

Second degré — Tous les corrigés

LOGIMATHS

Bac Première 2026 — Métropole (SPE)

Affirmation 1 : quelle que soit la valeur de u , $x^2 + x - u^2 = 0$ possède deux solutions réelles distinctes. Vrai ou faux ?

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-u^2) = 1 + 4u^2$.

Comme $4u^2 \geq 0$ pour tout réel u , $\Delta \geq 1 > 0$: le discriminant est toujours strictement positif, l'équation admet donc toujours deux solutions réelles distinctes. L'affirmation 1 est **VRAIE**.

Affirmation 2 : la suite (u_n) définie par $u_n = 2^{-n}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Vrai ou faux ?

$u_n = 2^{-n} = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$: (u_n) est bien géométrique de raison $\frac{1}{2}$, de premier terme $u_0 = 1$.

L'affirmation 2 est **VRAIE**.

Affirmation 3 : le point $A(3;3)$ appartient à la tangente à C_f en $x=0$, pour $f(x) = e^x - 1$. Vrai ou faux ?

$f'(x) = e^x$, donc $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$. L'équation de la tangente en $x = 0$ est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$.

Le point $A(3;3)$ vérifie $y = x$ (puisque $3 = 3$) : il appartient bien à la tangente. L'affirmation 3 est **VRAIE**.

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 1)

Partie A — 1. Les courbes C_1 et C_2 représentent deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, l'une étant la dérivée de l'autre ; C_1 coupe l'axe des ordonnées en $(0; 1)$, C_2 le coupe en $(0; 2)$ et coupe l'axe des abscisses en $(-2; 0)$ et $(1; 0)$. Associer à g et g' leur courbe.

La fonction représentée par C_1 est décroissante sur $] -\infty ; -2]$ et $[1 ; +\infty[$, croissante sur $[-2 ; 1]$.

La fonction représentée par C_2 est négative sur $] -\infty ; -2]$ et $[1 ; +\infty[$, positive sur $[-2 ; 1]$: ce sont exactement les intervalles où la fonction de C_1 croît ou décroît.

Le signe de la dérivée déterminant les variations, C_1 représente g et C_2 représente g' .

Partie A — 2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

La tangente en 0 a pour équation $y = g'(0)x + g(0)$.

$\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées en $(0 ; 1)$ donc $g(0) = 1$; $\mathcal{C}_2$ le coupe en $(0 ; 2)$ donc $g'(0) = 2$.

L'équation de la tangente est donc $y = 2x + 1$.

Partie B — 1. On considère l'équation différentielle (E) : $y + y' = (2x+3)e^{-x}$. Montrer que $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est une solution particulière de (E).

f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables : $f'_0(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x)(-e^{-x}) = (2x + 3 - x^2 - 3x)e^{-x} = (-x^2 - x + 3)e^{-x}$.

$f_0(x) + f'_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x} + (-x^2 - x + 3)e^{-x} = (2x + 3)e^{-x}$: f_0 vérifie bien (E).

Partie B — 2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y + y' = 0$.

(E_0) équivaut à $y' = -y$: ses solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie B — 3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

(E) est de la forme $y' = ay + f$ avec f_0 solution particulière : ses solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-x} + f_0(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie B — 4. On admet que g est solution de (E). Déterminer l'expression de g .

Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$. Comme $g(0) = 1$: $1 = (0 + 0 + C)e^0 = C$.

$g(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$.

Partie B — 5. Déterminer les solutions de (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Une courbe admet exactement deux points d'inflexion si et seulement si sa dérivée seconde s'annule exactement deux fois en changeant de signe.

Soit $f(x) = (x^2 + 3x + C)e^{-x}$ une solution de (E) : $f'(x) = (-x^2 - x + 3 - C)e^{-x}$ et $f''(x) = (x^2 - x - 4 + C)e^{-x}$.

L'exponentielle étant strictement positive, $f''(x)$ est du signe de $x^2 - x - 4 + C$, dont le discriminant est $\Delta = 1 - 4(-4 + C) = 17 - 4C$.

Ce polynôme change deux fois de signe si et seulement si $\Delta > 0$, soit $C < \frac{17}{4}$.

Les solutions cherchées sont les fonctions $x \mapsto (x^2 + 3x + C)e^{-x}$ avec $C < \frac{17}{4}$.

Partie C — 1. On considère $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la limite de f en $+\infty$ est égale à 0.

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} + 3\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}.$$

Par croissances comparées, pour tout entier n non nul, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$; donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Partie C — 2.a Vérifier que, pour tout réel x , $f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$.

$$f'(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x + 2)(-e^{-x}) = (2x + 3 - x^2 - 3x - 2)e^{-x} = (-x^2 - x + 1)e^{-x}.$$

Partie C — 2.b Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de f .

L'exponentielle étant strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $-x^2 - x + 1$, de discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$.

Ses racines sont $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$; le coefficient dominant étant négatif, $-x^2 - x + 1$ est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles.

f est décroissante sur $] -\infty ; x_1]$ et sur $[x_2 ; +\infty[$, croissante sur $[x_1 ; x_2]$.

Partie C — 3. Expliquer pourquoi f est positive sur $[0 ; +\infty[$.

L'exponentielle étant strictement positive, $f(x)$ est du signe de $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$, de racines -2 et -1 .

Le coefficient dominant étant positif, ce polynôme est positif sur $] -1 ; +\infty[$, donc en particulier sur $[0 ; +\infty[$: f est positive sur $[0 ; +\infty[$.

Partie C — 4. On admet que $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$ est une primitive de f . Pour α réel positif, déterminer l'aire $A(\alpha)$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites $x = 0$ et $x = \alpha$.

f étant positive sur $[0 ; \alpha]$, l'aire cherchée est $\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx = F(\alpha) - F(0)$.

$F(0) = (0 - 0 - 7)e^0 = -7$, donc $\mathcal{A}(\alpha) = (-\alpha^2 - 5\alpha - 7)e^{-\alpha} + 7$ unités d'aire.

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 1)

Partie A — 1. On considère $f(x) = 4\ln(x+1) - x^2/25$ sur $] -1 ; +\infty[$. Déterminer la limite de f en -1 .

$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0^+$, donc, par composition avec $\ln$ (qui tend vers $-\infty$ en 0^+), $\lim_{x \rightarrow -1} 4\ln(x+1) = -\infty$.

Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow -1} \left(-\frac{x^2}{25}\right) = -\frac{1}{25}$, donc par somme, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

Partie A — 2. Montrer que, pour tout x de $] -1 ; +\infty[$, $f'(x) = (100 - 2x - 2x^2) / (25(x+1))$.

f est dérivable sur $] -1 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables : la dérivée de $4\ln(x+1)$ est $\frac{4}{x+1}$, et celle de $-\frac{x^2}{25}$ est $-\frac{2x}{25}$.

$$f'(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{2x}{25} = \frac{4 \times 25 - (x+1) \times 2x}{25(x+1)} = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}.$$

Partie A — 3. Étudier les variations de f sur $] -1 ; +\infty[$ et en déduire que f est strictement croissante sur $[2 ; 6,5]$.

Comme $25(x+1) > 0$ sur $] -1 ; +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $100 - 2x - 2x^2$, trinôme de coefficient dominant négatif (-2).

$$\Delta = 4 + 800 = 804 > 0 : \text{les racines sont } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{201}}{2} \approx 6,6 \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{201}}{2} \approx -7,6 < -1.$$

Le coefficient dominant étant négatif, $f'(x) > 0$ sur $] -1 ; x_1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]x_1 ; +\infty[$: f est croissante sur $] -1 ; x_1]$ puis décroissante.

Comme $[2 ; 6,5] \subset] -1 ; x_1[$ (car $x_1 \approx 6,6 > 6,5$), f est strictement croissante sur $[2 ; 6,5]$.

