$.

D'où $P(X \leq 1) \approx 0,278 + 0,362 = 0,640$; le calcul direct à la calculatrice donne $P(X \leq 1) \approx 0,639$ à 10^{-3} près (l'écart avec 0,640 vient des arrondis intermédiaires).

Donc, la réponse est $P(X \leq 1) \approx 0,639$.

2. Dans cette question, n n'est pas fixé. Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieure à 0,99 ?

Pour un entier naturel non nul n , on note X_n la variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,036)$ et qui compte le nombre de casques défectueux parmi n casques commandés.

La probabilité qu'au moins un casque présente un défaut est $P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,036^0 \times 0,964^n = 1 - 0,964^n$.

On résout, pour n entier naturel non nul : $P(X_n \geq 1) \geq 0,99 \iff 1 - 0,964^n \geq 0,99 \iff 0,964^n \leq 0,01$.

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc $0,964^n \leq 0,01 \iff n \ln(0,964) \leq \ln(0,01)$. Comme $0,964 < 1$, on a $\ln(0,964) < 0$, donc, en divisant par $\ln(0,964)$, le sens de l'inégalité s'inverse : $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)}$.

À la calculatrice, $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \approx 125,6$, donc les entiers naturels solutions sont ceux vérifiant $n \geq 126$.

Donc, la réponse est qu'il faut commander au moins **126 casques**.

Brevet 2021 — Métropole, Antilles et Guyane

1. Une urne contient 7 jetons verts, 4 rouges, 3 bleus et 2 jaunes, indiscernables au toucher. On tire un jeton au hasard. À quel événement correspond une probabilité de $\frac{7}{16}$: « obtenir un jeton rouge ou jaune », « obtenir un jeton qui n'est pas vert » ou « obtenir un jeton vert » ?

L'urne contient $7 + 4 + 3 + 2 = 16$ jetons en tout, dont 7 verts.

La probabilité d'obtenir un jeton vert est donc $\frac{7}{16}$: c'est l'évènement « obtenir un jeton vert ».

2. Toujours avec cette urne, quelle est la probabilité de ne pas tirer un jeton bleu : $\frac{13}{16}$, $\frac{3}{16}$ ou $\frac{3}{4}$?

La probabilité de tirer un jeton bleu est $\frac{3}{16}$ (il y a 3 jetons bleus sur 16).

La probabilité de ne pas tirer un jeton bleu est l'évènement contraire : $1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$.

3. Une figure est composée de vingt motifs numérotés de 1 à 20, disposés régulièrement autour d'un point O , avec un angle $\widehat{AOB} = 36^\circ$ (A et B étant deux points symétriques par rapport à une droite (d) passant par O). Quelle est l'image du motif 20 par la symétrie d'axe (d) : le motif 17, le motif 15 ou le motif 12 ?

Les vingt motifs sont répartis régulièrement tout autour de O , séparés d'un angle de $360^\circ \div 20 = 18^\circ$ chacun, et la droite (d) est un axe de symétrie de la figure.

En comptant les motifs symétriques par rapport à (d) de part et d'autre de celui-ci, le motif symétrique du motif 20 est **le motif 17**.

4. Par quelle rotation de centre O le motif 3 est-il l'image du motif 1 : un angle de 36° , de 72° ou de 90° ?

Les vingt motifs étant répartis tous les 18° autour de O , passer du motif 1 au motif 3 correspond à un déplacement de deux motifs, soit un angle de $2 \times 18 = 36^\circ$.

5. Le motif 11 est l'image du motif 1 par l'homothétie de centre O et de rapport 2. L'aire du motif 11 est-elle égale au double de l'aire du motif 1, à 4 fois cette aire, ou à sa moitié ?

Dans une homothétie de rapport k , les longueurs sont multipliées par $|k|$ et les aires par k^2 .

Ici $k = 2$, donc les aires sont multipliées par $2^2 = 4$: l'aire du motif 11 est **4 fois** l'aire du motif 1.

Brevet 2021 — Nouvelle-Calédonie

1. Un jeu comporte 4 familles de cartes (banane, prune, citron, fraise). Dans chaque famille, la répartition des cartes est : 5 cartes avec 1 fruit, 3 avec 2 fruits, 3 avec 3 fruits, 2 avec 4 fruits, 1 avec 5 fruits. Montrer que ce jeu comporte 56 cartes.

Chaque famille comporte $5 + 3 + 3 + 2 + 1 = 14$ cartes. Avec 4 familles identiques : $4 \times 14 = 56$ cartes.

