

Produit scalaire — Tous les corrigés

LOGIMATHS

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 1)

1.a Affirmation 1 : Le plan (P) est orthogonal à la droite (AB), et passe par le milieu de [AB].

Un vecteur normal au plan (P) : $-x + y - 5z - 0,5 = 0$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2-3 \\ 1-0 \\ -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux, donc colinéaires : la droite (AB) est donc orthogonale au plan (P).

Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{3+2}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{2-3}{2}\right) = (2,5; 0,5; -0,5)$.

On vérifie : $-2,5 + 0,5 - 5 \times (-0,5) - 0,5 = -2,5 + 0,5 + 2,5 - 0,5 = 0$: le milieu appartient bien à (P).

L'affirmation 1 est VRAIE.

1.b Affirmation 2 : Les droites (d) et (AB) sont sécantes.

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, non colinéaire à $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$: les droites ne sont pas parallèles.

Cherchons un éventuel point d'intersection en résolvant $t = 3 - s$ et $-1,5 - t = s$ (paramètres de (d) et (AB)).

En substituant : $-1,5 - (3 - s) = s$, soit $-4,5 + s = s$, soit $-4,5 = 0$, ce qui est impossible.

Le système n'a donc pas de solution : les droites (d) et (AB) ne sont pas sécantes (elles sont non coplanaires).

L'affirmation 2 est FAUSSE.

1.c Affirmation 3 : La mesure de l'angle ACB, arrondie à 10^{-1} , est égale à $70,5^\circ$ ($C(1,5; -3; -1)$).

$$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 3-1,5 \\ 0-(-3) \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 2-1,5 \\ 1-(-3) \\ -3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 1,5 \times 0,5 + 3 \times 4 + 3 \times (-2) = 0,75 + 12 - 6 = 6,75.$$

$$CA = \sqrt{1,5^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{20,25} = 4,5 \text{ et } CB = \sqrt{0,5^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20,25} = 4,5.$$

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{CA \times CB} = \frac{6,75}{4,5 \times 4,5} = \frac{6,75}{20,25} = \frac{1}{3}.$$

$$\widehat{ACB} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,5^\circ.$$

L'affirmation 3 est VRAIE.

2. Affirmation 4 : Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

Le digicode de la porte A utilise 3 symboles distincts parmi 8, saisis dans un ordre précis : il y a $8 \times 7 \times 6 = 336$ codes possibles.

Le digicode de la porte B utilise 4 symboles distincts parmi 8, saisis dans n'importe quel ordre : il y a $\binom{8}{4} = 70$ codes possibles.

Clotilde choisit un code au hasard pour la porte A : $P(\text{ouvrir}) = \frac{1}{336} \approx 0,0030$.

Titouan choisit un code au hasard pour la porte B : $P(\text{ouvrir}) = \frac{1}{70} \approx 0,0143$.

Comme $\frac{1}{70} > \frac{1}{336}$, Titouan a bien plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

L'affirmation 4 est VRAIE.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan ($A(2; 1; 1)$, $B(3; -2; 0)$, $C(0; -1; 1)$).

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-2 \\ -2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-2 \\ -1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ont des coordonnées non proportionnelles (par exemple $\frac{1}{-2} \neq \frac{-3}{-2}$), donc ils ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés : **ils définissent bien un plan.**

2.a Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; -1; 4)$ est normal au plan (ABC).

On calcule les produits scalaires (le repère est orthonormé) :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + (-1) \times (-3) + 4 \times (-1) = 1 + 3 - 4 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) + 4 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : $\vec{n}$ est donc un vecteur normal à (ABC).

2.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x - y + 4z - 5 = 0$.

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ étant normal à (ABC), une équation de ce plan est de la forme $x - y + 4z + d = 0$.

Comme A appartient à (ABC) : $2 - 1 + 4 \times 1 + d = 0$, soit $5 + d = 0$, donc $d = -5$.

Une équation cartésienne de (ABC) est donc $x - y + 4z - 5 = 0$.

3. Vérifier la représentation paramétrique donnée de la droite Δ passant par D et orthogonale au plan (ABC).

Une droite orthogonale au plan (ABC) est dirigée par un vecteur normal à ce plan, ici $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Comme Δ passe par $D(0; 0; 2)$, une représentation paramétrique de Δ est $x = 0 + 1t$, $y = 0 - 1t$, $z = 2 + 4t$, soit bien $x = t$, $y = -t$, $z = 2 + 4t$ avec $t \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point $H(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3})$.

Le projeté orthogonal de D sur (ABC) est le point d'intersection de Δ et de (ABC).

Un point de Δ a pour coordonnées $(t; -t; 2 + 4t)$. En le substituant dans l'équation du plan :

$$t - (-t) + 4(2 + 4t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 2t + 8 + 16t - 5 = 0 \Leftrightarrow 18t = -3 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{6}$$

Les coordonnées de H sont donc $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; 2 - \frac{4}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$.

5.a Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$$

$$CB = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-(-1))^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

Comme $AB = CB$, le triangle ABC est isocèle en B.

5.b Montrer que l'aire du triangle ABC est $3\sqrt{2}$.

Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal (ici B) passe par le milieu I de la base [AC].

$$I = \left(\frac{2+0}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{1+1}{2} \right) = (1; 0; 1)$$

$$AC = \sqrt{(0-2)^2 + (-1-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ et } BI = \sqrt{(1-3)^2 + (0-(-2))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Aire} = \frac{AC \times BI}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 3}{2} = 3\sqrt{2}.$$

6.a En déduire que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 1.

En choisissant ABC comme base, la hauteur associée est la distance DH (H étant le projeté orthogonal de D sur (ABC), question 4).

$$DH = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{18}{36}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \times 3 = 1.$$

6.b Sachant que la distance de A au plan (BCD) vaut $\sqrt{2}$, en déduire l'aire du triangle BCD.

En reprenant le volume avec BCD comme base et $h = \sqrt{2}$ comme hauteur associée : $V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{BCD} \times h$.

$$1 = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{BCD} \times \sqrt{2}, \text{ donc } \text{Aire}_{BCD} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

7.a Déterminer k pour lequel A, B, C et $D_k(0; 0; k)$ sont coplanaires. Quel est alors le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) ?

D_k appartient au plan (ABC) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$0 - 0 + 4k - 5 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{5}{4}$$

Pour $k = \frac{5}{4}$, le point D_k appartient déjà au plan (ABC) : son projeté orthogonal sur (ABC) est donc **lui-même**.

7.b Peut-on trouver une valeur de k telle que A soit le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) ?

Pour que A soit le projeté orthogonal de D_k sur (ABC), le vecteur $\overrightarrow{AD_k}$ devrait être colinéaire au

vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AD_k} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-1 \\ k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ k-1 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières coordonnées seraient dans un rapport $\frac{-2}{1} = -2$ pour $\overrightarrow{AD_k}$, contre $\frac{-1}{-1} = 1$ pour $\vec{n}$: ces rapports sont différents, quelle que soit la valeur de k .

Non, il n'existe aucune valeur de k pour laquelle A est le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) .

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)

A.1.a Montrer que le triangle ABC est isocèle en C.

Le repère étant orthonormé : $AC = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{81}{16} + \frac{144}{16}} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}$.

$$CB = \sqrt{\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}.$$

Comme $AC = CB$, le triangle ABC est isocèle en C.

A.1.b Montrer que l'aire du triangle ABC est 6,75 m².

Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal C est aussi une médiane : elle passe par I, milieu de [AB], de coordonnées $\left(\frac{9}{4}; 0; 0\right)$.

$$AB = \frac{9}{2} \text{ et } CI = \sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} = 3.$$

$$\text{Aire} = \frac{AB \times CI}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 3 = \mathbf{6,75 \text{ m}^2}.$$

A.2.a Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $z = 0$.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ont des coordonnées non proportionnelles : A, B, C ne sont pas alignés et définissent un plan.

Comme $z_A = z_B = z_C = 0$, une équation cartésienne du plan (ABC) est bien $z = 0$.

A.2.b Montrer que $H\left(\frac{3}{2}; 1; 0\right)$ est le projeté orthogonal de D sur (ABC).

$z_H = 0$, donc H appartient à (ABC).

$\overrightarrow{HD} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\vec{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, normal à (ABC) (car l'équation du plan est $z = 0$) : la droite (HD) est donc orthogonale à (ABC).

H est donc bien le projeté orthogonal de D sur (ABC).

A.3 En déduire le volume du module.

En choisissant ABC comme base, la hauteur associée est $DH = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = 3$.

$$V = \frac{1}{3} \times 6,75 \times 3 = \mathbf{6,75 \text{ m}^3}.$$

B.1.a Montrer que $\vec{n}(4; 3; 3)$ est normal au plan (BCD).

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : B, C, D définissent bien un plan.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \times \left(-\frac{9}{4}\right) + 3 \times 3 + 3 \times 0 = -9 + 9 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 4 \times (-3) + 3 \times 1 + 3 \times 3 = -12 + 3 + 9 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD) : $\vec{n}$ est donc normal à (BCD).

B.1.b En déduire qu'une équation cartésienne de (BCD) est $4x + 3y + 3z - 18 = 0$.

Une équation de (BCD) est de la forme $4x + 3y + 3z + d = 0$. Comme $B\left(\frac{9}{2}; 0; 0\right) \in (BCD)$: $4 \times \frac{9}{2} + d = 0$, donc $d = -18$.

Une équation cartésienne de (BCD) est donc bien $4x + 3y + 3z - 18 = 0$.