Partie A — 4. On pose $h(x) = f(x) - x$ sur $[2 ; 6,5]$, avec un maximum $M \approx 2,265$ atteint en $m \approx 2,364$. Montrer que $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[2 ; 6,5]$.

$h(2) = f(2) - 2 \approx 2,23 > 0$. Sur $[2 ; m]$, h est strictement croissante et $h(2) > 0$, donc $h(x) > 0$ sur cet intervalle : pas de solution ici.

Sur $[m ; 6,5]$, h est continue et strictement décroissante, avec $h(m) = M \approx 2,265 > 0$ et $h(6,5) \approx -0,13 < 0$.

0 est compris entre $h(m)$ et $h(6,5)$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[m ; 6,5]$, donc sur $[2 ; 6,5]$.

Partie A — 5.a On donne un script Python bornes(n) qui affine un encadrement de α . Donner les valeurs renvoyées par bornes(2) (arrondies au centième).

À la calculatrice, 'bornes(2)' renvoie (6,36 ; 6,37).

Partie A — 5.b Interpréter ces valeurs.

Ces valeurs donnent un encadrement de α : $6,36 < \alpha < 6,37$.

Partie B — 1. On considère (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence que, pour tout n , $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = f(2) \approx 4,23$, donc $2 \leq u_0 \leq u_1 < 6,5$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que, pour un entier n , $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$. Comme f est strictement croissante sur $[2 ; 6,5]$: $f(2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(6,5)$.

Or $f(2) \approx 4,23 > 2$ et $f(6,5) \approx 6,37 < 6,5$, donc $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6,5$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n , $2 \leq u_n \leq u_{n+1} < 6,5$.

Partie B — 2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite .

D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée par 6,5 : toute suite croissante et majorée étant convergente, (u_n) **converge vers une limite** $\ell \leq 6,5$.

Partie B — 3. On rappelle que α est l'unique solution de $h(x) = 0$ sur $[2 ; 6,5]$. Justifier que $\ell = \alpha$.

(u_n) vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue : d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de $f(x) = x$, c'est-à-dire de $h(x) = 0$. Comme $\ell \in [2 ; 6,5]$ et que cette équation y admet l'unique solution α , on a $\ell = \alpha$.

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 1)

Partie A — 1. On donne la courbe de f , avec la tangente T_A en $A(1 ; 2)$ passant par $C(3 ; 0)$. Déterminer $f'(1)$.

$f'(1)$ est le coefficient directeur de T_A : $\frac{0 - 2}{3 - 1} = -1$.

Partie A — 2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle sur $]0 ; 3]$?

$f'(x) = 0$ correspond aux points où la tangente est horizontale : d'après le graphique, cela se produit **2 fois** sur $]0 ; 3]$.

Partie A — 3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Sur $[0 ; 0,5]$, la courbe semble concave d'après le graphique, donc $f''(0,2) < 0$.

Partie B — 1. On admet que $f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$ sur $]0; +\infty[$. Résoudre $2X^2 - 3X + 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$, et en déduire que la courbe de f ne coupe pas l'axe des abscisses.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0$: l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$ n'a pas de solution réelle.

$f(x) = 0 \iff x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2] = 0$. Comme $x > 0$, cela équivaut à $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$, soit, en posant $X = \ln x$, à $2X^2 - 3X + 2 = 0$, qui n'a pas de solution.

L'équation $f(x) = 0$ n'a donc pas de solution : **la courbe de f ne coupe pas l'axe des abscisses.**

Partie B — 2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$ (on admet que la limite en 0 est 0).

$$f(x) = x(\ln x)^2 \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right) = 2.$$

$$\text{Par produit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Partie B — 3.a On admet que $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$. Montrer que $f''(x) = (1/x)(4\ln x + 1)$.

$$f''(x) = 2 \times 2\ln x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(4\ln x + 1).$$

Partie B — 3.b Étudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$ et préciser l'abscisse exacte du point d'inflexion.

Sur $]0; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $4\ln x + 1$.

$$4\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{4} \iff x = e^{-\frac{1}{4}}; 4\ln x + 1 > 0 \iff x > e^{-\frac{1}{4}}.$$

f est donc **concave** sur $\left] 0; e^{-\frac{1}{4}} \right]$ et **convexe** sur $\left[e^{-\frac{1}{4}}; +\infty \right[$, avec un point d'inflexion d'abscisse exacte $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,779$.

Partie B — 3.c Montrer que la courbe de f est au-dessus de la tangente T_B sur $]1; +\infty[$.

Comme $e^{-\frac{1}{4}} < 1$, f est convexe sur $[1; +\infty[$: sur cet intervalle, la courbe est donc au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier T_B .

Partie C — 1. Justifier que la tangente T_B (au point d'abscisse e) a pour équation réduite $y = 2x - e$.

$$f'(e) = 2(\ln e)^2 + \ln e - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 \text{ et } f(e) = e(2 \times 1 - 3 + 2) = e \times 1 = e.$$

$$\text{La tangente en } e \text{ a pour équation } y = f'(e)(x - e) + f(e) = 2(x - e) + e = 2x - e.$$

Partie C — 2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale de $x \ln x$ entre 1 et e vaut $(e^2 + 1)/4$.

$$\text{On pose } u(x) = \ln x \text{ et } v'(x) = x \text{ (donc } u'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } v(x) = \frac{x^2}{2}).$$

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\ln x \times \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Partie C — 3. On admet que l'intégrale de $x(\ln x)^2$ entre 1 et e vaut $(e^2 - 1)/4$. En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine entre la courbe de f , la tangente T_B et les droites $x=1$ et $x=e$.

$$\text{Sur } [1; e], \text{ la courbe est au-dessus de } T_B, \text{ donc } \mathcal{A} = \int_1^e [f(x) - (2x - e)] \, dx = \int_1^e [2x(\ln x)^2 - 3x \ln x + e] \, dx.$$

$$\text{Par linéarité : } \mathcal{A} = 2 \times \frac{e^2 - 1}{4} - 3 \times \frac{e^2 + 1}{4} + [ex]_1^e = \frac{-e^2 - 5}{4} + (e^2 - e).$$

$$\mathcal{A} = \frac{3e^2 - 4e - 5}{4} \text{ unités d'aire (soit environ 1,57 u.a.).}$$

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 2)

Partie A — 1. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -1; 2)$, $C(1; 1; 1)$, la droite $(d) : x = \frac{3}{2} + 2t, y = 2 + t, z = 3 - t$, et $(d') : x = s, y = \frac{3}{2} + s, z = 3 - 2s$.

Montrer que (d) et (d') sont sécantes au point $S(-\frac{1}{2}; 1; 4)$.

$$\text{Chercher un point commun revient à résoudre } \frac{3}{2} + 2t = s, 2 + t = \frac{3}{2} + s, 3 - t = 3 - 2s.$$

$$\text{En substituant } s = \frac{3}{2} + 2t \text{ dans les deux dernières équations : } 2 + t = 3 + 2t \iff t = -1, \text{ et } 3 - t = -4t \iff 3t = -3 \iff t = -1 \text{ (cohérent), d'où } s = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}.$$

Ces deux valeurs donnent bien le même point $(-\frac{1}{2}; 1; 4)$ sur les deux droites : **elles sont donc sécantes en S .**

Partie A — 2.a Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; 2; 4)$ est normal au plan (ABC).

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas colinéaires.}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 - 6 + 4 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 2 + 0 = 0 : \vec{n} \text{ est donc normal au plan (ABC).}$$

Partie A — 2.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + 2y + 4z - 7 = 0$.

$\vec{n}$ étant normal à (ABC), ce plan a une équation de la forme $x + 2y + 4z + d = 0$; comme C(1; 1; 1) appartient au plan : $1 + 2 + 4 + d = 0 \iff d = -7$, soit $x + 2y + 4z - 7 = 0$.