2. On tire une carte au hasard parmi les 56, chaque carte ayant la même chance d'être tirée. Soit P l'évènement « la carte tirée est de la famille prune ». Quelle est la probabilité de P ?

Il y a 14 cartes prune sur 56 cartes en tout : $p(P) = \frac{14}{56} = \frac{1}{4} = 0,25$.

3.a Quel est l'évènement contraire de P ?

L'évènement contraire de P est « la carte tirée n'est pas de la famille prune ».

3.b Quelle est la probabilité de cet évènement contraire ?

$$p(\overline{P}) = 1 - p(P) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

4. Quelle est la probabilité de tirer une carte représentant quatre fruits ?

Chaque famille comporte 2 cartes à quatre fruits, soit $4 \times 2 = 8$ cartes à quatre fruits sur 56.

La probabilité est $\frac{8}{56} = \frac{1}{7}$.

Bac Terminale 2021 — Métropole, Mayotte, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

Partie I — 1. Une chaîne de production fabrique des pièces mécaniques, dont 5 % sont défectueuses. Un test appliqué à une pièce détecte le défaut avec une probabilité de 0,98 sachant la pièce défectueuse, et donne un résultat négatif avec une probabilité de 0,97 sachant la pièce non défectueuse. On note D l'évènement « la pièce est défectueuse » et T l'évènement « le test est positif ». Construire l'arbre pondéré associé à cette expérience.

L'arbre part de deux branches D (probabilité 0,05) et $\overline{D}$ (probabilité 0,95). Depuis D partent T (probabilité 0,98) et $\overline{T}$ (probabilité 0,02). Depuis $\overline{D}$ partent T (probabilité 0,03, car $1 - 0,97$) et $\overline{T}$ (probabilité 0,97).

2.a Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse et présente un test positif.

En suivant la branche D puis T de l'arbre : $P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,05 \times 0,98 = 0,049$.

2.b Démontrer que $P(T) = 0,0775$.

On calcule d'abord $P(\overline{D} \cap T) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,95 \times 0,03 = 0,0285$.

D'après la formule des probabilités totales, appliquée à la partition $\{D ; \overline{D}\}$:

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) = 0,049 + 0,0285 = 0,0775.$$

3. On appelle valeur prédictive positive du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que son test est positif. On considère que le test est efficace si cette valeur dépasse 0,95. Calculer cette valeur prédictive positive et conclure sur l'efficacité du test.

La valeur prédictive positive est $P_T(D) = \frac{P(T \cap D)}{P(T)} = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,049}{0,0775} \approx 0,632$.

Comme $0,632 < 0,95$, ce test **n'est pas efficace** au sens de ce critère.

Partie II — 1. On prélève un échantillon de 20 pièces (tirage assimilé à un tirage avec remise) et on note X le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

Le prélèvement, assimilé à un tirage avec remise, répète 20 fois de façon indépendante l'épreuve de Bernoulli « la pièce est défectueuse », de probabilité de succès $p = 0,05$ constante. Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,05$.

2. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au moins une pièce défectueuse (arrondir au centième).

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,95^{20}.$$

À la calculatrice, $1 - 0,95^{20} \approx 0,642$. Donc, la réponse est **0,64** au centième près.

3. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour une loi binomiale, $E(X) = np = 20 \times 0,05 = 1$.

En moyenne, sur un grand nombre d'échantillons de 20 pièces prélevées, on trouve donc **1 pièce défectueuse par échantillon**.

Bac Terminale 2021 — Amérique du Nord

Partie A — Un laboratoire met au point un test anti-dopage. Si un athlète est dopé, le test est positif avec une probabilité de 0,98 ; s'il n'est pas dopé, le test est négatif avec une probabilité de 0,995. On note D l'évènement « l'athlète contrôlé est dopé » et T l'évènement « le test est positif », avec $P(D) = 0,08$. 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

Sur la première branche : $P(D) = 0,08$ et $P(\overline{D}) = 1 - 0,08 = 0,92$.

Depuis D : $P_D(T) = 0,98$ et $P_D(\overline{T}) = 1 - 0,98 = 0,02$.

Depuis $\overline{D}$: le test est négatif avec probabilité 0,995 pour un athlète non dopé, donc $P_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0,995$ et $P_{\overline{D}}(T) = 1 - 0,995 = 0,005$.

Partie A — 2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.

Les évènements D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T)$.

$$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,08 \times 0,98 = 0,0784 \text{ et } P(\overline{D} \cap T) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,92 \times 0,005 = 0,0046.$$

$$\text{Donc } P(T) = 0,0784 + 0,0046 = 0,083.$$

Partie A — 3.a Sachant que le test d'un athlète est positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé (arrondie au millièm) ?