B.1.c Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale à (BCD) passant par D.

$$\Delta \text{ est dirigée par } \vec{n}(4; 3; 3) \text{ et passe par } D\left(\frac{3}{2}; 1; 3\right) : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

B.2 Montrer que L a pour coordonnées $\left(-\frac{5}{2}; -2; 0\right)$.

L, point de Δ , a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2} + 4t_0; 1 + 3t_0; 3 + 3t_0\right)$ pour un certain t_0 , et vérifie l'équation de (ABC), soit $z = 0$.

$$3 + 3t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = -1.$$

En remplaçant : $x = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}$, $y = 1 - 3 = -2$, $z = 0$: L a bien pour coordonnées $\left(-\frac{5}{2}; -2; 0\right)$.

B.3 Montrer que le module est adapté aux débutants.

$$\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DL} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DL} = 0 \times (-4) + 0 \times (-3) + (-3) \times (-3) = 9.$$

Or $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DL} = DH \times DL \times \cos(\widehat{LDH})$, avec $DH = 3$ et $DL = \sqrt{16 + 9 + 9} = \sqrt{34}$.

$$\cos(\widehat{LDH}) = \frac{9}{3\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}, \text{ donc } \widehat{LDH} \approx 59,04^\circ.$$

Comme $59,04^\circ < 60^\circ$, le module est bien adapté aux débutants.

Bac Première 2026 — Métropole (SPE)

1. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KP}$ et sa norme. ($P(4;0)$, $K(1;0)$)

$$\overrightarrow{KP} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ de norme } 3.$$

2. Exprimer en fonction de x les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KM}$ et sa norme. ($M(x;3)$)

$$\overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} x-1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ de norme } \sqrt{(x-1)^2 + 9}.$$

3. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{KM}$ est égal à $3x - 3$.

$$\overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{KM} = 3(x-1) + 0 \times 3 = 3x - 3.$$

4. Montrer que, si l'angle $\widehat{PKM}$ vaut $\pi/3$, alors x est solution de (E) : $\sqrt{(x-1)^2 + 9} = 2x - 2$.

$$\overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{KM} = KP \times KM \times \cos(\widehat{PKM}) = 3 \times \sqrt{(x-1)^2 + 9} \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} \sqrt{(x-1)^2 + 9} \quad (\text{car } \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}).$$

Or ce produit scalaire vaut aussi $3x-3$ (question 3) : $\frac{3}{2} \sqrt{(x-1)^2 + 9} = 3x-3 \iff \sqrt{(x-1)^2 + 9} = 2x-2$.

x est donc bien solution de l'équation (E) lorsque l'angle $\widehat{PKM}$ vaut $\frac{\pi}{3}$.

5. Vérifier que $1 + \sqrt{3}$ est solution de (E).

En élevant au carré (valide car $2x-2 \geq 0$ pour une solution) : $(x-1)^2 + 9 = (2x-2)^2 \iff 3x^2 - 6x - 6 = 0$.

Discriminant : $\Delta = 36 + 72 = 108 = (6\sqrt{3})^2$. Les solutions sont $\frac{6 \pm 6\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \sqrt{3}$.

$1 + \sqrt{3}$ est donc bien solution de l'équation (E).

Bac Première 2026 — Centres étrangers G1 (SPE)

- 1.a Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. ($A(-1;5)$, $B(3;5)$, $C(4;0)$)

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 5 - 5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 - (-1) \\ 0 - 5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

1.b En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Le repère étant orthonormé : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 5 + 0 \times (-5) = \mathbf{20}$.

2.a Montrer que $AC = 5\sqrt{2}$.

$$AC = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}.$$

2.b Écrire l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de l'angle BAC (on admet $AB = 4$).

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 4 \times 5\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC}) = 20\sqrt{2} \cos(\widehat{BAC}).$$

2.c En déduire une mesure, en radian, de l'angle BAC .

En combinant les deux expressions du produit scalaire : $20 = 20\sqrt{2} \cos(\widehat{BAC}) \iff \cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On reconnaît un cosinus usuel : $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$ radian.

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 1)

L'espace est muni d'un repère orthonormé. La droite (d) a pour représentation paramétrique $x = 3 - 2t$, $y = -1$, $z = 2 - 6t$ (t réel). On donne $A(3; -3; -2)$, $B(5; -4; -1)$, C le point de (d) d'abscisse 2, et H le projeté orthogonal de B sur le plan P d'équation $x + 3z - 7 = 0$. **Affirmation 1 : la droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires. Vraie ou fausse ?**

(d) est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ et l'axe des ordonnées par $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires

(ils sont même orthogonaux), donc les droites ne sont ni parallèles ni confondues.

L'axe des ordonnées passe par l'origine et a pour représentation paramétrique $x = 0$, $y = s$, $z = 0$. Chercher un point commun revient à résoudre $3 - 2t = 0$, $-1 = s$, $2 - 6t = 0$, soit $t = 1,5$ et $t = \frac{1}{3}$ simultanément : système impossible, donc les droites ne sont pas sécantes.

Les droites ne sont ni parallèles, ni confondues, ni sécantes : elles sont donc non coplanaires. **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 2 : le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne $x + 3z + 3 = 0$. Vraie ou fausse ?

(d) est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, colinéaire à $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, qui est donc un vecteur normal du plan cherché : une équation du plan est de la forme $x + 3z + d = 0$.

Le point A appartient au plan : $3 + 3 \times (-2) + d = 0 \iff d = 3$.

Le plan a donc pour équation $x + 3z + 3 = 0$. **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 3 : une mesure, en radian, de l'angle géométrique BAC est $\pi/6$. Vraie ou fausse ?

C appartient à (d) et a pour abscisse 2 : $3 - 2t = 2 \iff t = \frac{1}{2}$, d'où $z_C = 2 - 6 \times \frac{1}{2} = -1$, soit $C(2 ; -1 ; -1)$.

$\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = -3$.

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ et $\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

Or $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, donc $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{-3}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = -\frac{1}{2}$, soit $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

$\frac{2\pi}{3} \neq \frac{\pi}{6}$: **l'affirmation est fausse.**

Affirmation 4 : la distance BH est égale à $\sqrt{\frac{10}{2}}$. Vraie ou fausse ?

Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, normal au plan P, dirige la droite Δ orthogonale à P passant par B : une représentation paramétrique de Δ est $x = 5+t$, $y = -4$, $z = -1+3t$.

L'intersection avec P vérifie $(5+t) + 3(-1+3t) - 7 = 0 \iff 10t = 5 \iff t = \frac{1}{2}$, donc $H(\frac{11}{2} ; -4 ; \frac{1}{2})$.

$\vec{BH} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, donc $\|\vec{BH}\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4}$, soit $BH = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

L'affirmation est vraie.

Bac Terminale 2025 — Asie (jour 1)

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne α réel, $A(1; 1; 0)$, $B(2; 1; 0)$, $C(\alpha; 3; \alpha)$, et (d) : $x=1+t$, $y=2t$, $z=-t$. Affirmation 1 : pour toute valeur de α , A, B, C définissent un plan dont un vecteur normal est $\vec{j}(0; 1; 0)$. Vraie ou fausse ?

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$ ne sont jamais colinéaires (leurs deuxièmes coordonnées sont 0 et 2) : A, B, C définissent bien un plan quel que soit α .

Le repère étant orthonormé : $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{j} = (\alpha - 1) \times 0 + 2 \times 1 + \alpha \times 0 = 2 \neq 0$.

$\vec{j}$ n'est donc pas orthogonal à $\overrightarrow{AC}$, donc ce n'est pas un vecteur normal au plan (ABC). **L'affirmation est fausse.**

Affirmation 2 : il existe exactement une valeur de α telle que (AC) et (d) soient parallèles. Vraie ou fausse ?

(d) est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et (AC) par $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ont la même deuxième coordonnée (2), donc pour qu'ils soient colinéaires, il faudrait qu'ils soient égaux.

Cela exigerait $\alpha - 1 = 1$ (soit $\alpha = 2$) et $\alpha = -1$ simultanément, ce qui est impossible.

Quel que soit α , les vecteurs ne sont donc jamais colinéaires : **l'affirmation est fausse.**

Affirmation 3 : une mesure de l'angle OAB est 135° . Vraie ou fausse ?

$\overrightarrow{AO} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \times 1 + (-1) \times 0 + 0 \times 0 = -1$.

$AO = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $AB = \sqrt{1^2} = 1$, donc $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = AO \times AB \times \cos(\widehat{OAB}) = \sqrt{2} \cos(\widehat{OAB})$.

$-1 = \sqrt{2} \cos(\widehat{OAB}) \iff \cos(\widehat{OAB}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui correspond à un angle de $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, soit 135° . **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 4 : le projeté orthogonal de A sur (d) est le point H(1; 2; 2). Vraie ou fausse ?

Pour que $x_H = 1 + t$ avec $x_H = 1$, il faut $t = 0$; mais alors $y = 2 \times 0 = 0 \neq 2$ et $z = -0 = 0 \neq 2$: H ne vérifie pas la représentation paramétrique de (d), donc **H n'appartient même pas à (d)** : l'affirmation est fausse.

Affirmation 5 : la sphère de centre O et de rayon 1 rencontre (d) en deux points distincts. Vraie ou fausse ?