Partie A — 3. Démontrer que A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

A, B, C définissant un plan, il suffit de vérifier que S n'appartient pas à ce plan : $-\frac{1}{2} + 2 \times 1 + 4 \times 4 - 7 = -\frac{1}{2} + 2 + 16 - 7 = \frac{21}{2} \neq 0$: S n'appartient pas au plan (ABC), donc A, B, C, S ne sont pas coplanaires.

Partie A — 4.a Démontrer que H(-1; 0; 2) est le projeté orthogonal de S sur (ABC).

$$\text{Si H est ce projeté, } \overrightarrow{SH} \text{ doit être colinéaire à } \vec{n} : \overrightarrow{SH} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ et } \vec{n} = -2\overrightarrow{SH} : \text{colinéaires.}$$

De plus, H appartient au plan : $-1 + 2 \times 0 + 4 \times 2 - 7 = -1 + 0 + 8 - 7 = 0$.

H est donc bien le projeté orthogonal de S sur (ABC).

Partie A — 4.b En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \sqrt{\frac{21}{2}}$.

$$SH^2 = \frac{1}{4} + 1 + 4 = \frac{21}{4}, \text{ donc } SH = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

H étant le projeté orthogonal de S, c'est le point du plan le plus proche de S : pour tout autre point M du plan, [SM] est l'hypoténuse du triangle rectangle SHM, donc $SM > SH$.

Il n'existe donc aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B — 1. Soit M sur [CS] avec $CM = k \cdot CS$, $k \in [0; 1]$. Déterminer les coordonnées de M en fonction de k.

$$\overrightarrow{CS} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS} \text{ donne } x - 1 = -\frac{3}{2}k, y - 1 = 0, z - 1 = 3k.$$

M a pour coordonnées $(1 - \frac{3}{2}k ; 1 ; 1 + 3k)$.

Partie B — 2. Existe-t-il un point M sur [CS] tel que le triangle MAB soit rectangle en M ?

Le triangle MAB est rectangle en M si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} 2 - \frac{3}{2}k \\ -1 \\ 3k \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}k \\ 2 \\ 3k - 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -\frac{3}{2}k(2 - \frac{3}{2}k) - 2 + 3k(3k - 1).$$

En développant : $45k^2 - 24k - 8 = 0$, de discriminant $\Delta = 24^2 + 4 \times 45 \times 8 = 2016 > 0$, avec racines $k_1 = \frac{24 + \sqrt{2016}}{90} \approx 0,765$ et $k_2 \approx -0,232$.

Seul $k_1 \in [0 ; 1]$ convient : **il existe un unique point M_1 sur [CS] tel que le triangle M_1AB soit rectangle en M_1 .**

Bac Terminale 2024 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1.a Soit $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ sur $] -\infty ; 1[$. Déterminer la limite de f en 1.

$e^x \rightarrow e > 0$ et $x - 1 \rightarrow 0^-$ (négatif sur l'intervalle) : par quotient, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

1.b En déduire une interprétation graphique.

La courbe $\mathcal{C}$ admet la **droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale**.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

$e^x \rightarrow 0$ et $x - 1 \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; la droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

3.a Montrer que $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}.$$

3.b Dresser, en justifiant, le tableau de variations de f sur $] -\infty ; 1[$.

$e^x > 0$ et $(x-1)^2 > 0$: $f'(x)$ est du signe de $x-2$, strictement négatif sur $] -\infty ; 1[$. **f est strictement décroissante**, de 0 (limite en $-\infty$) vers $-\infty$ (limite en 1).

4.a On admet $f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}$. Étudier la convexité de f sur $] -\infty ; 1[$.

$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0$ pour tout réel x , et $e^x > 0$; sur $] -\infty ; 1[$, $(x-1)^3 < 0$.

$f''(x) < 0$ sur tout l'intervalle : **f est concave sur $] -\infty ; 1[$.**

4.b Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

$$f(0) = -1 \text{ et } f'(0) = \frac{-2 \times 1}{1} = -2 : T : y = -2x - 1.$$

4.c En déduire que, pour tout x de $] -\infty ; 1[$, $e^x \geq (-2x - 1)(x - 1)$.

f étant concave, sa courbe est sous ses tangentes : $f(x) \leq -2x - 1$, soit $\frac{e^x}{x - 1} \leq -2x - 1$.

En multipliant par $x - 1 < 0$ (le sens change) : $e^x \geq (-2x - 1)(x - 1)$.

5.a Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $] -\infty ; 1[$.

f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty ; 1[$, et -2 est compris entre $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_1 f = -\infty$: par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet **une unique solution** α .

5.b À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

$$f(0,31) \approx -1,98 > -2 \text{ et } f(0,32) \approx -2,03 < -2 : 0,31 < \alpha < 0,32.$$

Bac Terminale 2024 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A — 1. Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$ sur $[0 ; +\infty[$. Démontrer que f est croissante sur cet intervalle.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0 \text{ sur } [0 ; +\infty[: f \text{ est croissante.}$$

Partie A — 2. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}$.

$$\begin{aligned} \text{En multipliant par la quantité conjuguée : } \sqrt{x+1} - x &= \frac{(\sqrt{x+1} - x)(\sqrt{x+1} + x)}{\sqrt{x+1} + x} = \frac{(x+1) - x^2}{\sqrt{x+1} + x} = \\ &= \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}. \end{aligned}$$

Partie A — 3. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ sur $[0 ; +\infty[$.

Le dénominateur étant strictement positif, $f(x) = x \iff -x^2 + x + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 5$.

Les racines sont $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$: seule la première appartient à $[0 ; +\infty[$. $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or).

Partie B — 1. Soit (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer par récurrence que, pour tout n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation : $u_1 = \sqrt{6} \approx 2,45$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0 = 5$: vrai au rang 0.

Hérédité : si $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$, la croissance de f donne $f(1) = \sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$, et $\sqrt{2} \geq 1$: vrai au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Partie B — 2. En déduire que la suite (u_n) converge.

(u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge.

Partie B — 3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

f étant continue sur $[0 ; +\infty[$, la limite vérifie $f(\ell) = \ell$; d'après la partie A, l'unique solution de cette équation est $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$: c'est la limite de la suite.

Partie B — 4.a Un script Python 'seuil(n)' compte les itérations nécessaires pour que $|u_i - \ell| < 10^{-n}$. Donner la valeur renvoyée par seuil(2).

À la calculatrice, $|u_4 - \ell| \approx 0,02 \geq 10^{-2}$ et $|u_5 - \ell| \approx 0,007 < 10^{-2}$: la fonction renvoie 5.

Partie B — 4.b La valeur renvoyée par seuil(4) est 9. Interpréter.

u_9 est le premier terme de la suite qui approche le nombre d'or ℓ à moins de 10^{-4} près : il faut 9 itérations pour obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 1)

Partie A — 1.a Soit $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

En 0 : $x - 2 \rightarrow -2$ et $\ln(x) \rightarrow -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. En $+\infty$: les deux termes tendent vers $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie A — 1.b Montrer que $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{2x+1}{2x}.$$

Partie A — 1.c Étudier le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.

Pour $x > 0$, numérateur et dénominateur de $f'(x)$ sont strictement positifs : $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Partie A — 1.d Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$.

$$f''(x) = -\frac{1}{2x^2} < 0 : f \text{ est concave sur }]0 ; +\infty[.$$

Partie A — 2.a Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α , appartenant à $[1 ; 2]$.

f est continue et strictement croissante, de $-\infty$ à $+\infty$: par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution α .

$$f(1) = -1 < 0 \text{ et } f(2) = \frac{\ln 2}{2} > 0 : \text{donc } \alpha \in [1 ; 2].$$

Partie A — 2.b Déterminer le signe de $f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

f étant strictement croissante et s'annulant en α : $f(x) < 0$ sur $]0 ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, et $f(x) > 0$ sur $] \alpha ; +\infty[$.