$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0784}{0,083} \approx \mathbf{0,945} \text{ (au millièm).}$$

Partie A — 3.b Le laboratoire commercialise le test si la probabilité qu'un athlète testé positif soit réellement dopé est supérieure ou égale à 0,95. Ce test sera-t-il commercialisé ?

D'après la question précédente, $0,945 < 0,95$, donc le test ne sera pas commercialisé.

Partie B — Dans une compétition, la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103. **1.a** On contrôle 5 athlètes au hasard ; X compte le nombre de tests positifs parmi eux. Donner la loi de X et ses paramètres.

Chaque contrôle est une épreuve à deux issues (positif/négatif) de probabilité $p = 0,103$, répétée $n = 5$ fois de façon indépendante : X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,103$.

Partie B — 1.b Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat.

$$E(X) = np = 5 \times 0,103 = 0,515.$$

Cela signifie que, sur un grand nombre de séries de 5 contrôles, on obtient en moyenne environ 0,515 test positif par série, soit à peu près 1 athlète positif sur 10 contrôlés.

Partie B — 1.c Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif (arrondie au millièm) ?

L'évènement contraire de « au moins un test positif » est « aucun test positif », c'est-à-dire $\{X = 0\}$.

$$P(X = 0) = (1 - 0,103)^5 = 0,897^5 \approx 0,581.$$

$$\text{Donc } P(X \geq 1) = 1 - 0,581 \approx \mathbf{0,419} \text{ (au millièm).}$$

Partie B — 2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité d'avoir au moins un test positif soit supérieure ou égale à 0,75 ?

Pour n athlètes contrôlés, en notant X_n le nombre de tests positifs, $P(X_n = 0) = 0,897^n$, donc $P(X_n \geq 1) = 1 - 0,897^n$.

On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0,897^n \geq 0,75 \iff 0,897^n \leq 0,25$.

À la calculatrice : $0,897^{12} \approx 0,271 > 0,25$ mais $0,897^{13} \approx 0,243 \leq 0,25$.

Donc, la réponse est qu'il faut contrôler au minimum **13 athlètes**.

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 1)

1. Une influenceuse compte $u_0 = 1\,000$ abonnés en 2020. Chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés puis en gagne 250 nouveaux. On note u_n le nombre d'abonnés en l'année $(2020 + n)$. Calculer u_1 .

Perdre 10 % revient à multiplier par 0,9. Donc $u_1 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = 1\,150$ abonnés.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

Multiplier par 0,9 traduit la perte de 10 % des abonnés d'une année sur l'autre.

On ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

3. Une fonction Python 'suite(n)' initialise 'u = 1000', puis répète 'n' fois 'u = 0.9*u + 250', avant de renvoyer 'u'. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la valeur renvoyée par l'appel 'suite(10)'.

La fonction calcule u_{10} , c'est-à-dire le nombre d'abonnés estimé en l'année 2030 ; la calculatrice donne $u_{10} \approx 1\,977$ abonnés.

4.a Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

Initialisation : $u_0 = 1\,000 \leq 2\,500$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq 2\,500$. Comme $0,9 > 0$, la multiplication conserve l'ordre : $0,9u_n \leq 0,9 \times 2\,500 = 2\,250$, puis en ajoutant 250 aux deux membres, $0,9u_n + 250 \leq 2\,500$, soit $u_{n+1} \leq 2\,500$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

4.b Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.

Or, d'après la question précédente, $u_n \leq 2\,500$, donc $0,1u_n \leq 250$, soit $-0,1u_n + 250 \geq 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est **croissante**.

4.c Dédurre des deux questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 500 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

5.a On pose $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n . Montrer que (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1\,500$.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500 = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9(u_n - 2\,500) = 0,9v_n$.

La relation $v_{n+1} = 0,9v_n$, vraie pour tout entier naturel n , montre que (v_n) est géométrique de raison 0,9.

Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

5.b Exprimer v_n en fonction de n , puis montrer que $u_n = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

Comme (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1\,500$, pour tout entier naturel n : $v_n = -1\,500 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 2\,500$, donc $u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

5.c Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Comme $0 < 0,9 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc par produit puis somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\,500$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que le nombre d'abonnés de l'influenceuse **se stabilise autour de 2 500** au fil des années.

6. Écrire un programme qui détermine en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200, puis donner cette année.