Un point M_t de (d) vérifie $OM_t = \sqrt{(1+t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2} = \sqrt{6t^2 + 2t + 1}$.

$$OM_t = 1 \iff 6t^2 + 2t + 1 = 1 \iff 6t^2 + 2t = 0 \iff 2t(3t + 1) = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = -\frac{1}{3}.$$

Cette équation a deux solutions distinctes : la sphère rencontre bien (d) en deux points. **L'affirmation est vraie.**

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 1)

1. On donne $A(-3; 1; 4)$, $B(1; 5; 2)$, la droite $(d) : x = -6 + 3t, y = 1, z = 9 - 5t$. Les droites (AB) et (d) sont : a) sécantes non perpendiculaires, b) perpendiculaires, c) non coplanaires, d) parallèles.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ (colinéaire à $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$) dirige (AB) , et $\vec{u}' \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ dirige (d) : ces vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 6 + 0 + 5 = 11 \neq 0 : \text{les droites ne sont pas perpendiculaires.}$$

En résolvant le système de recherche d'un point commun (avec (AB) paramétrée par s), on trouve une solution unique $(t, s) = (1, 0)$: les droites sont sécantes.

Réponse a) sécantes non perpendiculaires.

2. On considère le plan $P : 4x + 4y - 2z + 3 = 0$. La droite (AB) est : a) incluse dans P , b) strictement parallèle à P , c) sécante et non orthogonale à P , d) orthogonale à P .

$\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ est normal à P , et c'est exactement le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Réponse d) la droite (AB) est orthogonale au plan P .

3. On considère le plan $P' : 2x + y + 6z + 5 = 0$. Les plans P et P' sont : a) sécants et non perpendiculaires, b) perpendiculaires, c) confondus, d) strictement parallèles.

$\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ (normal à P) et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ (normal à P') ne sont pas colinéaires : les plans ne sont pas parallèles.

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 8 + 4 - 12 = 0 : \text{les vecteurs normaux sont orthogonaux.}$$

Réponse b) les plans sont perpendiculaires.

4. On considère $C(0; 1; -1)$. La valeur de l'angle BAC arrondie au degré est : a) 90° , b) 51° , c) 39° , d) 0° .

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 12 + 0 + 10 = 22.$$

$$AC = \sqrt{9 + 0 + 25} = \sqrt{34} \text{ et } AB = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6.$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{22}{6\sqrt{34}}, \text{ soit } \widehat{BAC} \approx 51^\circ.$$

Réponse b) 51° .

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 2)

Partie A — 1. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$, $C(1; 1; 1)$, la droite (d) : $x = \frac{3}{2} + 2t$, $y = 2 + t$, $z = 3 - t$, et (d') : $x = s$, $y = \frac{3}{2} + s$, $z = 3 - 2s$.

Montrer que (d) et (d') sont sécantes au point $S(-\frac{1}{2}; 1; 4)$.

Chercher un point commun revient à résoudre $\frac{3}{2} + 2t = s$, $2 + t = \frac{3}{2} + s$, $3 - t = 3 - 2s$.

En substituant $s = \frac{3}{2} + 2t$ dans les deux dernières équations : $2 + t = 3 + 2t \iff t = -1$, et $3 - t = -4t \iff 3t = -3 \iff t = -1$ (cohérent), d'où $s = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$.

Ces deux valeurs donnent bien le même point $(-\frac{1}{2}; 1; 4)$ sur les deux droites : **elles sont donc sécantes en S**.

Partie A — 2.a Montrer que le vecteur $n(1; 2; 4)$ est normal au plan (ABC).

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas colinéaires.}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 - 6 + 4 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 2 + 0 = 0 : \vec{n} \text{ est donc normal au plan (ABC).}$$

Partie A — 2.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + 2y + 4z - 7 = 0$.

$\vec{n}$ étant normal à (ABC), ce plan a une équation de la forme $x + 2y + 4z + d = 0$; comme $C(1; 1; 1)$ appartient au plan : $1 + 2 + 4 + d = 0 \iff d = -7$, soit $x + 2y + 4z - 7 = 0$.

Partie A — 3. Démontrer que A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

A, B, C définissant un plan, il suffit de vérifier que S n'appartient pas à ce plan : $-\frac{1}{2} + 2 \times 1 + 4 \times 4 - 7 = -\frac{1}{2} + 2 + 16 - 7 = \frac{21}{2} \neq 0$: **S n'appartient pas au plan (ABC), donc A, B, C, S ne sont pas coplanaires.**

Partie A — 4.a Démontrer que $H(-1; 0; 2)$ est le projeté orthogonal de S sur (ABC).

Si H est ce projeté, $\overrightarrow{SH}$ doit être colinéaire à $\vec{n} : \overrightarrow{SH} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, et $\vec{n} = -2\overrightarrow{SH}$: colinéaires.

De plus, H appartient au plan : $-1 + 2 \times 0 + 4 \times 2 - 7 = -1 + 0 + 8 - 7 = 0$.

H est donc bien le projeté orthogonal de S sur (ABC).

Partie A — 4.b En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \sqrt{\frac{21}{2}}$.

$$SH^2 = \frac{1}{4} + 1 + 4 = \frac{21}{4}, \text{ donc } SH = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

H étant le projeté orthogonal de S, c'est le point du plan le plus proche de S : pour tout autre point M du plan, [SM] est l'hypoténuse du triangle rectangle SHM, donc $SM > SH$.

Il n'existe donc aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B — 1. Soit M sur [CS] avec $CM = k \cdot CS$, $k \in [0; 1]$. Déterminer les coordonnées de M en fonction de k.

$$\overrightarrow{CS} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS} \text{ donne } x - 1 = -\frac{3}{2}k, y - 1 = 0, z - 1 = 3k.$$

M a pour coordonnées $(1 - \frac{3}{2}k; 1; 1 + 3k)$.

Partie B — 2. Existe-t-il un point M sur [CS] tel que le triangle MAB soit rectangle en M?

Le triangle MAB est rectangle en M si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 2 - \frac{3}{2}k \\ -1 \\ 3k \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}k \\ 2 \\ 3k - 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -\frac{3}{2}k(2 - \frac{3}{2}k) - 2 + 3k(3k - 1).$$

En développant : $45k^2 - 24k - 8 = 0$, de discriminant $\Delta = 24^2 + 4 \times 45 \times 8 = 2016 > 0$, avec racines $k_1 = \frac{24 + \sqrt{2016}}{90} \approx 0,765$ et $k_2 \approx -0,232$.

Seul $k_1 \in [0; 1]$ convient : **il existe un unique point M_1 sur [CS] tel que le triangle M_1AB soit rectangle en M_1 .**

Bac Terminale 2025 — Polynésie française (jour 2)

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne $A(1; 3; 0)$, $B(-1; 4; 5)$, $C(0; 1; 0)$, $D(-2; 2; 1)$. Montrer que A , B , C déterminent un plan.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : A , B , C ne sont pas alignés, ils déterminent bien un plan.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times (-1) + 1 \times (-2) + 5 \times 0 = 2 - 2 + 0 = 0$: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, donc le triangle ABC est rectangle en A .

3.a Soit Δ la droite passant par D , de vecteur directeur $u(2; -1; 1)$. Démontrer que Δ est orthogonale au plan (ABC) .

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-2) + (-1) \times 1 + 1 \times 5 = -4 - 1 + 5 = 0$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 1 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$.

$\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : Δ (dirigée par $\vec{u}$) est donc orthogonale au plan (ABC) .

3.b Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $2x - y + z + 1 = 0$.

$\vec{u}$ étant normal à (ABC) , ce plan a une équation de la forme $2x - y + z + d = 0$; A appartient au plan : $2 \times 1 - 3 + 0 + d = 0 \iff d = 1$, soit $2x - y + z + 1 = 0$.

3.c Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

Δ passe par D et est dirigée par $\vec{u}$: $x = -2 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 1 + t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

4. On appelle H le point de coordonnées $(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3})$. Vérifier que H est le projeté orthogonal de D sur (ABC) .

Le point de Δ appartenant à (ABC) vérifie $2(-2 + 2t) - (2 - t) + (1 + t) + 1 = 0 \iff 6t - 4 = 0 \iff t = \frac{2}{3}$.

Pour $t = \frac{2}{3}$: $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $z = \frac{5}{3}$: on retrouve H . Comme $\Delta \perp (ABC)$, H est bien le projeté orthogonal de D sur (ABC) .

5.a Montrer que $DH = 2\sqrt{\frac{6}{3}}$.

$$DH = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

5.b En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

En prenant ABC (rectangle en A) comme base : son aire est $B = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{30} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$.

La hauteur relative à cette base est $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, donc $V = \frac{1}{3} \times B \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2}\sqrt{6} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{10}{3} \approx 3,33$.

6. On considère la droite d : $x=1-2k$, $y=-3k$, $z=1+k$. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

d est dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 2 \times (-2) + (-1) \times (-3) + 1 \times 1 = -4 + 3 + 1 = 0$.

$\vec{u}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{n}$ du plan (ABC), donc $\vec{u}$ dirige une droite parallèle au plan.

Le point $E(1 ; 0 ; 1)$ de d (pour $k = 0$) ne vérifie pas $2 \times 1 - 0 + 1 + 1 = 4 \neq 0$: E n'appartient pas au plan, donc d est **strictement parallèle au plan (ABC)**.

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 1)**1. Dans un repère orthonormé (unité 1 cm), on donne A(3 ; -1 ; 1), B(4 ; -1 ; 0), C(0 ; 3 ; 2), D(4 ; 3 ; -2) et S(2 ; 1 ; 4). Montrer que A, B, C ne sont pas alignés.**

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (les premières coordonnées donneraient un rapport -3, mais $0 \times (-3) \neq 4$) : **A, B, C ne sont pas alignés.**

2.a Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

$\vec{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ vérifie $\vec{CD} = 4\vec{AB}$: c'est une combinaison linéaire de vecteurs du plan (ABC).