Partie A — 2.c Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha - 2 + \frac{1}{2} \ln(\alpha) = 0 \iff \frac{1}{2} \ln(\alpha) = 2 - \alpha \iff \ln(\alpha) = 2(2 - \alpha).$$

Partie B — 1. Soit $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln(x)$ sur $]0 ; 1]$. Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$g'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}(2x \ln(x) + x) = 1 - 2x - \frac{x \ln(x)}{2}.$$

$$\text{En factorisant par } x : g'(x) = x \left(\frac{1}{x} - 2 - \frac{\ln(x)}{2} \right) = x \left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{x}\right) \right) = xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

Partie B — 2.a Justifier que, pour $x \in \left]0 ; \frac{1}{\alpha}\right[$, $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

Si $0 < x < \frac{1}{\alpha}$, alors $\frac{1}{x} > \alpha$, et f est strictement positive sur $] \alpha ; +\infty[$: donc $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

Partie B — 2.b En déduire le tableau de variations de g sur $]0 ; 1]$.

$g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ est du signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ (car $x > 0$) : g est **croissante** sur $\left]0 ; \frac{1}{\alpha}\right]$ puis **décroissante** sur $\left[\frac{1}{\alpha} ; 1\right]$, avec un maximum en $\frac{1}{\alpha}$.

Partie C — 1.a Justifier la position relative de $\mathcal{C}_g$ et de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur $]0 ; 1]$.

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2 \ln(x) \geq 0 \text{ sur }]0 ; 1] \text{ (car } \ln(x) \leq 0) : \mathcal{C}_g \text{ est au-dessus de } \mathcal{P}.$$

Partie C — 1.b Démontrer que $\int_{1/\alpha}^1 x^2 \ln(x) \, dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$.

Par intégration par parties avec $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x^2$: $\int_{1/\alpha}^1 x^2 \ln(x) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} \right]_{1/\alpha}^1 =$
 $-\frac{1}{9} - \frac{1}{3\alpha^3} \left(-\ln(\alpha) - \frac{1}{3} \right)$.

En remplaçant $\ln(\alpha)$ par $2(2 - \alpha) : = -\frac{1}{9} + \frac{4}{3\alpha^3} - \frac{2}{3\alpha^2} + \frac{1}{9\alpha^3} = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$.

Partie C — 2. En déduire l'expression, en fonction de α , de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{P}$, et les droites $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

$$\mathcal{A} = \int_{1/\alpha}^1 \left(-\frac{1}{4}x^2 \ln(x) \right) dx = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3} \approx 0,07 \text{ unité d'aire.}$$

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 2)

Partie A — 1. La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par $B(-1; -2)$, où sa tangente T passe aussi par $A(0; -1)$. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.

$f(-1) = -2$ (ordonnée de B), et $f'(-1)$ est le coefficient directeur de $T = (AB) : \frac{-1 - (-2)}{0 - (-1)} = 1$.

Partie A — 2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ?

Non : la courbe passe **en dessous** de sa tangente T pour les abscisses proches de -2 , ce qui est impossible pour une fonction convexe. Elle semble concave puis convexe, avec un point d'inflexion vers $x \approx -1,4$.

Partie A — 3. Conjecturer le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près.

La courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'une seule fois, vers $x \approx 0,1$.

Partie B — 1. On considère $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$ sur $] -2; +\infty[$. Déterminer la limite de f en -2 et interpréter.

$x^2 + 2x - 1 \rightarrow -1$ et $\ln(x + 2) \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$. La droite $x = -2$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

Partie B — 2. Montrer que, pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.

$$f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x + 2} = \frac{(2x + 2)(x + 2) + 1}{x + 2} = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}.$$

Partie B — 3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations complet.

Le numérateur $2x^2 + 6x + 5$ a pour discriminant $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$: il est strictement positif pour tout x ; le dénominateur $x + 2$ est positif sur l'intervalle.

$f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $] -2 ; +\infty[$, de $-\infty$ à $+\infty$.

Partie B — 4. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α , et donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

f est continue, strictement croissante, de $-\infty$ à $+\infty$: par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution α . Par balayage : $\alpha \approx 0,12$.

Partie B — 5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $] -2 ; +\infty[$.

$f(x) < 0$ sur $] -2 ; \alpha[$, $f(\alpha) = 0$, et $f(x) > 0$ sur $] \alpha ; +\infty[$.

Partie B — 6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

$$f''(x) = \frac{(4x + 6)(x + 2) - (2x^2 + 6x + 5)}{(x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 8x + 7}{(x + 2)^2}, \text{ du signe du numérateur.}$$

Le trinôme $2x^2 + 8x + 7$ a pour discriminant $\Delta = 64 - 56 = 8 > 0$, avec pour racines $-2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; seule $-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ appartient à l'intervalle.

f'' s'y annule en changeant de signe : l'unique point d'inflexion a pour abscisse $-2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -1,29$.

Partie C — 1. Soit $g(x) = \ln(x + 2)$, $J(0 ; 1)$ et M le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x . Justifier que $h(x) = JM^2 = x^2 + [\ln(x + 2) - 1]^2$.

$$JM^2 = (x - 0)^2 + (g(x) - 1)^2 = x^2 + [\ln(x + 2) - 1]^2 \text{ (repère orthonormé).}$$

Partie C — 2.a On admet $h'(x) = \frac{2f(x)}{x + 2}$. Dresser le tableau de variations de h .

$\frac{2}{x + 2} > 0$ sur l'intervalle : $h'(x)$ est du signe de $f(x)$. h décroît sur $] -2 ; \alpha[$ puis croît sur $[\alpha ; +\infty[$, avec un minimum en α .

Partie C — 2.b En déduire que la distance JM est minimale pour $x = \alpha$.

La distance JM est minimale lorsque son carré $h(x)$ est minimal (croissance de la racine carrée), c'est-à-dire pour $x = \alpha$.

Partie C — 3.a Montrer que $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha + 2) = 0 \iff \ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2.$$

Partie C — 3.b En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_g$ en M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

La tangente a pour coefficient directeur $g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 2}$; la droite (JM_α) a pour coefficient directeur $\frac{\ln(\alpha + 2) - 1}{\alpha} = \frac{-2\alpha - \alpha^2}{\alpha} = -2 - \alpha$.

Le produit vaut $\frac{1}{\alpha + 2} \times (-2 - \alpha) = -1$: les deux droites sont perpendiculaires.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 2)
1.a Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, le plan $\mathcal{P}_1$ a pour équation cartésienne $2x + y - z + 2 = 0$. Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}_1$ à $\mathcal{P}_1$.

Les coefficients de x , y et z dans l'équation cartésienne d'un plan donnent directement les coordonnées d'un vecteur normal à ce plan. Donc, la réponse est $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.b Le plan $\mathcal{P}_2$ passe par $B(1; 1; 2)$ et admet pour vecteur normal $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sachant que deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre, montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 2 - 1 - 1 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont donc orthogonaux. Donc, la réponse est : les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

2.a Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$.

Le plan $\mathcal{P}_2$ admet $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal, donc son équation cartésienne est de la forme $x - y + z + d = 0$, où d est une constante réelle à déterminer.

Le point $B(1; 1; 2)$ appartient à $\mathcal{P}_2$, donc ses coordonnées vérifient l'équation : $1 - 1 + 2 + d = 0$, soit $d = -2$.

Donc, la réponse est : $\mathcal{P}_2$ a pour équation cartésienne $x - y + z - 2 = 0$.

2.b On note Δ la droite de représentation paramétrique $x = 0, y = -2 + t, z = t$ (avec $t \in \mathbb{R}$). Montrer que Δ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Les points de l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont les triplets $(x; y; z)$ vérifiant simultanément $2x + y - z + 2 = 0$ et $x - y + z - 2 = 0$.

En additionnant les deux équations, les termes en y et z s'éliminent partiellement : $(2x + y - z + 2) + (x - y + z - 2) = 3x = 0$, donc $x = 0$.

En reportant $x = 0$ dans la deuxième équation : $0 - y + z - 2 = 0$, soit $y = z - 2$. En posant $z = t$ (réel quelconque), on obtient $x = 0, y = -2 + t, z = t$, ce qui est exactement la représentation paramétrique de Δ .