- $n = 0$
- $u = 1000$
- tant que $u \leq 2200$:
- $u = 0.9 * u + 250$
- $n = n + 1$
- renvoyer n
- En simulant l'évolution terme à terme, on obtient $u_{15} \approx 2\,191,2 \leq 2\,200$ et $u_{16} \approx 2\,222,0 > 2\,200$: le programme renvoie $n = 16$.
- Donc, la réponse est que le nombre d'abonnés dépasse 2 200 la seizième année suivant 2020, c'est-à-dire en **2036**.

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 2)

1. Une application génère un ticket sur une grille 3×3 où trois cases contiennent chacune un cœur, disposées au hasard. Justifier qu'il existe exactement 84 façons différentes de placer ces trois cœurs sur la grille.

Placer trois cœurs sur la grille revient à choisir 3 cases parmi les 9 de la grille, sans tenir compte de l'ordre : le nombre de façons est donc $\binom{9}{3}$.

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \frac{504}{6} = 84.$$

Il y a bien 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur la grille.

2. Un ticket est gagnant si les trois cœurs sont alignés côte à côte sur une même ligne, une même colonne ou une même diagonale. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant vaut $\frac{2}{21}$.

La grille compte 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales, soit 8 alignements possibles de trois cases : il y a donc 8 grilles gagnantes parmi les 84 grilles possibles (équiprobables).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est $\frac{8}{84} = \frac{2}{21}$ (en simplifiant par 4).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est donc bien égale à $\frac{2}{21}$.

3. À chaque ticket généré, le joueur verse 1 € ; si le ticket est gagnant, la société lui reverse 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Soit X le gain algébrique du joueur pour un ticket. Un ticket gagnant rapporte $5 - 1 = 4$ € (le joueur récupère les 5 € mais a déjà versé 1 €), un ticket perdant coûte 1 €.

$$P(X = 4) = \frac{2}{21} \text{ et } P(X = -1) = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}.$$

$$E(X) = 4 \times \frac{2}{21} + (-1) \times \frac{19}{21} = \frac{8 - 19}{21} = -\frac{11}{21} \approx -0,524.$$

L'espérance de gain est négative : en moyenne, le joueur perd environ 0,52 € par ticket généré. Le jeu est donc défavorable au joueur.

4.a Un joueur génère 20 tickets de façon indépendante. Soit X le nombre de tickets gagnants parmi ces 20 tickets. Donner la loi de probabilité de X .

Chaque génération de ticket est une épreuve à deux issues (gagnant / perdant) de probabilité de succès $p = \frac{2}{21}$, répétée $n = 20$ fois de façon indépendante.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{21}$.

4.b Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 5)$, arrondie à 10^{-3} .

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{2}{21}\right)^5 \times \left(\frac{19}{21}\right)^{15} \approx \mathbf{0,027} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

4.c Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$, arrondie à 10^{-3} , puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$$(X \geq 1) \text{ est l'évènement contraire de } (X = 0), \text{ donc } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^{20} \approx 1 - 0,135 \approx \mathbf{0,865} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

Sur 20 tickets générés, le joueur a donc environ 86,5 % de chances d'obtenir au moins un ticket gagnant.

Bac Terminale 2021 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. QCM. On étudie g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2x - \frac{3}{x}$. Parmi les quatre équations proposées, laquelle est celle de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1 ?

$$g \text{ est dérivable sur }]0 ; +\infty[\text{ et pour tout } x \text{ de cet intervalle : } g'(x) = 2x + 2 + \frac{3}{x^2}.$$

$$\text{On calcule } g'(1) = 2 + 2 + 3 = 7 \text{ et } g(1) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

$$\text{Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est } y = g'(1)(x - 1) + g(1) = 7(x - 1), \text{ soit } y = 7x - 7.$$

$$\text{Donc, la réponse est } \mathbf{a.} \ y = 7(x - 1).$$

2. QCM. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{3n}{n+2}$. Quelle est la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$?

$$\text{Pour } n \geq 1, \text{ on peut écrire } v_n = \frac{3n}{n(1 + \frac{2}{n})} = \frac{3}{1 + \frac{2}{n}}.$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0, \text{ le dénominateur tend vers 1, donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3.$$

$$\text{Donc, la réponse est } \mathbf{b.} \ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3.$$

3. QCM. Une urne contient 6 boules noires et 4 boules rouges. On effectue 10 tirages successifs avec remise. Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près, d'obtenir exactement 4 boules noires et 6 boules rouges ?