Le point C appartenant au plan (ABC), D y appartient aussi : **les quatre points sont coplanaires.**

2.b Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].

$\vec{CD} = 4\vec{AB}$ montre que (AB) et (CD) sont strictement parallèles (C n'est pas sur (AB)) : ABDC est un quadrilatère plan non croisé dont deux côtés opposés sont parallèles, c'est-à-dire **un trapèze de bases [AB] et [CD]**.

3.a Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 + 0 - 2 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -6 + 4 + 2 = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, donc **normal** à (ABC).

3.b En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

(ABC) a une équation de la forme $2x + y + 2z + d = 0$; A(3; -1; 1) y appartient : $6 - 1 + 2 + d = 0 \iff d = -7$. D'où $2x + y + 2z - 7 = 0$.

3.c Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par S et orthogonale au plan (ABC).

Δ est dirigée par $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passe par S(2; 1; 4) : $x = 2 + 2t, y = 1 + t, z = 4 + 2t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

3.d Montrer que le point I d'intersection de Δ et (ABC) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$, puis que $SI = 2$ cm.

En substituant dans l'équation du plan : $2(2+2t) + (1+t) + 2(4+2t) - 7 = 9t + 6 = 0 \iff t = -\frac{2}{3}$.

D'où $I\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$, et $SI = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{9}} = 2$ cm.

4.a Vérifier que le projeté orthogonal H de B sur la droite (CD) a pour coordonnées H(3; 3; -1), et montrer que $HB = 3\sqrt{2}$ cm.

$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifie $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} = -4 + 0 + 4 = 0$: (BH) est orthogonale à (CD).

$\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \overrightarrow{CD}$: H est bien sur la droite (CD). **H est donc le projeté orthogonal de B sur (CD).**

$HB = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ cm.

4.b Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.

$AB = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$ et $CD = 4AB = 4\sqrt{2}$ (bases du trapèze), la hauteur étant $HB = 3\sqrt{2}$.

$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = 15$ cm².

5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABDC} \times SI = \frac{1}{3} \times 15 \times 2 = 10 \text{ cm}^3.$$

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 2)

Partie A — 1. Dans un repère orthonormé, $(P) : 2x + 2y - 3z + 1 = 0$, et $A(1; 0; 1)$, $B(2; -1; 1)$, $C(-4; -6; 5)$. Vérifier pour chaque point s'il appartient à (P) .

$A : 2 + 0 - 3 + 1 = 0 : A$ appartient à (P) . $B : 4 - 2 - 3 + 1 = 0 : B$ appartient à (P) .

$C : -8 - 12 - 15 + 1 = -34 \neq 0 : C$ n'appartient pas à (P) .

Partie A — 2. Montrer que $C(0; -2; -1)$ est le projeté orthogonal de C sur le plan (P) .

$$\overrightarrow{CC'} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 2\vec{n}, \text{ où } \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ est normal à } (P) : \text{la droite } (CC') \text{ est orthogonale à } (P).$$

C vérifie l'équation de $(P) : 0 - 4 + 3 + 1 = 0$. C est donc bien le projeté orthogonal de C sur (P) .

Partie A — 3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dirige la droite passant par } A : x = 1 + t, y = -t, z = 1, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Partie A — 4. Déterminer les coordonnées du point H de (AB) tel que (AB) et (HC) soient orthogonales.

$$\text{Pour le point de paramètre } t : \overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} 5+t \\ 6-t \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = (5+t) - (6-t) = 2t - 1.$$

L'orthogonalité impose $2t - 1 = 0$, soit $t = \frac{1}{2} : H(1,5; -0,5; 1)$ (c'est le milieu de $[AB]$).

$$\text{Partie B — 1. On admet } \overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ \frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ Calculer la valeur exacte de } \|\overrightarrow{HC}\|.$$

$$\|\overrightarrow{HC}\| = \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{121}{4} + 16} = \sqrt{\frac{153}{2}}.$$

Partie B — 2. Déterminer la valeur exacte de l'aire S du triangle ABC.

$$H \text{ est le pied de la hauteur issue de } C : S = \frac{AB \times HC}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{153}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{153}}{2}.$$

Partie C — 1. On admet $HC = \sqrt{\frac{17}{2}}$. Soit $\alpha = \widehat{CHC'}$. Déterminer $\cos(\alpha)$.

(CC) est orthogonale à (P), donc à (CH) : le triangle CHC est rectangle en C.

$$\cos(\alpha) = \frac{HC'}{HC} = \frac{\sqrt{\frac{17}{2}}}{\sqrt{\frac{153}{2}}} = \sqrt{\frac{17}{153}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

Partie C — 2.a Montrer que les droites (CH) et (AB) sont perpendiculaires.

(CH) est orthogonale à (AB) (définition de H), et (CC), orthogonale au plan (P), est orthogonale à (AB) qui y est incluse.

(AB) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (CCH), donc à ce plan tout entier, et en particulier à (CH). Ces deux droites étant sécantes en H : **elles sont perpendiculaires.**

Partie C — 2.b Calculer S' , l'aire du triangle ABC (valeur exacte).

$$[CH] \text{ est la hauteur issue de } C \text{ relative à la base } [AB] : S' = \frac{AB \times C'H}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{17}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Partie C — 2.c Donner une relation entre S , S' et $\cos(\alpha)$.

$\frac{S'}{S} = \frac{C'H}{CH} = \cos(\alpha)$, autrement dit $S' = S \cos(\alpha)$: l'aire du triangle projeté est celle du triangle initial multipliée par le cosinus de l'angle entre les deux plans.

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 2)

Partie A — 1. La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par $B(-1; -2)$, où sa tangente T passe aussi par $A(0; -1)$. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.

$$f(-1) = -2 \text{ (ordonnée de B), et } f'(-1) \text{ est le coefficient directeur de } T = (AB) : \frac{-1 - (-2)}{0 - (-1)} = 1.$$

Partie A — 2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ?

Non : la courbe passe **en dessous** de sa tangente T pour les abscisses proches de -2 , ce qui est impossible pour une fonction convexe. Elle semble concave puis convexe, avec un point d'inflexion vers $x \approx -1,4$.

Partie A — 3. Conjecturer le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près.

La courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'une seule fois, vers $x \approx 0,1$.

Partie B — 1. On considère $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$ sur $] -2 ; +\infty[$. Déterminer la limite de f en -2 et interpréter.

$x^2 + 2x - 1 \rightarrow -1$ et $\ln(x + 2) \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$. La droite $x = -2$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

Partie B — 2. Montrer que, pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.

$$f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x + 2} = \frac{(2x + 2)(x + 2) + 1}{x + 2} = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}.$$

Partie B — 3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations complet.

Le numérateur $2x^2 + 6x + 5$ a pour discriminant $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$: il est strictement positif pour tout x ; le dénominateur $x + 2$ est positif sur l'intervalle.

$f'(x) > 0$: f **est strictement croissante** sur $] -2 ; +\infty[$, de $-\infty$ à $+\infty$.

Partie B — 4. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α , et donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

f est continue, strictement croissante, de $-\infty$ à $+\infty$: par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution α . Par balayage : $\alpha \approx 0,12$.

Partie B — 5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $] -2 ; +\infty[$.

$f(x) < 0$ sur $] -2 ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, et $f(x) > 0$ sur $] \alpha ; +\infty[$.

Partie B — 6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

$$f''(x) = \frac{(4x + 6)(x + 2) - (2x^2 + 6x + 5)}{(x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 8x + 7}{(x + 2)^2}, \text{ du signe du numérateur.}$$

Le trinôme $2x^2 + 8x + 7$ a pour discriminant $\Delta = 64 - 56 = 8 > 0$, avec pour racines $-2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; seule $-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ appartient à l'intervalle.

f'' s'y annule en changeant de signe : **l'unique point d'inflexion a pour abscisse $-2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -1,29$.**

Partie C — 1. Soit $g(x) = \ln(x+2)$, $J(0; 1)$ et M le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x . Justifier que $h(x) = JM^2 = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.

$$JM^2 = (x-0)^2 + (g(x)-1)^2 = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2 \text{ (repère orthonormé).}$$

Partie C — 2.a On admet $h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$. Dresser le tableau de variations de h .

$\frac{2}{x+2} > 0$ sur l'intervalle : $h'(x)$ est du signe de $f(x)$. h décroît sur $] -2 ; \alpha]$ puis croît sur $[\alpha ; +\infty[$, avec un minimum en α .

Partie C — 2.b En déduire que la distance JM est minimale pour $x = \alpha$.

La distance JM est minimale lorsque son carré $h(x)$ est minimal (croissance de la racine carrée), c'est-à-dire pour $x = \alpha$.

Partie C — 3.a Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha+2) = 0 \iff \ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2.$$

Partie C — 3.b En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_g$ en M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

La tangente a pour coefficient directeur $g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha+2}$; la droite (JM_α) a pour coefficient directeur $\frac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha} = \frac{-2\alpha - \alpha^2}{\alpha} = -2 - \alpha$.

Le produit vaut $\frac{1}{\alpha+2} \times (-2 - \alpha) = -1$: les deux droites sont perpendiculaires.

Bac Terminale 2023 — Amérique du Nord (jour 1)

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(-1; 2; 5)$, $B(3; 6; 3)$, $C(3; 0; 9)$ (non alignés). Le triangle ABC est : a. isocèle rectangle en A — b. isocèle rectangle en B — c. isocèle rectangle en C — d. équilatéral.