Donc, la réponse est : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Delta$.

3.a On considère le point $A(1; 1; 1)$, qui n'appartient ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$, et H le projeté orthogonal de A sur Δ . Les points de Δ sont notés $M_t(0; -2 + t; t)$. Montrer que, pour tout réel t , $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

$$AM_t^2 = (0 - 1)^2 + (-2 + t - 1)^2 + (t - 1)^2 = (-1)^2 + (t - 3)^2 + (t - 1)^2.$$

$$= 1 + (t^2 - 6t + 9) + (t^2 - 2t + 1) = 2t^2 - 8t + 11.$$

Une longueur étant positive, $AM_t = \sqrt{AM_t^2}$. Donc, la réponse est $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

3.b En déduire que $AH = \sqrt{3}$.

Le point H , projeté orthogonal de A sur Δ , est le point de Δ le plus proche de A : la longueur AH est donc le minimum des longueurs AM_t pour t décrivant $\mathbb{R}$, ce qui revient à minimiser $2t^2 - 8t + 11$.

Cette expression est un trinôme du second degré de coefficient dominant $a = 2 > 0$: son minimum est atteint en $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \times 2} = 2$.

Ce minimum vaut $2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 11 = 8 - 16 + 11 = 3$. Donc, la réponse est $AH = \sqrt{3}$.

4.a On note $\mathcal{D}_1$ la droite orthogonale à $\mathcal{P}_1$ passant par A , et H_1 le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}_1$. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_1$.

La droite $\mathcal{D}_1$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$, donc le vecteur normal $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{P}_1$ dirige $\mathcal{D}_1$; celle-ci passe de plus par $A(1; 1; 1)$.

Donc, la réponse est : $\mathcal{D}_1$ a pour représentation paramétrique $x = 1 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = 1 - t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

4.b En déduire que H_1 a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Le point H_1 est l'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{P}_1$: ses coordonnées vérifient à la fois la représentation paramétrique de $\mathcal{D}_1$ et l'équation de $\mathcal{P}_1$.

En reportant $x = 1 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = 1 - t$ dans $2x + y - z + 2 = 0$: $2(1 + 2t) + (1 + t) - (1 - t) + 2 = 0$, soit $2 + 4t + 1 + t - 1 + t + 2 = 0$, c'est-à-dire $6t + 4 = 0$, donc $t = -\frac{2}{3}$.

On en déduit $x = 1 + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$, $y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ et $z = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

Donc, la réponse est : $H_1 \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}_2$; on admet que $H_2 \left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ et que $H(0; 0; 2)$. Montrer que le quadrilatère AH_1HH_2 est un rectangle.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AH_1}$ sont $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} - 1 \\ \frac{1}{3} - 1 \\ \frac{5}{3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{H_2H}$ sont $\begin{pmatrix} 0 - \frac{4}{3} \\ 0 - \frac{2}{3} \\ 2 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AH_1}$ et $\overrightarrow{H_2H}$ étant égaux, le quadrilatère AH_1HH_2 est un parallélogramme.

La droite (AH_1) est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ (car incluse dans $\mathcal{D}_1$), et H_1 appartient à $\mathcal{P}_1$; donc (AH_1) est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}_1$ passant par H_1 , en particulier à la droite (H_1H) , puisque H appartient à $\Delta \subset \mathcal{P}_1$.

Le parallélogramme AH_1HH_2 possède donc un angle droit en H_1 . Donc, la réponse est : AH_1HH_2 est un rectangle.

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 2)

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère le point $A(1; -1; -1)$, le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $5x + 2y + 4z = 17$ et le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $10x + 14y + 3z = 19$. Justifier que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ est $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$ est $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$. Si ces vecteurs étaient colinéaires, on aurait $\frac{10}{5} = \frac{14}{2} = \frac{3}{4}$, or $\frac{10}{5} = 2$ et $\frac{14}{2} = 7$: les rapports diffèrent, donc $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires. Donc, la réponse est que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique $x = 1 + 2t$, $y = -t$, $z = 3 - 2t$ (avec $t \in \mathbb{R}$). Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles (question précédente), donc ils sont sécants selon une droite. Vérifions que tout point de $\mathcal{D}$ appartient à cette droite d'intersection.

Pour tout réel t , en notant M le point de paramètre t : $5(1 + 2t) + 2(-t) + 4(3 - 2t) = 5 + 10t - 2t + 12 - 8t = 17$, donc $M \in \mathcal{P}_1$.

De même : $10(1 + 2t) + 14(-t) + 3(3 - 2t) = 10 + 20t - 14t + 9 - 6t = 19$, donc $M \in \mathcal{P}_2$.

Tout point de $\mathcal{D}$ appartient donc à la fois à $\mathcal{P}_1$ et à $\mathcal{P}_2$: $\mathcal{D}$ est bien la droite d'intersection de ces deux plans.

3.a Vérifier que A n'appartient pas à $\mathcal{P}_1$.

$5 \times 1 + 2 \times (-1) + 4 \times (-1) = 5 - 2 - 4 = -1$, et $-1 \neq 17$, donc, la réponse est que A n'appartient pas à $\mathcal{P}_1$.

3.b Justifier que A n'appartient pas à $\mathcal{D}$.

A appartiendrait à $\mathcal{D}$ s'il existait un réel t tel que $1 = 1 + 2t$, $-1 = -t$ et $-1 = 3 - 2t$, soit $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$ simultanément. Ces trois valeurs sont incompatibles, le système n'a pas de solution : donc, la réponse est que A n'appartient pas à $\mathcal{D}$.

4.a Pour tout réel t , on note M le point de $\mathcal{D}$ de coordonnées $(1 + 2t; -t; 3 - 2t)$ et $f(t) = AM^2$. Montrer que $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.

$$f(t) = (1 + 2t - 1)^2 + (-t - (-1))^2 + (3 - 2t - (-1))^2 = (2t)^2 + (1 - t)^2 + (4 - 2t)^2.$$

En développant : $4t^2 + (1 - 2t + t^2) + (16 - 16t + 4t^2) = 9t^2 - 18t + 17$. Donc, la réponse est $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.

4.b Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées (3 ; -1 ; 1).

La distance AM est minimale exactement quand $f(t) = AM^2$ est minimale, car la fonction racine carrée est croissante.

f est un polynôme du second degré de coefficient dominant $9 > 0$: il admet un minimum en $t = -\frac{-18}{2 \times 9} = \frac{18}{18} = 1$.

Pour $t = 1$, le point de $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $(1 + 2 ; -1 ; 3 - 2) = (3 ; -1 ; 1)$. Donc, la réponse est que AM est minimale pour $M(3 ; -1 ; 1)$.

5. On note H le point de coordonnées (3 ; -1 ; 1). Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ -1 - (-1) \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, lu sur sa représentation paramétrique, est $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Le repère étant orthonormé, on calcule le produit scalaire par les coordonnées : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AH} = 2 \times 2 + (-1) \times 0 + (-2) \times 2 = 4 + 0 - 4 = 0$.

Le produit scalaire est nul, donc les droites (AH) et $\mathcal{D}$ sont orthogonales. De plus, H appartient à $\mathcal{D}$ (c'est le point de paramètre $t = 1$) et H appartient aussi à (AH) : les deux droites sont donc sécantes en H. Étant orthogonales et sécantes, elles sont **perpendiculaires**.

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 2)

1. Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant. Affirmation : la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.

Vraie. Pour tout entier naturel n , $n+1 \geq 1 > 0$, donc $\frac{1}{n+1} \leq 1$, d'où $-1 \leq -\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n+1} \leq 1$.

De plus, pour tout entier naturel n , $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc, en divisant par $n+1 > 0$: $-\frac{1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$.

En combinant les deux encadrements : $-1 \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq 1$. Donc, la réponse est que la suite u est bornée par -1 et 1 .