Si X désigne le nombre de boules noires obtenues sur les 10 tirages, chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,6$ (tirage avec remise), donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,6$.

$$\text{On veut } P(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,6^4 \times 0,4^6 \approx 0,11148, \text{ soit environ } \mathbf{0,1115} \text{ à } 10^{-4} \text{ près}.$$

Donc, la réponse est **c. 0,1115**.

4. QCM. On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^x - x$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?

Pour $x \neq 0$, on factorise : $f(x) = x \left(3\frac{e^x}{x} - 1 \right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (croissance comparée), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$.

Par produit de limites (avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$), on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc, la réponse est **b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$** .

5. QCM. Un code secret comporte 8 caractères, chacun étant une lettre ou un chiffre parmi 36 signes possibles. Un logiciel teste environ 100 millions de codes par seconde. En combien de temps, au maximum, peut-il trouver le code ?

Le nombre total de codes possibles est $36^8 = 2\,821\,109\,907\,456$.

Au rythme de 10^8 codes par seconde, il faut au maximum $\frac{2\,821\,109\,907\,456}{10^8} \approx 28\,211$ secondes, soit environ 470 minutes, soit environ 7,8 heures.

Donc, la réponse est **b. environ 8 heures**.

Bac Terminale 2021 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A (avec $a = \frac{2}{3}$) — 1. ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE, J est le point du segment [CG] tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$. Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de F, I et J.

Le cube a pour arête 1 dans ce repère, donc F, sommet opposé à D sur la face supérieure du carré ABFE, a pour coordonnées F(1 ; 0 ; 1).

I est le centre de la face ADHE, donc le milieu de [AH] (et aussi de [DE]) : $I\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Comme $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ avec C(1 ; 1 ; 0) et G(1 ; 1 ; 1), on a $J\left(1 ; 1 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 2. On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ). Déterminer une représentation paramétrique de (d).

$$\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ (obtenu par } J - F\text{)}.$$

(d) passe par $I\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et admet $\overrightarrow{FJ}$ pour vecteur directeur, donc une représentation paramétrique de (d) est : $x = 0, y = \frac{1}{2} + t, z = \frac{1}{2} - \frac{t}{3}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Partie A — 3.a K est le point d'intersection de (d) et de (AE). Montrer que K a pour coordonnées $\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.

La droite (AE) est l'axe des cotes (points d'ordonnée nulle). On cherche donc le point de (d) tel que $y = 0 : \frac{1}{2} + t = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$.

La cote correspondante vaut $z = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

On obtient bien $K\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 3.b Déterminer les coordonnées du point L, intersection de (d) et de (DH).

Tous les points de (DH) ont pour ordonnée 1. On cherche donc le point de (d) tel que $y = 1 : \frac{1}{2} + t = 1 \iff t = \frac{1}{2}$.

La cote correspondante vaut $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Donc, la réponse est $L\left(0 ; 1 ; \frac{1}{3}\right)$.

Partie A — 4.a Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.

Le milieu de [FL] a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2} ; \frac{0+1}{2} ; \frac{1+\frac{1}{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{2}{3}\right)$.

Le milieu de [JK] a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2} ; \frac{1+0}{2} ; \frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{2}{3}\right)$.

Les diagonales [FL] et [JK] ont le même milieu : **FJLK est donc un parallélogramme.**

Partie A — 4.b Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.

$$\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) + \left(-\frac{2}{3}\right) \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0.$$

Les diagonales du parallélogramme FJLK sont donc perpendiculaires : **FJLK est un losange.**

Partie A — 4.c Le quadrilatère FJLK est-il un carré ?

$$\overrightarrow{KF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{KF} \cdot \overrightarrow{FJ} = 0 + 0 - \frac{1}{9} = -\frac{1}{9} \neq 0.$$

Les côtés consécutifs $[KF]$ et $[FJ]$ ne sont donc pas perpendiculaires : le losange FJLK n'est pas un rectangle, donc, la réponse est **non, FJLK n'est pas un carré**.

Partie B (cas général) — 1. On admet désormais que $K\left(0 ; 0 ; 1 - \frac{a}{2}\right)$ et $L\left(0 ; 1 ; \frac{a}{2}\right)$, avec $a \in [0 ; 1]$. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a .

$$G \text{ a pour coordonnées } (1 ; 1 ; 1), \text{ donc } \overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Comme $C(1 ; 1 ; 0)$, on en déduit $J(1 ; 1 ; a)$.

Partie B — 2. Montrer que FJLK est un parallélogramme, quelle que soit la valeur de a .

$$\overrightarrow{FJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ (en calculant } \frac{a}{2} - \left(1 - \frac{a}{2}\right) = a-1).$$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{KL}$: FJLK est donc un parallélogramme pour toute valeur de a .