Le repère étant orthonormé, on calcule les longueurs des côtés : $AB = \sqrt{(3+1)^2 + (6-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{36} = 6$, $AC = \sqrt{(3+1)^2 + (0-2)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{36} = 6$, $BC = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

$AB = AC$ donc le triangle est isocèle en A ; de plus $AB^2 + AC^2 = 36 + 36 = 72 = BC^2$, donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, il est également rectangle en A .

Donc, la réponse est a.

2. On considère en plus $D(8; -3; -8)$. Une équation cartésienne du plan (BCD) est : a. $2x + y + z - 15 = 0$ — b. $9x - 5y + 3 = 0$ — c. $4x + y + z - 21 = 0$ — d. $11x + 5z - 73 = 0$.

On teste l'appartenance de B, C et D à chaque plan candidat. Pour la proposition c., $4x + y + z - 21$ vaut : en B, $12 + 6 + 3 - 21 = 0$; en C, $12 + 0 + 9 - 21 = 0$; en D, $32 - 3 - 8 - 21 = 0$.

Les trois points B, C et D vérifient donc l'équation $4x + y + z - 21 = 0$ (on vérifie aussi qu'aucune des trois autres équations n'est satisfaite simultanément par B, C et D).

Donc, la réponse est **c**.

3. On admet que (ABC) a pour équation $x - 2y - 2z + 15 = 0$. Soit H le projeté orthogonal de D sur (ABC). On peut affirmer que : a. $H(-2; 17; 12)$ — b. $H(3; 7; 2)$ — c. $H(3; 2; 7)$ — d. $H(-15; 1; -1)$.

Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Comme H est le projeté orthogonal de D sur (ABC),

H est le point d'intersection de (ABC) avec la droite passant par D et dirigée par $\vec{u}$, de représentation paramétrique $x = 8 + k$, $y = -3 - 2k$, $z = -8 - 2k$ ($k \in \mathbb{R}$).

On cherche k tel que ce point appartienne à (ABC) : $(8 + k) - 2(-3 - 2k) - 2(-8 - 2k) + 15 = 0 \iff 8 + k + 6 + 4k + 16 + 4k + 15 = 0 \iff 9k + 45 = 0 \iff k = -5$.

On obtient $H(8 - 5; -3 + 10; -8 + 10) = H(3; 7; 2)$.

Donc, la réponse est **b**.

4. Soit Δ la droite de représentation paramétrique $x = 5 + t$, $y = 3 - t$, $z = -1 + 3t$ ($t \in \mathbb{R}$). Les droites (BC) et Δ sont : a. confondues — b. strictement parallèles — c. sécantes — d. non coplanaires.

Un vecteur directeur de Δ est $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, et un vecteur directeur de (BC) est $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ (soit encore $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ après simplification). Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont ni confondues ni strictement parallèles.

Il reste à savoir si elles ont un point commun. La droite (BC) admet la représentation paramétrique $x = 3$, $y = 6 - s$, $z = 3 + s$ ($s \in \mathbb{R}$). En égalant les coordonnées : $5 + t = 3$ donne $t = -2$, d'où le point de Δ correspondant $(3; 5; -7)$.

En reportant dans (BC) : il faudrait $6 - s = 5$ et $3 + s = -7$, soit $s = 1$ et $s = -10$ simultanément, ce qui est impossible.

Les droites n'ont donc aucun point commun et ne sont pas parallèles : elles ne sont pas coplanaires.

Donc, la réponse est **d**.

5. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + 2z - 6 = 0$ (on rappelle que (ABC) a pour équation $x - 2y - 2z + 15 = 0$). On peut affirmer que : a. $\mathcal{P}$ et (ABC) sont strictement parallèles — b. ils sont sécants selon la droite (AB) — c. selon la droite (AC) — d. selon la droite (BC) .

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, et un vecteur normal à (ABC) est $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans ne sont pas parallèles : ils sont sécants selon une droite.

On teste l'appartenance de A, B et C à $\mathcal{P}$: en A, $2 \times (-1) - 2 + 2 \times 5 - 6 = -2 - 2 + 10 - 6 = 0$; en B, $2 \times 3 - 6 + 2 \times 3 - 6 = 6 - 6 + 6 - 6 = 0$; en C, $2 \times 3 - 0 + 2 \times 9 - 6 = 6 + 18 - 6 = 18 \neq 0$.

A et B appartiennent donc à $\mathcal{P}$ (et aussi à (ABC) , par hypothèse), mais pas C. La droite d'intersection des deux plans est donc la droite (AB) .

Donc, la réponse est **b**.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1.a La figure représente une maison cubique ABCDEFGH accolée à un garage cubique BIJKLMNO (L milieu de $[BF]$, K milieu de $[BC]$), surmonté d'un toit pyramidal LMNOP dont le sommet P est sur la façade de la maison. Dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{AE}$, donner par lecture graphique les coordonnées de H, M et N.

Par lecture directe sur la figure : $H(0 ; 2 ; 2)$, $M(3 ; 0 ; 1)$ et $N(3 ; 1 ; 1)$.

1.b Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM) .

$$\overrightarrow{HM} \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dirige la droite } (HM), \text{ qui passe par } H(0 ; 2 ; 2).$$

$$\text{Donc, la réponse est : } \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. L'architecte place P à l'intersection de (HM) et du plan (BCF). Montrer que $P\left(2; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Les points $B(2; 0; 0)$, $C(2; 2; 0)$ et $F(2; 0; 2)$ ont tous pour abscisse 2 : le plan (BCF) est parallèle au plan (yOz) et a pour équation $x = 2$.

Cherchons le paramètre t tel que le point de (HM) de paramètre t appartienne à ce plan : $3t = 2$, soit $t = \frac{2}{3}$.

On obtient alors $x = 2$, $y = 2 - 2 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ et $z = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Donc, la réponse est $P\left(2; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$, ce qui confirme le résultat annoncé.

3.a Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$.

$$\overrightarrow{PM} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-\frac{2}{3} \\ 1-\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{PN} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-\frac{2}{3} \\ 1-\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Le repère étant orthonormé, $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 1 \times 1 + \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Donc, la réponse est $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = \frac{8}{9}$.

3.b Calculer la distance PM (on admet que $PN = \frac{\sqrt{11}}{3}$).

$$PM = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

Donc, la réponse est $PM = \frac{\sqrt{14}}{3}$.

3.c Le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55° . Le toit pourra-t-il être construit ?

On sait que $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = PM \times PN \times \cos(\widehat{MPN})$, donc $\frac{8}{9} = \frac{\sqrt{14}}{3} \times \frac{\sqrt{11}}{3} \times \cos(\widehat{MPN})$.

D'où $\cos(\widehat{MPN}) = \frac{8}{\sqrt{14} \times \sqrt{11}} = \frac{8}{\sqrt{154}}$, ce qui donne $\widehat{MPN} \approx 50^\circ$ à la calculatrice.

Comme 50° ne dépasse pas 55° , donc, la réponse est : **le toit pourra être construit.**

4. Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes, et déterminer leur point d'intersection.

Les droites (EH) et (MN) sont parallèles (elles sont chacune dirigées par $\vec{j}$, d'après la construction du garage et du toit), donc les droites (HM) et (EN) , qui relient ces deux droites parallèles par des points distincts, sont coplanaires; comme elles ne sont pas parallèles (leurs vecteurs directeurs $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EN}$ ne sont pas colinéaires), elles sont donc sécantes.

$E(0; 0; 2)$ et $N(3; 1; 1)$ donnent $\overrightarrow{EN} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc (EN) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3t' \\ y = t' \\ z = 2 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

En égalant les deux représentations paramétriques (avec t pour (HM)) : $3t = 3t'$, $2 - 2t = t'$ et $2 - t = 2 - t'$. La première et la troisième équation donnent $t = t'$; en reportant dans la deuxième, $2 - 2t = t$, soit $3t = 2$, donc $t = t' = \frac{2}{3}$.

Donc, la réponse est : les droites (HM) et (EN) se coupent au point $\mathbf{P}$, déjà déterminé à la question 2.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 2)

1.a Une salle d'exposition est représentée par le parallélépipède rectangle $OBCDEFGH$, muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associé aux dimensions de la pièce, avec $A(6; 0; 2)$, $R(6; 3; 4)$ et $T(3; 0; 4)$. Vérifier que le triangle ART est isocèle en A .

$$\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$AR = \sqrt{0^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{ et } AT = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Comme $AR = AT$, le triangle ART est isocèle en A .

1.b Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT}$.

$$\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = 0 \times (-3) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 0 + 0 + 4 = 4.$$

1.c En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.

D'après la formule du produit scalaire : $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = AR \times AT \times \cos(\widehat{RAT})$, donc $\cos(\widehat{RAT}) = \frac{4}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}} = \frac{4}{13}$.

Donc, $\widehat{RAT} = \arccos\left(\frac{4}{13}\right) \approx 72,1^\circ$.

2.a Justifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ART).

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AR} = 2 \times 0 + (-2) \times 3 + 3 \times 2 = 0 - 6 + 6 = 0.$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AT} = 2 \times (-3) + (-2) \times 0 + 3 \times 2 = -6 + 0 + 6 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$, deux vecteurs non colinéaires du plan (ART) : donc, $\vec{n}$ est normal au plan (ART).

2.b En déduire une équation cartésienne du plan (ART).

Le plan (ART), de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, a une équation de la forme $2x - 2y + 3z + d = 0$.