2. Affirmation : toute suite bornée est convergente.

Fausse. La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ est bornée par -1 et 1 , mais elle prend alternativement les valeurs -1 et 1 : elle n'admet pas de limite, donc elle ne converge pas. Ce contre-exemple suffit à invalider l'affirmation.

3. Affirmation : toute suite croissante tend vers $+\infty$.

Fausse. La suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = -\frac{1}{n}$ est croissante (car $\frac{1}{n}$ décroît) mais elle converge vers 0 et non vers $+\infty$. Ce contre-exemple suffit à invalider l'affirmation.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Affirmation : f est convexe sur l'intervalle $[-3 ; 1]$.

Fausse. Étudier la convexité de f revient à étudier le signe de f'' . On pose $u(x) = x^2 + 2x + 2$ (strictement positif sur $\mathbb{R}$ car de discriminant négatif), avec $u'(x) = 2x + 2$; $f = \ln(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$.

En dérivant à nouveau $f' = \frac{v}{w}$ avec $v(x) = 2x + 2$, $w(x) = x^2 + 2x + 2$, $v'(x) = 2$, $w'(x) = 2x + 2$:

$$f''(x) = \frac{v'w - w'v}{w^2} = \frac{2(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)^2}{w^2}.$$

Au numérateur : $2x^2 + 4x + 4 - (4x^2 + 8x + 4) = -2x^2 - 4x = -2x(x + 2)$. Comme $w^2 > 0$, $f''(x)$ est du signe de $-2x(x + 2)$, trinôme de coefficient dominant négatif, de racines -2 et 0 : il est positif entre les racines et négatif à l'extérieur.

$f''(x) > 0$ sur $] -2 ; 0[$ et $f''(x) < 0$ sur $] -\infty ; -2[\cup] 0 ; +\infty[$: f est donc convexe sur $[-2 ; 0]$ et concave ailleurs. Sur $[-3 ; 1]$, f n'est pas concave ni convexe partout (elle est concave près de -3 et de 1) : elle n'est donc pas convexe sur tout l'intervalle $[-3 ; 1]$.

5. On considère la fonction Python 'mystere' ci-dessous, qui prend en paramètre une liste L de nombres ('len(L)' renvoie le nombre d'éléments de L).

- def mystere(L) :
- M = L[0]
- for i in range(len(L)) :
- if L[i] > M :
- M = L[i]
- return M
- # on initialise M avec le premier élément
-
- # on parcourt tous les indices de L
- # si un élément dépasse M
- # on met M à jour
-

5. (suite) Affirmation : l'exécution de 'mystere([2, 3, 7, 0, 6, 3, 2, 0, 5])' renvoie 7.

Vraie. La variable M est initialisée avec le premier élément de la liste, puis à chaque étape, si un élément de la liste dépasse la valeur courante de M , M est remplacé par cet élément. L'algorithme calcule donc le maximum des éléments de la liste, qui vaut ici 7 (le plus grand des termes 2,3,7,0,6,3,2,0,5).

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 1)

1.a L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne $J(2; 0; 1)$, $K(1; 2; 1)$ et $L(-2; -2; -2)$. Montrer que le triangle JKL est rectangle en J.

$$\overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JL} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{JL} = (-1) \times (-4) + 2 \times (-2) + 0 \times (-3) = 4 - 4 + 0 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont orthogonaux, donc **le triangle JKL est rectangle en J.**

1.b Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle JKL (en cm^2).

$$JK = \|\overrightarrow{JK}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5} \text{ et } JL = \|\overrightarrow{JL}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}.$$

$$\text{Le triangle étant rectangle en J, son aire vaut } \mathcal{A} = \frac{JK \times JL}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{145}}{2} \text{ cm}^2.$$

1.c Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle géométrique $\widehat{JKL}$.

Le triangle JKL étant rectangle en J, on utilise SOH-CAH-TOA dans le triangle rectangle JKL :

$$\tan(\widehat{JKL}) = \frac{JL}{JK} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Donc, } \widehat{JKL} = \arctan\left(\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}\right) \approx 67,5^\circ.$$

2.a Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ est normal au plan (JKL).

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{JK} = 6 \times (-1) + 3 \times 2 + (-10) \times 0 = -6 + 6 + 0 = 0.$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{JL} = 6 \times (-4) + 3 \times (-2) + (-10) \times (-3) = -24 - 6 + 30 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (JKL), donc **$\vec{n}$ est normal au plan (JKL).**

2.b En déduire une équation cartésienne du plan (JKL).

Le plan (JKL), de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$, a une équation de la forme $6x + 3y - 10z + d = 0$.

Comme $J(2; 0; 1)$ appartient au plan : $6 \times 2 + 3 \times 0 - 10 \times 1 + d = 0 \iff 12 - 10 + d = 0 \iff d = -2$.

Donc, une équation cartésienne du plan (JKL) est $6x + 3y - 10z - 2 = 0$.

3.a On note T le point de coordonnées (10; 9; -6). Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (JKL) et passant par T.

La droite Δ , orthogonale au plan (JKL), admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur ; elle passe par $T(10; 9; -6)$. Une représentation paramétrique est donc :
$$\begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = 9 + 3t \\ z = -6 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3.b Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de T sur le plan (JKL).

H est l'unique point d'intersection de Δ et du plan (JKL). On remplace les coordonnées paramétriques dans l'équation du plan : $6(10 + 6t) + 3(9 + 3t) - 10(-6 - 10t) - 2 = 0$.

En développant : $60 + 36t + 27 + 9t + 60 + 100t - 2 = 0 \iff 145t + 145 = 0 \iff t = -1$.

En remplaçant $t = -1$: $x = 10 + 6 \times (-1) = 4$, $y = 9 + 3 \times (-1) = 6$, $z = -6 - 10 \times (-1) = 4$.

Donc, **H a pour coordonnées (4; 6; 4).**

3.c Sachant que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante, calculer la valeur exacte du volume du tétraèdre JKLT (en cm^3).

On prend pour base le triangle JKL, d'aire $\mathcal{B} = \frac{\sqrt{145}}{2} \text{ cm}^2$ (question 1.b), et pour hauteur la longueur TH, puisque H est le projeté orthogonal de T sur le plan (JKL).

$\overrightarrow{TH} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$, donc $TH = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 10^2} = \sqrt{145}$.

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{145}}{2} \times \sqrt{145} = \frac{145}{6}.$$

Donc, le volume du tétraèdre JKLT vaut $\frac{145}{6} \text{ cm}^3$.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 2)

Partie A — 1. Soit p la fonction définie sur $[-3 ; 4]$ par $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$. Étudier les variations de p sur $[-3 ; 4]$.

p est dérivable sur $[-3 ; 4]$, avec $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$, un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24 < 0$.

Comme $\Delta < 0$ et que le coefficient dominant (3) est positif, $p'(x) > 0$ pour tout x de $[-3 ; 4]$: p est strictement croissante sur $[-3 ; 4]$.

Partie A — 2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet, sur $[-3 ; 4]$, une unique solution notée α .

$p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$. p est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[-3 ; 4]$, à valeurs entre -68 et 37 ; comme 0 appartient à cet intervalle, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une **unique solution** α dans $[-3 ; 4]$.

Partie A — 3. Donner une valeur approchée de α au dixième près.

À la calculatrice, $p(-0,2) \approx -0,13 < 0$ et $p(-0,1) \approx 0,47 > 0$: donc, $\alpha \approx -0,2$ au dixième près.

Partie A — 4. Donner le tableau de signes de p sur $[-3 ; 4]$.

p étant strictement croissante et s'annulant uniquement en $\alpha \approx -0,2$: $p(x) < 0$ sur $[-3 ; \alpha[$, $p(\alpha) = 0$, et $p(x) > 0$ sur $]\alpha ; 4]$.