Partie B — 3. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles FJLK est un losange ?

$$\overrightarrow{FL} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{a}{2} - 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 - \frac{3a}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = 1 - 1 + \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right).$$

Ce produit s'annule si et seulement si $\frac{a}{2} = 1$ (soit $a = 2$) ou $1 = \frac{3a}{2}$ (soit $a = \frac{2}{3}$).

Seule la valeur $a = \frac{2}{3}$ appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$: dans ce cas, les diagonales du parallélogramme FJLK sont perpendiculaires, donc, la réponse est **oui, uniquement pour $a = \frac{2}{3}$, FJLK est un losange**.

Partie B — 4. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles FJLK est un carré ?

D'après la question précédente, la seule valeur de a rendant FJLK losange est $a = \frac{2}{3}$, cas déjà étudié en partie A où l'on a montré que ce losange n'était pas un carré : donc, la réponse est **non, il n'existe aucune valeur de a pour laquelle FJLK est un carré**.

Bac Terminale 2021 — Polynésie française

Un test de dépistage est développé pour une maladie touchant 7 % de la population d'un pays. Parmi les personnes infectées, 20 % obtiennent un résultat négatif au test ; parmi les personnes saines, 1 % obtiennent un résultat positif. On choisit une personne au hasard et on note M l'évènement « la personne est infectée » et T l'évènement « le test est positif ». 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

On a $P(M) = 0,07$ et donc $P(\overline{M}) = 1 - 0,07 = 0,93$.

Puisque 20 % des personnes infectées ont un résultat négatif : $P_M(\overline{T}) = 0,2$, donc $P_M(T) = 1 - 0,2 = 0,8$.

Puisque 1 % des personnes saines ont un résultat positif : $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$, donc $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 1 - 0,01 = 0,99$.

L'arbre pondéré a donc pour première branche $P(M) = 0,07$ et $P(\overline{M}) = 0,93$, puis les branches secondaires $P_M(T) = 0,8$, $P_M(\overline{T}) = 0,2$, $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,99$.

2.a Quelle est la probabilité que la personne choisie soit infectée et ait un test positif ?

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = \mathbf{0,056}.$$

2.b Montrer que la probabilité que le test soit positif vaut 0,0653.

$$\text{On calcule d'abord } P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093.$$

Les évènements M et $\overline{M}$ formant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,056 + 0,0093 = 0,0653$.

3. Sachant que le test de la personne choisie est positif, quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-2} près.

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,056}{0,0653} \approx 0,8576, \text{ soit environ } \mathbf{0,86} \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

4.a On interroge dix personnes au hasard dans la population, ce que l'on assimile à un tirage avec remise du fait de la taille de la population. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes ayant un test positif parmi les dix. Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.

Le tirage avec remise revient à répéter dix fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues (test positif ou non) de probabilité de succès $P(T) = 0,0653$: X suit donc la **loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,0653$** .

4.b Déterminer la probabilité que, parmi les dix personnes interrogées, exactement deux aient un test positif (résultat arrondi à 10^{-2} près).

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^{10-2} = 45 \times 0,0653^2 \times 0,9347^8.$$

À la calculatrice, $P(X = 2) \approx 0,1118$, soit environ **0,11** à 10^{-2} près.

5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif dépasse 99 %.

Pour n personnes testées, en notant X_n le nombre de tests positifs, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,0653$, donc $P(X_n = 0) = (1 - 0,0653)^n = 0,9347^n$, d'où $P(X_n \geq 1) = 1 - 0,9347^n$.

On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0,9347^n > 0,99 \iff 0,9347^n < 0,01$.

En passant au logarithme népérien (la fonction $\ln$ est strictement croissante, et $\ln 0,9347 < 0$, donc l'inégalité change de sens) : $n \ln 0,9347 < \ln 0,01 \iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,9347}$.

Or $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} \approx 68,19$.

Donc, la réponse est qu'il faut tester au minimum **69 personnes**.

Brevet 2020 — Amérique du Nord

1.a On dispose d'une urne bleue avec trois boules numérotées et d'une urne rouge avec quatre boules numérotées . On tire une boule bleue puis une boule rouge. Les événements « on obtient deux nombres premiers » et « la somme des deux nombres vaut 12 » sont-ils possibles ?