Comme A(6 ; 0 ; 2) appartient au plan : $2 \times 6 - 2 \times 0 + 3 \times 2 + d = 0 \iff 12 + 6 + d = 0 \iff d = -18$.

Donc, une équation cartésienne du plan (ART) est $2x - 2y + 3z - 18 = 0$.

3.a Un rayon laser orthogonal au plan (ART) est émis du point S de coordonnées $\left(3 ; \frac{5}{2} ; 0\right)$. Justifier que le système $x = 3 + 2k$, $y = \frac{5}{2} - 2k$, $z = 3k$ ($k \in \mathbb{R}$) est une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ART) passant par S.

La droite Δ , orthogonale au plan (ART), admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur ; elle passe par

$S\left(3 ; \frac{5}{2} ; 0\right)$. Une représentation paramétrique de Δ est donc $x = 3 + 2k$, $y = \frac{5}{2} - 2k$, $z = 0 + 3k$, soit $x = 3 + 2k$, $y = \frac{5}{2} - 2k$, $z = 3k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

3.b Soit L le point d'intersection de Δ et du plan (ART). Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5 ; \frac{1}{2} ; 3\right)$.

On remplace les coordonnées paramétriques dans l'équation du plan (ART) : $2(3+2k) - 2\left(\frac{5}{2} - 2k\right) + 3 \times 3k - 18 = 0$.

En développant : $6 + 4k - 5 + 4k + 9k - 18 = 0 \iff 17k - 17 = 0 \iff k = 1$.

En remplaçant $k = 1$: $x = 3 + 2 = 5$, $y = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$, $z = 3$.

Donc, **L a pour coordonnées** $\left(5 ; \frac{1}{2} ; 3\right)$.

4.a Un rail est représenté par le segment [DK], où K est le milieu de [EH] et D(0 ; 8 ; 0). Montrer que, pour tout réel t de $[0 ; 1]$, le point N de coordonnées $(0 ; 8 - 4t ; 4t)$ appartient au segment [DK].

Avec E(0 ; 0 ; 4) et H(0 ; 8 ; 4), le milieu K de [EH] a pour coordonnées (0 ; 4 ; 4).

$\overrightarrow{DK} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DN} \begin{pmatrix} 0 \\ -4t \\ 4t \end{pmatrix}$: on remarque que $\overrightarrow{DN} = t \times \overrightarrow{DK}$, donc D, N et K sont alignés.

Comme $t \in [0 ; 1]$, le point N se situe entre D (obtenu pour $t = 0$) et K (obtenu pour $t = 1$) : **N appartient donc bien au segment [DK].**

4.b Calculer les coordonnées exactes du point N pour lesquelles les rayons laser représentés par [SL] et [SN] sont perpendiculaires.

$\overrightarrow{SL} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SN} \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{11}{2} - 4t \\ 4t \end{pmatrix}$.

Les segments [SL] et [SN] sont perpendiculaires si, et seulement si, $\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SN} = 0$: $2 \times (-3) + (-2) \times \left(\frac{11}{2} - 4t\right) + 3 \times 4t = 0$.

En développant : $-6 - 11 + 8t + 12t = 0 \iff 20t - 17 = 0 \iff t = \frac{17}{20}$.

En remplaçant dans les coordonnées de N : $x = 0$, $y = 8 - 4 \times \frac{17}{20} = \frac{23}{5}$, $z = 4 \times \frac{17}{20} = \frac{17}{5}$.

Donc, **N a pour coordonnées** $\left(0 ; \frac{23}{5} ; \frac{17}{5}\right)$.

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 2)

1.a Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points A(-3 ; 1 ; 3), B(2 ; 2 ; 3), C(1 ; 7 ; -1), D(-4 ; 6 ; -1) et K(-3 ; 14 ; 14). Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

On calcule chaque vecteur en soustrayant les coordonnées de l'origine à celles de l'extrémité :

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - (-3) \\ 2 - 1 \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De même, $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1 - (-4) \\ 7 - 6 \\ -1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Enfin, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 - (-3) \\ 6 - 1 \\ -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$

Donc, la réponse est $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$

1.b Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

D'après la question précédente, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme.

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5 \times (-1) + 1 \times 5 + 0 \times (-4) = -5 + 5 + 0 = 0.$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont donc orthogonaux : le parallélogramme ABCD possède deux côtés consécutifs perpendiculaires.

Donc, la réponse est que ABCD est un rectangle.

1.c Calculer l'aire du rectangle ABCD.

On calcule les longueurs des côtés à l'aide des normes des vecteurs : $AB^2 = 5^2 + 1^2 + 0^2 = 26$, donc $AB = \sqrt{26}.$

De même, $AD^2 = (-1)^2 + 5^2 + (-4)^2 = 1 + 25 + 16 = 42$, donc $AD = \sqrt{42}.$

L'aire du rectangle ABCD vaut $AB \times AD = \sqrt{26} \times \sqrt{42} = \sqrt{26 \times 42} = \sqrt{1092}.$

En factorisant, $1092 = 4 \times 273$, donc $\sqrt{1092} = 2\sqrt{273}.$

Donc, la réponse est $\mathcal{A}(\text{ABCD}) = 2\sqrt{273}$ (unité d'aire).

2.a Justifier que les points A, B et D définissent un plan.

D'après la question 1.a, les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ ne sont clairement pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles), donc les points A, B et D ne sont pas alignés. Donc, la réponse est qu'ils définissent bien un plan.

2.b Montrer que le vecteur $\vec{n}(-2 ; 10 ; 13)$ est un vecteur normal au plan (ABD).

On calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 \times 5 + 10 \times 1 + 13 \times 0 = -10 + 10 + 0 = 0$.

On calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = -2 \times (-1) + 10 \times 5 + 13 \times (-4) = 2 + 50 - 52 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD), $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Donc, la réponse est que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABD).

2.c En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).

Le plan (ABD) admet $\vec{n}(-2 ; 10 ; 13)$ pour vecteur normal, donc il a une équation de la forme $-2x + 10y + 13z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Le point $B(2 ; 2 ; 3)$ appartient au plan (ABD), donc ses coordonnées vérifient cette équation : $-2 \times 2 + 10 \times 2 + 13 \times 3 = d$, soit $-4 + 20 + 39 = d$, donc $d = 55$.

Donc, la réponse est que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $-2x + 10y + 13z = 55$.

3.a Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ABD) et qui passe par le point $K(-3 ; 14 ; 14)$.

La droite Δ , orthogonale au plan (ABD), admet le vecteur normal $\vec{n}(-2 ; 10 ; 13)$ comme vecteur directeur, et elle passe par le point K.

Donc, la réponse est $\Delta : \begin{cases} x = -2t - 3 \\ y = 10t + 14 \\ z = 13t + 14 \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

3.b Déterminer les coordonnées du point I, projeté orthogonal du point K sur le plan (ABD).

Le point I, projeté orthogonal de K sur le plan (ABD), est l'unique point d'intersection de la droite Δ (perpendiculaire au plan et passant par K) avec ce plan.

On remplace les coordonnées paramétriques de Δ dans l'équation du plan (ABD) : $-2(-2t - 3) + 10(10t + 14) + 13(13t + 14) = 55$.

Cela donne $4t + 6 + 100t + 140 + 169t + 182 = 55$, soit $273t + 328 = 55$, donc $273t = -273$, d'où $t = -1$.

En reportant $t = -1$ dans le système paramétrique : $x = -2 \times (-1) - 3 = 2 - 3 = -1$, $y = 10 \times (-1) + 14 = 4$ et $z = 13 \times (-1) + 14 = 1$.

Donc, la réponse est $I(-1 ; 4 ; 1)$.

3.c Montrer que la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD et de sommet K vaut $\sqrt{273}$.

ABCD est un rectangle (question 1.b), donc le point D appartient bien au plan (ABD). La hauteur de la pyramide KABCD, relative à la base ABCD, est donc la longueur KI, où I est le projeté orthogonal de K sur ce plan.

$$\overrightarrow{KI} \begin{pmatrix} -1 - (-3) \\ 4 - 14 \\ 1 - 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -13 \end{pmatrix}, \text{ donc } KI^2 = 2^2 + (-10)^2 + (-13)^2 = 4 + 100 + 169 = 273.$$

Donc, la réponse est $KI = \sqrt{273}$.

4. Calculer le volume V de la pyramide KABCD. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.

On applique la formule avec l'aire de la base ABCD (question 1.c) et la hauteur KI (question 3.c) :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{ABCD}) \times KI = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{273} \times \sqrt{273}.$$

Or $\sqrt{273} \times \sqrt{273} = 273$, donc $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 273 = \frac{546}{3} = 182$.

Donc, la réponse est $V = 182$ (unité de volume).

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

1.a Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne $A(2; 0; 3)$, $B(0; 2; 1)$, $C(-1; -1; 2)$ et $D(3; -3; -1)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles :

$$\frac{-2}{-3} \neq \frac{2}{-1}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

1.b Calculer les longueurs AB et AC.

$$AB^2 = (-2)^2 + 2^2 + (-2)^2 = 4 + 4 + 4 = 12, \text{ donc } AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$AC^2 = (-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 9 + 1 + 1 = 11, \text{ donc } AC = \sqrt{11}.$$

1.c À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$, puis une valeur approchée de sa mesure au dixième de degré.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \times (-3) + 2 \times (-1) + (-2) \times (-1) = 6 - 2 + 2 = 6.$$

Or, par définition du produit scalaire, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

$$\text{Donc } 6 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{11} \times \cos(\widehat{BAC}) \iff \cos(\widehat{BAC}) = \frac{6}{2\sqrt{33}} = \frac{3}{\sqrt{33}}.$$

La calculatrice donne alors $\widehat{BAC} \approx 58,5^\circ$ au dixième de degré près.