Partie B — 1.a Soit f la fonction définie sur $[-3 ; 4]$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$, de courbe $\mathcal{C}_f$. Déterminer $f'(x)$.

f est dérivable sur $[-3 ; 4]$ (car $1+x^2 \neq 0$), et par la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - e^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1+x^2)^2} = \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2}.$$

Partie B — 1.b Justifier que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

$$f'(x) = 0 \iff (x-1)^2 e^x = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \text{ (car } e^x \neq 0) \iff x = 1.$$

Donc, $f'(1) = 0$: la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est horizontale, d'équation $y = f(1) = \frac{e}{2}$.

Partie B — 2.a Des concepteurs utilisent $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan, en estimant que le profil assure de bonnes sensations s'il possède au moins deux points d'inflexion. D'après le graphique fourni, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ?

Graphiquement, la courbe $\mathcal{C}_f$ semble convexe sur $[-3 ; 0]$, concave sur $[0 ; 1]$, puis de nouveau convexe sur $[1 ; 4]$: elle change donc deux fois de convexité, aux abscisses 0 et 1. Le toboggan semble assurer de bonnes sensations.

Partie B — 2.b On admet que, pour tout x de $[-3 ; 4]$, $f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$, où p est la fonction de la partie A. Confirmer, en justifiant, si le toboggan assure de bonnes sensations.

Sur $[-3 ; 4]$, $(1+x^2)^3 > 0$ et $e^x > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $p(x)(x-1)$.

D'après le tableau de signes de p (partie A, question 4) : $p(x) < 0$ sur $[-3 ; \alpha[$ et $p(x) > 0$ sur $]\alpha ; 4]$; par ailleurs $x-1 < 0$ sur $[-3 ; 1[$ et $x-1 > 0$ sur $]1 ; 4]$.

En croisant les signes : $p(x)(x-1)$ est positif sur $[-3 ; \alpha[$, négatif sur $]\alpha ; 1[$, puis positif sur $]1 ; 4]$: f'' change donc bien de signe en $x = \alpha$ et en $x = 1$.

$\mathcal{C}_f$ admet donc bien **deux points d'inflexion** (aux abscisses α et 1) : le toboggan assure de bonnes sensations, ce qui confirme la lecture graphique.

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1.a Une urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs, tous indiscernables au toucher. On tire au hasard, successivement et avec remise, deux jetons de cette urne. Un joueur perd 9 € si les deux jetons tirés sont blancs, perd 1 € si les deux jetons tirés sont noirs, et gagne 5 € si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

Notons B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et N l'évènement « le jeton tiré est noir ». Comme l'urne contient 3 jetons blancs et 2 jetons noirs sur 5 au total, $p(B) = \frac{3}{5}$ et $p(N) = \frac{2}{5}$.

Les tirages étant effectués avec remise, les probabilités sont les mêmes au premier et au second tirage : l'arbre pondéré comporte, à la première branche, B (probabilité $\frac{3}{5}$) ou N (probabilité $\frac{2}{5}$) ; puis, sous chacune de ces deux branches, à nouveau B (probabilité $\frac{3}{5}$) ou N (probabilité $\frac{2}{5}$) au second tirage, ces deux tirages étant indépendants du fait de la remise.

1.b Calculer la probabilité de perdre 9 € sur une partie.

Perdre 9 € correspond à tirer deux jetons blancs. Notons X la variable aléatoire donnant le gain du joueur sur une partie ; comme les deux tirages sont indépendants (tirages avec remise) : $p(X = -9) = p(B) \times p(B) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Donc, la probabilité de perdre 9 € sur une partie est égale à $\frac{9}{25}$ (soit **0,36**).

2.a On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et N jetons noirs, avec $N \geq 2$ (le nombre exact de jetons noirs n'étant pas connu). Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie. Déterminer la loi de probabilité de X .

L'urne contient à présent $N+3$ jetons au total, dont 3 blancs et N noirs. Sur un tirage, $p(B) = \frac{3}{N+3}$ et $p(N) = \frac{N}{N+3}$. La variable X prend les valeurs -9 , -1 et 5 .

Pour perdre 9 € (deux jetons blancs, tirages indépendants) : $p(X = -9) = \left(\frac{3}{N+3}\right)^2 = \frac{9}{(N+3)^2}$.

Pour perdre 1 € (deux jetons noirs) : $p(X = -1) = \left(\frac{N}{N+3}\right)^2 = \frac{N^2}{(N+3)^2}$.

Pour gagner 5 € (un jeton de chaque couleur, dans l'un ou l'autre ordre) : $p(X = 5) = 2 \times \frac{3}{N+3} \times \frac{N}{N+3} = \frac{6N}{(N+3)^2}$.

La loi de probabilité de X est donc donnée par : $p(X = -9) = \frac{9}{(N+3)^2}$, $p(X = -1) = \frac{N^2}{(N+3)^2}$ et $p(X = 5) = \frac{6N}{(N+3)^2}$.

2.b Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle x : $-x^2 + 30x - 81 > 0$.

Le trinôme $-x^2 + 30x - 81$ a pour discriminant $\Delta = 30^2 - 4 \times (-1) \times (-81) = 900 - 324 = 576 = 24^2$.

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-30 - 24}{2 \times (-1)} = \frac{-54}{-2} = 27$ et $x_2 = \frac{-30 + 24}{2 \times (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$.

Le coefficient dominant du trinôme étant $-1 < 0$, celui-ci est positif entre ses racines et négatif à l'extérieur : donc, $-x^2 + 30x - 81 > 0 \iff x \in]3 ; 27[$.

2.c En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.

Le jeu est favorable au joueur si, et seulement si, l'espérance de gain $E(X)$ est strictement positive. D'après la loi de probabilité établie à la question 2.a : $E(X) = (-9) \times \frac{9}{(N+3)^2} + (-1) \times \frac{N^2}{(N+3)^2} + 5 \times \frac{6N}{(N+3)^2} = \frac{-81 - N^2 + 30N}{(N+3)^2} = \frac{-N^2 + 30N - 81}{(N+3)^2}$.

Comme $(N+3)^2 > 0$, $E(X)$ est du signe de son numérateur $-N^2 + 30N - 81$. D'après la question précédente, ce numérateur est strictement positif si, et seulement si, $N \in]3 ; 27[$.

Or N est un entier naturel (un nombre de jetons), donc $E(X) > 0$ si, et seulement si, N est un entier vérifiant $4 \leq N \leq 26$.

Donc, le jeu est favorable au joueur lorsque l'urne contient entre 4 et 26 jetons noirs (bornes incluses).

2.d Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?

Le gain moyen est maximal lorsque la fonction g , définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(N) = \frac{-N^2 + 30N - 81}{(N+3)^2}$ (qui correspond à $E(X)$ vue comme fonction de N), atteint son maximum, c'est-à-dire lorsque $g'(N) = 0$ en changeant de signe.

La fonction g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. En utilisant la formule de dérivation d'un quotient : $g'(N) = \frac{(-2N+30)(N+3)^2 - (N+3)^{2'} \times (-N^2 + 30N - 81)}{(N+3)^4}$ avec $(N+3)^{2'} = 2(N+3)$.

En simplifiant par $(N+3)$ au numérateur et au dénominateur : $g'(N) = \frac{(-2N+30)(N+3) - 2(-N^2 + 30N - 81)}{(N+3)^3}$

Développons le numérateur : $(-2N+30)(N+3) = -2N^2 - 6N + 30N + 90 = -2N^2 + 24N + 90$, puis $-2(-N^2 + 30N - 81) = 2N^2 - 60N + 162$. La somme donne : $-2N^2 + 24N + 90 + 2N^2 - 60N + 162 = -36N + 252$.

Donc, $g'(N) = \frac{-36N + 252}{(N+3)^3} = \frac{-36(N-7)}{(N+3)^3}$. Comme $(N+3)^3 > 0$, $g'(N)$ est du signe de $-(N-7)$: positif avant $N = 7$, négatif après.

La fonction g est donc croissante sur $[0 ; 7]$ puis décroissante sur $[7 ; +\infty[$: elle admet un maximum en $N = 7$.