Les tirages possibles sont les 6 numéros premiers combinables : $(2;2)$, $(2;3)$, $(2;5)$, $(3;2)$, $(3;3)$, $(3;5)$ — l'événement « deux nombres premiers » est donc **possible**.

La somme la plus grande possible est $4 + 5 = 9$, donc atteindre 12 est **impossible**.

1.b Déterminer la probabilité de l'évènement « on obtient deux nombres premiers ».

Il y a $3 \times 4 = 12$ tirages possibles au total, et 6 d'entre eux donnent deux nombres premiers (voir question précédente) : la probabilité est $\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \mathbf{0,5}$.

2. On obtient un « double » lorsque les deux boules tirées portent le même numéro. Justifier que la probabilité d'obtenir un double est $\frac{1}{4}$.

Les doubles possibles sont $(2;2)$, $(3;3)$ et $(4;4)$, soit 3 tirages sur les 12 possibles : la probabilité est $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

3. On veut simuler cette expérience 1 000 fois avec un programme Scratch incomplet, où le bloc « Tirer deux boules » choisit un nombre aléatoire entre 2 et B pour la boule bleue, et entre 2 et C pour la boule rouge, dans une boucle « répéter A fois ». Par quels nombres remplacer A, B et C ?

On simule 1 000 répétitions de l'expérience, avec une boule bleue entre 2 et 4, et une boule rouge entre 2 et 5 : **A = 1000, B = 4, C = 5.**

4. Où placer le bloc « Tirer deux boules » dans le script principal ?

Ce bloc doit être exécuté à chaque répétition, donc **à l'intérieur de la boucle « répéter 1000 fois »**, avant le test qui compare les deux boules tirées.

5. Où placer le bloc qui initialise le « Nombre de doubles » à 0 ?

Cette initialisation ne doit se faire qu'une seule fois, donc **avant la boucle « répéter 1000 fois »**.

6. Pour obtenir la fréquence d'apparition des doubles, quelle instruction placer à la fin du script, après la boucle « répéter » ? (parmi : afficher Nombre de doubles ; afficher Nombre de doubles / 1000 ; afficher Nombre de doubles / 2)

La fréquence s'obtient en divisant le nombre de doubles obtenus par le nombre total d'expériences (1000) : il faut **afficher Nombre de doubles / 1000.**

Brevet 2019 — Métropole, Antilles et Guyane

1. Un capitaine possède un trésor composé de 69 diamants, 1 150 perles et 4 140 pièces d'or. Décomposer ces trois nombres en produits de facteurs premiers.

$$69 = 3 \times 23.$$

$$1\,150 = 2 \times 5^2 \times 23.$$

$$4\,140 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23.$$

2. Le capitaine partage équitablement tout le trésor (diamants, perles et pièces) entre les marins de l'équipage, sans qu'il en reste. Combien y a-t-il de marins ?

Le nombre de marins doit diviser à la fois 69, 1 150 et 4 140 : c'est un diviseur commun aux trois nombres.

D'après les décompositions précédentes, le seul facteur premier commun aux trois nombres est **23**, avec l'exposant 1 dans chaque cas.

Le trésor est donc partagé entre **23 marins.**

Brevet 2018 — Amérique du Nord

1. Deux urnes contiennent des boules numérotées : l'urne D contient 1, 2, 3 ; l'urne U contient 2, 3, 5, 6. On tire une boule de chaque urne pour former un nombre à deux chiffres (dizaine = urne D, unité = urne U). A-t-on plus de chances de former un nombre pair qu'un nombre impair ?

Les nombres pairs possibles sont 12, 16, 22, 26, 32, 36, soit 6 nombres pairs.

Les nombres impairs possibles sont 13, 15, 23, 25, 33, 35, soit 6 nombres impairs.

Il y a autant de chances de former un nombre pair que d'en former un impair.

2.a Sans justifier, indiquer les nombres premiers que l'on peut former.

On peut former **13 et 23**, qui sont premiers.

2.b Montrer que la probabilité de former un nombre premier est $\frac{1}{6}$.

Il y a $3 \times 4 = 12$ nombres différents possibles au total, et 2 d'entre eux sont premiers (13 et 23).

La probabilité de former un nombre premier est donc $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

3. Définir un évènement dont la probabilité est $\frac{1}{3}$.

Par exemple, l'évènement « obtenir un nombre inférieur à 17 » regroupe 4 nombres (12, 13, 15, 16) sur 12, soit une probabilité de $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Brevet 2018 — Pondichéry

1. Un plateau tournant comporte 13 cases numérotées de 0 à 12, toutes équiprobables. Quelle est la probabilité que la boule s'arrête sur la case numérotée 8 ?