2.a Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, puisque $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Avec $\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix}$, cette condition s'écrit $-2(x+1) + 2(y+1) - 2(z-2) = 0$.

En divisant par -2 : $(x+1) - (y+1) + (z-2) = 0 \iff x - y + z - 2 = 0$.

Une équation du plan $\mathcal{P}$ est donc $x - y + z - 2 = 0$.

2.b Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

La droite (AB) passe par $A(2 ; 0 ; 3)$ et admet $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, ou plus simplement le vecteur colinéaire $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, comme vecteur directeur.

Une représentation paramétrique de (AB) est donc :
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2.c En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathcal{P}$.

Les coordonnées de E vérifient à la fois l'équation de $\mathcal{P}$ et la représentation paramétrique de (AB).

On remplace x, y, z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation de $\mathcal{P}$:

$$(2-t) - t + (3-t) - 2 = 0 \iff 3 - 3t = 0 \iff t = 1.$$

En remplaçant $t = 1$ dans la représentation paramétrique : $x = 2 - 1 = 1$, $y = 1$, $z = 3 - 1 = 2$.

Donc, **E a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2)**.

2.d Calculer l'aire du triangle ABC.

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } BC^2 = (-1)^2 + (-3)^2 + 1^2 = 1 + 9 + 1 = 11, \text{ d'où } BC = \sqrt{11}.$$

Comme $AC = BC = \sqrt{11}$, le triangle ABC est isocèle en C. Puisque E est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), le segment [CE] est donc la hauteur issue de C dans ce triangle isocèle.

$$\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } CE^2 = 2^2 + 2^2 + 0^2 = 8, \text{ d'où } CE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{L'aire du triangle ABC vaut donc } \mathcal{A}(\text{ABC}) = \frac{AB \times CE}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}.$$

3.a Soit le point F(1 ; -1 ; 3). Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.

Les points A, B, C, F sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Le système à résoudre, en utilisant les deux premières coordonnées, est } \begin{cases} -1 = -2\alpha - 3\beta \\ -1 = 2\alpha - \beta \end{cases}.$$

De la deuxième équation, $\beta = 2\alpha + 1$. En reportant dans la première : $-1 = -2\alpha - 3(2\alpha + 1) = -2\alpha - 6\alpha - 3 = -8\alpha - 3$, d'où $8\alpha = -2$, soit $\alpha = -\frac{1}{4}$, puis $\beta = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{1}{2}$.

On vérifie avec la troisième coordonnée : $\alpha \times (-2) + \beta \times (-1) = -\frac{1}{4} \times (-2) + \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, ce qui correspond bien à la troisième coordonnée de $\overrightarrow{AF}$, qui vaut 0.

Donc $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$: les points A, B, C et F sont coplanaires.

3.b Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

$$\overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ (puisque D(3 ; -3 ; -1) et F(1 ; -1 ; 3)).}$$

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-2) + (-2) \times 2 + (-4) \times (-2) = -4 - 4 + 8 = 0.$$

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-3) + (-2) \times (-1) + (-4) \times (-1) = -6 + 2 + 4 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), donc il est orthogonal à ce plan : la droite (FD) est bien orthogonale au plan (ABC).

3.c Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multipliée par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Prenons pour base le triangle ABC, d'aire $\mathcal{A}(\text{ABC}) = 2\sqrt{6}$ (question 2.d). Comme (FD) est orthogonale au plan (ABC) et que F appartient à ce plan (question 3.a), la longueur FD est la hauteur du tétraèdre relative à cette base.

$$FD^2 = 2^2 + (-2)^2 + (-4)^2 = 4 + 4 + 16 = 24, \text{ donc } FD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Le volume du tétraèdre ABCD est donc } \mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{ABC}) \times FD = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} = \frac{4 \times 6}{3} = 8.$$

Donc, le volume du tétraèdre ABCD vaut **8** (en unités de volume).

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

1.a Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathbf{O} ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $\mathbf{A}(-1 ; 1 ; 3)$

et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
 On admet que $\mathbf{A}$ n'appartient pas à $\mathcal{D}$. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$.

En lisant les coefficients de t dans la représentation paramétrique, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1.b Montrer que le point $\mathbf{B}(-1 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

$$\mathbf{B} \text{ appartient à } \mathcal{D} \text{ si, et seulement si, il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ 3 = 2 - t \\ 0 = 2 + 2t \end{cases}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\begin{cases} 2t = -2 \\ -t = 1 \\ 2t = -2 \end{cases}, \text{ ce qui donne } t = -1 \text{ dans chacune des trois équations. Cette valeur commune } t = -1$$

existe bien, donc **$\mathbf{B}$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.**

1.c Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \vec{u}$.

$$\text{Avec } \mathbf{A}(-1 ; 1 ; 3) \text{ et } \mathbf{B}(-1 ; 3 ; 0), \text{ on a } \overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \text{ Donc } \overrightarrow{\text{AB}} \cdot \vec{u} = 0 \times 2 + 2 \times (-1) + (-3) \times 2 =$$

$$0 - 2 - 6 = -8.$$

2.a On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A et orthogonal à $\mathcal{D}$, et H le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$ (H est donc le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$). Montrer que $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $2x - y + 2z - 3 = 0$.

Le plan $\mathcal{P}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$, donc le vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{D}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc de la forme $2x - y + 2z + d = 0$. Comme $A(-1 ; 1 ; 3)$ appartient à $\mathcal{P}$: $2 \times (-1) - 1 + 2 \times 3 + d = 0 \iff -2 - 1 + 6 + d = 0 \iff d = -3$. Donc, $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $2x - y + 2z - 3 = 0$.

2.b En déduire que H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$.

H est l'unique point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$. On substitue les coordonnées paramétriques de $\mathcal{D}$ dans l'équation de $\mathcal{P}$: $2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0$.

En développant : $2 + 4t - 2 + t + 4 + 4t - 3 = 0 \iff 9t + 1 = 0 \iff t = -\frac{1}{9}$.

En remplaçant dans la représentation paramétrique : $x = 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{9}$, $y = 2 - \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{19}{9}$,

$z = 2 + 2 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{9}$.

Donc, H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$.

2.c Calculer la longueur AH (valeur exacte).

Avec $A(-1 ; 1 ; 3)$ et $H\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$, on a $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ \frac{10}{9} \\ -\frac{11}{9} \end{pmatrix}$. Donc $AH = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(-\frac{11}{9}\right)^2} =$

$\sqrt{\frac{256 + 100 + 121}{81}} = \sqrt{\frac{477}{81}} = \frac{\sqrt{477}}{9}$. Comme $477 = 9 \times 53$, $\sqrt{477} = 3\sqrt{53}$, donc $AH = \frac{3\sqrt{53}}{9} = \frac{\sqrt{53}}{3}$.

3.a On souhaite retrouver les coordonnées de H , projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$, par une autre méthode. On rappelle que B appartient à $\mathcal{D}$ et que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

Les points H et B appartiennent tous deux à la droite $\mathcal{D}$, donc le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, tout comme $\vec{u}$. Deux vecteurs directeurs d'une même droite étant colinéaires, il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

3.b Montrer que $k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u}$.

Or A et H appartiennent au plan $\mathcal{P}$, orthogonal à $\mathcal{D}$ (donc à $\vec{u}$) : le vecteur $\overrightarrow{AH}$, contenu dans $\mathcal{P}$, est donc orthogonal à $\vec{u}$, d'où $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = (k\vec{u}) \cdot \vec{u} = k \|\vec{u}\|^2$, d'où, puisque $\vec{u} \neq \vec{0}$, $k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

3.c Calculer la valeur de k et retrouver les coordonnées de H.

On a $\|\vec{u}\|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 2^2 = 4 + 1 + 4 = 9$, et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = -8$ (question 1.c). Donc $k = \frac{-8}{9}$.

En notant $H(x ; y ; z)$, on a $\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} -1-x \\ 3-y \\ -z \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{HB} = k\vec{u} = -\frac{8}{9}\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ \frac{8}{9} \\ -\frac{16}{9} \end{pmatrix}$.

En identifiant coordonnée par coordonnée : $-1-x = -\frac{16}{9} \iff x = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9}$; $3-y = \frac{8}{9} \iff y = 3 - \frac{8}{9} = \frac{19}{9}$; $-z = -\frac{16}{9} \iff z = \frac{16}{9}$.

On retrouve bien $H\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$, comme à la question 2.b.

4. On considère un point C du plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$. Calculer l'aire du triangle ACH. (Rappel : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée.)

Les points A, C et H appartiennent tous au plan $\mathcal{P}$: le triangle ACH est donc une base possible du tétraèdre ABCH, et la hauteur associée est la distance de B à ce plan, c'est-à-dire BH (puisque H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$, donc aussi sur toute perpendiculaire à $\mathcal{P}$... plus directement : BH est la longueur du segment [BH], avec $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$ orthogonal à $\mathcal{P}$).

D'après la question 3.c, $\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ \frac{8}{9} \\ -\frac{16}{9} \end{pmatrix}$, donc $BH = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{256 + 64 + 256}{81}} =$

$$\sqrt{\frac{576}{81}} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

On applique la formule du volume avec $\mathcal{B} = \text{Aire}(\text{ACH})$ et $h = BH$: $\frac{8}{9} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(\text{ACH}) \times \frac{8}{3}$, d'où

$$\text{Aire}(\text{ACH}) = \frac{3 \times \frac{8}{9}}{\frac{8}{3}} = \frac{\frac{24}{9}}{\frac{8}{3}} = \frac{24}{9} \times \frac{3}{8} = 1.$$

Donc, l'aire du triangle ACH vaut 1 unité d'aire.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 1)

1. Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'un prisme EFIHGJ, de base triangulaire EIF isocèle en I, avec $AB=3$, $AD=2$, $AE=1$. On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{AD}$, $\vec{k} = \vec{AE}$. Donner les coordonnées du point G.

Dans ce repère, on a $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 1\vec{k}$, donc les coordonnées de G sont $G(3 ; 2 ; 1)$.

2. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2 ; 0 ; -3)$ est normal au plan (EHI). Déterminer une équation cartésienne du plan (EHI).

Une équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(2 ; 0 ; -3)$ est de la forme $2x + 0y - 3z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Dans le repère choisi, on a $E(0 ; 0 ; 1)$ (puisque $\vec{AE} = \vec{k}$), et E appartient au plan (EHI), donc $2 \times 0 - 3 \times 1 = d$, soit $d = -3$.

Donc, une équation cartésienne du plan (EHI) est $2x - 3z = -3$.

3. Déterminer les coordonnées du point I.

Le triangle EIF est isocèle en I, donc le projeté orthogonal de I sur la droite (EF) est le milieu de [EF].

Or, dans le repère choisi, $E(0 ; 0 ; 1)$ et $F(3 ; 0 ; 1)$ (F ayant même ordonnée et cote que E, avec l'abscisse de B), donc le milieu de [EF] a pour abscisse $\frac{0+3}{2} = 1,5$ et pour ordonnée 0.

Le point I a donc la même abscisse (1,5) et la même ordonnée (0) que ce projeté, par symétrie du toit par rapport au plan d'équation $y = 0$ contenant A, B, E, F.

Il reste à déterminer la cote de I : puisque I appartient au plan (EHI) d'équation $2x - 3z = -3$, on a $2 \times 1,5 - 3z = -3 \iff 3 - 3z = -3 \iff 3z = 6 \iff z = 2$.

Donc, les coordonnées du point I sont $I(1,5 ; 0 ; 2)$.

4. Déterminer une mesure au degré près de l'angle $\widehat{EIF}$.

Avec $I(1,5 ; 0 ; 2)$, $E(0 ; 0 ; 1)$ et $F(3 ; 0 ; 1)$, on calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{IE}(-1,5 ; 0 ; -1)$ et $\vec{IF}(1,5 ; 0 ; -1)$.

On calcule les normes : $IE^2 = (-1,5)^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2,25 + 1 = 3,25 = \frac{13}{4}$, donc $IE = \frac{\sqrt{13}}{2}$; de même $IF = \frac{\sqrt{13}}{2}$ (le triangle EIF est bien isocèle en I).

On calcule le produit scalaire : $\vec{IE} \cdot \vec{IF} = (-1,5) \times 1,5 + 0 \times 0 + (-1) \times (-1) = -2,25 + 1 = -1,25$.

Or $\vec{IE} \cdot \vec{IF} = IE \times IF \times \cos(\widehat{EIF})$, donc $\cos(\widehat{EIF}) = \frac{-1,25}{\frac{\sqrt{13}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{-1,25}{\frac{13}{4}} = -\frac{5}{13}$.

La calculatrice donne alors $\widehat{EIF} = \arccos\left(-\frac{5}{13}\right) \approx 112,6^\circ$, soit **113°** au degré près.

5.a. On souhaite creuser une tranchée depuis un relais électrique R de coordonnées (6 ; -3 ; -1), assimilée à un segment de la droite Δ passant par R et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-3 ; 4 ; 1)$. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ .

Un point M(x ; y ; z) appartient à Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\vec{RM} = t\vec{u}$, ce qui donne la représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = -1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.b. On admet qu'une équation du plan (BFG) est $x = 3$. Soit K le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (BFG). Déterminer les coordonnées de K.

Le point K appartient à la fois à Δ et au plan (BFG), donc ses coordonnées vérifient à la fois la représentation paramétrique de Δ et l'équation $x = 3$.

En substituant $x = 6 - 3t$ dans $x = 3$, on obtient $6 - 3t = 3 \iff 3t = 3 \iff t = 1$.

On reporte $t = 1$ dans les deux autres équations : $y = -3 + 4 \times 1 = 1$ et $z = -1 + 1 = 0$.

Donc, les coordonnées du point K sont **K(3 ; 1 ; 0)**.

5.c. Le point K appartient-il à l'arête [BC] ?

Dans le repère choisi, B(3 ; 0 ; 0) et C(3 ; 2 ; 0) (C ayant même abscisse et cote que B, et l'ordonnée de D).

Le milieu de [BC] a pour coordonnées $\left(\frac{3+3}{2} ; \frac{0+2}{2} ; \frac{0+0}{2}\right) = (3 ; 1 ; 0)$, qui sont exactement les coordonnées de K.

Donc K est le milieu de [BC], et en particulier, K appartient bien à l'arête [BC] : la tranchée atteindra donc la maison au niveau de cette arête.

Bac Terminale 2021 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A (avec $a = \frac{2}{3}$) — 1. ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE, J est le point du segment [CG] tel que $\vec{CJ} = \frac{2}{3}\vec{CG}$. Dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, donner les coordonnées de F, I et J.

Le cube a pour arête 1 dans ce repère, donc F, sommet opposé à D sur la face supérieure du carré ABFE, a pour coordonnées F(1 ; 0 ; 1).

I est le centre de la face ADHE, donc le milieu de [AH] (et aussi de [DE]) : $I\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Comme $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ avec $C(1 ; 1 ; 0)$ et $G(1 ; 1 ; 1)$, on a $J\left(1 ; 1 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 2. On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ). Déterminer une représentation paramétrique de (d) .

$$\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ (obtenu par } J - F\text{)}.$$

(d) passe par $I\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et admet $\overrightarrow{FJ}$ pour vecteur directeur, donc une représentation paramétrique de (d) est : $x = 0$, $y = \frac{1}{2} + t$, $z = \frac{1}{2} - \frac{t}{3}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Partie A — 3.a K est le point d'intersection de (d) et de (AE). Montrer que K a pour coordonnées $\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.

La droite (AE) est l'axe des cotes (points d'ordonnée nulle). On cherche donc le point de (d) tel que $y = 0$: $\frac{1}{2} + t = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$.

La cote correspondante vaut $z = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

On obtient bien $K\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 3.b Déterminer les coordonnées du point L, intersection de (d) et de (DH).

Tous les points de (DH) ont pour ordonnée 1. On cherche donc le point de (d) tel que $y = 1$: $\frac{1}{2} + t = 1 \iff t = \frac{1}{2}$.

La cote correspondante vaut $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Donc, la réponse est $L\left(0 ; 1 ; \frac{1}{3}\right)$.

Partie A — 4.a Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.

Le milieu de [FL] a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2} ; \frac{0+1}{2} ; \frac{1+\frac{1}{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{2}{3}\right)$.

Le milieu de [JK] a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2} ; \frac{1+0}{2} ; \frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{2}{3}\right)$.

Les diagonales [FL] et [JK] ont le même milieu : **FJLK est donc un parallélogramme.**

Partie A — 4.b Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.

$$\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) + \left(-\frac{2}{3}\right) \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0.$$

Les diagonales du parallélogramme FJLK sont donc perpendiculaires : **FJLK est un losange.**

Partie A — 4.c Le quadrilatère FJLK est-il un carré ?

$$\overrightarrow{KF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{KF} \cdot \overrightarrow{FJ} = 0 + 0 - \frac{1}{9} = -\frac{1}{9} \neq 0.$$

Les côtés consécutifs [KF] et [FJ] ne sont donc pas perpendiculaires : le losange FJLK n'est pas un rectangle, donc, la réponse est **non, FJLK n'est pas un carré.**

Partie B (cas général) — 1. On admet désormais que $K\left(0 ; 0 ; 1 - \frac{a}{2}\right)$ et $L\left(0 ; 1 ; \frac{a}{2}\right)$, avec $a \in [0 ; 1]$. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a.

$$G \text{ a pour coordonnées } (1 ; 1 ; 1), \text{ donc } \overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Comme C(1 ; 1 ; 0), on en déduit J(1 ; 1 ; a).

Partie B — 2. Montrer que FJLK est un parallélogramme, quelle que soit la valeur de a.

$$\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ (en calculant } \frac{a}{2} - \left(1 - \frac{a}{2}\right) = a - 1).$$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{KL}$: **FJLK est donc un parallélogramme pour toute valeur de a.**

Partie B — 3. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles FJLK est un losange ?

$$\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{a}{2} - 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 - \frac{3a}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = 1 - 1 + \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right).$$

Ce produit s'annule si et seulement si $\frac{a}{2} = 1$ (soit $a = 2$) ou $1 = \frac{3a}{2}$ (soit $a = \frac{2}{3}$).

Seule la valeur $a = \frac{2}{3}$ appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$: dans ce cas, les diagonales du parallélogramme FJLK sont perpendiculaires, donc, la réponse est **oui, uniquement pour $a = \frac{2}{3}$, FJLK est un losange.**

Partie B — 4. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles FJLK est un carré ?

D'après la question précédente, la seule valeur de a rendant FJLK losange est $a = \frac{2}{3}$, cas déjà étudié en partie A où l'on a montré que ce losange n'était pas un carré : donc, la réponse est **non, il n'existe aucune valeur de a pour laquelle FJLK est un carré.**