Une seule case porte le numéro 8, sur 13 cases possibles : la probabilité est donc $\frac{1}{13}$.

2. Quelle est la probabilité que le numéro de la case sur laquelle la boule s'arrête soit un nombre impair ?

Parmi les nombres de 0 à 12, les nombres impairs sont 1, 3, 5, 7, 9 et 11 : il y en a 6. La probabilité est donc $\frac{6}{13}$.

3. Quelle est la probabilité que ce numéro soit un nombre premier ?

Parmi les nombres de 0 à 12, les nombres premiers sont 2, 3, 5, 7 et 11 : il y en a 5. La probabilité est donc $\frac{5}{13}$.

4. Lors des deux derniers lancers, la boule s'est arrêtée à chaque fois sur la case numérotée 9. A-t-on maintenant plus de chances que la boule s'arrête sur la case 9 plutôt que sur la case 7 ?

Chaque lancer est indépendant des précédents : le plateau ne « garde pas la mémoire » des lancers passés.

À chaque lancer, la probabilité de s'arrêter sur la case 9 reste égale à $\frac{1}{13}$, tout comme celle de s'arrêter sur la case 7.

Donc, la réponse est non : il n'y a pas plus de chances de tomber sur la case 9 que sur la case 7.

Brevet 2018 — Pondichéry

1. Une fléchette est représentée par le point F de coordonnées (72 ; 54) dans un repère d'origine O. En notant H le projeté de F sur l'axe des abscisses (donc OH = 72 et HF = 54), montrer que la distance OF vaut 90.

Le triangle OFH est rectangle en H (par construction, HF est vertical et OH horizontal).

D'une part, OF^2 est la quantité que l'on cherche à calculer.

D'autre part, d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle OFH rectangle en H, $OF^2 = OH^2 + HF^2 = 72^2 + 54^2 = 5\,184 + 2\,916 = 8\,100$.

On a donc $OF = \sqrt{8\,100} = 90$.

Donc, d'après le théorème de Pythagore, **la distance OF est bien égale à 90.**

2. La cible est un disque de rayon 100 centré en O. D'une façon générale, quel nombre ne doit pas dépasser la distance OF pour que la fléchette atteigne la cible ?

Pour que le point F soit à l'intérieur du disque, il faut et il suffit que la distance OF soit strictement inférieure au rayon du disque : **la distance OF ne doit pas dépasser 100** (elle doit même lui être strictement inférieure).

3.a Un programme simule des lancers de fléchette, avec des coordonnées x et y aléatoires entre -100 et 100, répétés dans une boucle « répéter 120 fois ». Combien de lancers sont simulés à chaque exécution ?

La boucle du programme est répétée 120 fois : le programme simule donc **120 lancers**.

3.b Quel est le rôle de la variable score dans ce programme ?

La variable **score** compte, au fil des 120 lancers simulés, le nombre de fléchettes qui ont atteint la cible.

3.c Le programme utilise trois variables : carré de OF, distance et score. Comment compléter les lignes qui calculent le carré de OF, la distance, puis testent si la cible est atteinte ?

La variable carré de OF doit recevoir la somme du carré de l'abscisse et du carré de l'ordonnée du point simulé, soit $(\text{abscisse } x) \times (\text{abscisse } x) + (\text{ordonnée } y) \times (\text{ordonnée } y)$.

La variable distance doit recevoir la racine carrée de la variable carré de OF.

Le test doit ensuite comparer la variable distance à la valeur 100 : si distance est inférieure à 100, on ajoute 1 au score.

3.d Après une exécution du programme, la variable score est égale à 102. À quelle fréquence la cible a-t-elle été atteinte ? Exprimer le résultat sous forme de fraction irréductible.

La fréquence de réussite est $\frac{102}{120}$.

On simplifie : $\frac{102}{120} = \frac{51}{60} = \frac{17}{20}$ (en divisant par 2 puis par 3).

Donc, la réponse est $\frac{17}{20}$.

4. On admet que la probabilité d'atteindre la cible est égale au quotient de l'aire de la cible par l'aire de la plaque carrée (côté 200, rayon de la cible 100). Donner une valeur approchée de cette probabilité au centième près.

L'aire de la plaque carrée est $200^2 = 40\,000$.

L'aire de la cible (disque de rayon 100) est $\pi \times 100^2 = 10\,000\pi$.

La probabilité est donc $\frac{10\,000\pi}{40\,000} = \frac{\pi}{4} \approx \mathbf{0,79}$ au centième près.