Donc, le joueur doit demander que l'urne contienne **7 jetons noirs** pour que son gain moyen soit maximal.

3. On suppose que l'urne contient désormais 7 jetons noirs et 3 jetons blancs. On observe 10 joueurs qui effectuent chacun une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un joueur gagnant 5 euros ?

Avec $N = 7$ jetons noirs et 3 jetons blancs (10 jetons au total), la probabilité de gagner 5 € sur une partie est, d'après la question 2.a : $p = \frac{6 \times 7}{(7+3)^2} = \frac{42}{100} = \frac{21}{50} = 0,42$.

Notons Y la variable aléatoire donnant le nombre de joueurs (parmi les 10) gagnant 5 €. Les 10 parties sont indépendantes et identiques, chacune ayant deux issues possibles (gagner 5 € ou non) : Y suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,42$, notée $\mathcal{B}(10 ; 0,42)$.

La probabilité d'avoir au moins un joueur gagnant 5 € est $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0)$, avec $p(Y = 0) = (1 - 0,42)^{10} = 0,58^{10}$.

À la calculatrice, $0,58^{10} \approx 0,0043$, donc $p(Y \geq 1) \approx 1 - 0,0043 \approx 0,996$.

Donc, la probabilité qu'au moins un joueur parmi les 10 gagne 5 € est d'environ **0,996** : cet événement est quasiment certain.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 2)

Pour les questions 1 à 3, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative de la dérivée f' est donnée : f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ et sa courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ (courbe positive avant, négative après). Question 1 : que peut-on affirmer sur f ? a. f admet un maximum en $-\frac{3}{2}$; b. f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$; c. f admet un minimum en $-\frac{1}{2}$; d. la courbe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse -1 .

Par lecture graphique, f' est positive sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$ et négative sur $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$: f est donc croissante puis décroissante, avec un changement de sens de variation en $-\frac{1}{2}$.

f admet donc un maximum en $-\frac{1}{2}$. Donc, la réponse est **b**.

Question 2 : a. f est convexe sur $]-\infty ; -\frac{3}{2}[$; b. f est convexe sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$; c. la courbe de f n'admet pas de point d'inflexion ; d. f est concave sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}[$.

Une fonction est convexe sur un intervalle lorsque sa dérivée y est croissante. Or, par lecture graphique, la courbe de f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$: f' est donc croissante sur $]-\infty ; -\frac{3}{2}[$.

f est donc convexe sur cet intervalle. Donc, la réponse est **a**.

Question 3 : la dérivée seconde f'' de f vérifie : **a.** $f''(x) \geq 0$ pour $x \in \left] -\infty ; -\frac{1}{2} \right[$; **b.** $f''(x) \geq 0$ pour $x \in [-2 ; -1]$; **c.** $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$; **d.** $f''(-3) = 0$.

D'après la question précédente, f' est croissante sur $\left] -\infty ; -\frac{3}{2} \right[$ et, par lecture graphique, décroissante sur $\left] -\frac{3}{2} ; +\infty \right[$: f' change donc de sens de variation en $-\frac{3}{2}$, où elle admet un maximum.

Comme f'' est la dérivée de f' , on a donc $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$. Donc, la réponse est **c.**

Question 4 : on considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n \leq w_n$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3$. **a.** la suite (v_n) converge ; **b.** si (u_n) est croissante alors (v_n) est minorée par u_0 ; **c.** $1 \leq v_0 \leq 3$; **d.** la suite (v_n) diverge.

Si (u_n) est croissante, alors pour tout entier naturel n , $u_0 \leq u_n$. Or, par hypothèse, $u_n \leq v_n$ pour tout n , donc $u_0 \leq v_n$ pour tout entier naturel n .

La suite (v_n) est donc minorée par u_0 . Donc, la réponse est **b.**

(Les autres propositions sont fausses en général : le théorème des gendarmes ne s'applique ici que si u_n et w_n avaient la même limite, ce qui n'est pas le cas puisque $1 \neq 3$; on ne peut donc rien conclure sur la convergence de (v_n) , ni sur l'encadrement de v_0 en particulier.)

Question 5 : on considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$. **a.** la suite (u_n) diverge ; **b.** la suite (u_n) converge ; **c.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$; **d.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

L'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$, vraie pour tout entier naturel n non nul, signifie que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

De plus, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq 1$: la suite (u_n) est donc majorée par 1 à partir du rang 2, et donc bornée.

Une suite croissante et majorée converge, d'après le théorème de convergence monotone : (u_n) **converge**. On ne peut cependant pas déterminer sa limite exacte avec les seules informations données (l'encadrement ne donne qu'une majoration, pas la valeur précise de la limite). Donc, la réponse est **b.**

Question 6 : on considère une suite réelle (u_n) telle que, pour tout entier naturel n , $n < u_n < n + 1$. **a.** il existe un entier naturel N tel que u_N est un entier ; **b.** la suite (u_n) est croissante ; **c.** la suite (u_n) est convergente ; **d.** la suite (u_n) n'a pas de limite.

Au rang n : $n < u_n < n + 1$. Au rang $n + 1$: $n + 1 < u_{n+1} < n + 2$.

En particulier, $u_n < n + 1 < u_{n+1}$, donc $u_n < u_{n+1}$ pour tout entier naturel n .

La suite (u_n) est donc croissante. Donc, la réponse est **b**.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 2)

1. QCM. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - x + 1$. Parmi quatre expressions proposées, indiquer celle de la fonction dérivée f' .

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x > 0$: $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

Donc, la réponse est $f'(x) = \ln(x)$.

2. On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 [1 - \ln(x)]$. Parmi quatre affirmations sur la limite de g en 0, indiquer la correcte.

En développant, $g(x) = x^2 - x^2 \ln(x)$. D'une part, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$.

D'autre part, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0$.

Par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 - 0 = 0$. Donc, la réponse est $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 0,9x^2 - 0,1x$. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , on factorise : $f(x) = x(x^2 - 0,9x - 0,1)$. Donc $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 - 0,9x - 0,1 = 0$.

Pour l'équation du second degré $x^2 - 0,9x - 0,1 = 0$, on remarque que $x = 1$ est une racine évidente, car $1^2 - 0,9 \times 1 - 0,1 = 1 - 0,9 - 0,1 = 0$.

Le produit des deux racines d'un trinôme $x^2 + bx + c$ vaut c : ici le produit des racines vaut $-0,1$, donc la seconde racine est $\frac{-0,1}{1} = -0,1$.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc exactement trois solutions réelles : $-0,1$, 0 et 1 . Donc, la réponse est **3 solutions**.

4. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, indiquer, parmi quatre expressions, celle d'une primitive K de k .

On teste la fonction K définie sur $\mathbb{R}$ par $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$. Comme H est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une primitive de h), K est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une constante par une composée de fonctions dérivables.

Pour tout réel x : $K'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times H'(2x) = H'(2x) = h(2x)$, car $H' = h$ (H étant une primitive de h).

Donc $K'(x) = h(2x) = k(x)$ pour tout réel x : K est bien une primitive de k sur $\mathbb{R}$. Donc, la réponse est $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$.

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. Indiquer, parmi quatre équations proposées, celle de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Pour tout réel x : $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x)e^x$.

On calcule $f(1) = 1 \times e^1 = e$ et $f'(1) = (1+1)e^1 = 2e$.

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2e(x-1) + e = 2ex - 2e + e = 2ex - e$.

Donc, la réponse est $y = 2ex - e$.

6. Indiquer, parmi quatre propositions, celle qui caractérise les entiers naturels n solutions de l'inéquation $(0,2)^n < 0,001$.

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, donc, pour tout entier naturel n : $(0,2)^n < 0,001 \iff \ln((0,2)^n) < \ln(0,001) \iff n \ln(0,2) < \ln(0,001)$.

Comme $0,2 < 1$, on a $\ln(0,2) < 0$, donc diviser par $\ln(0,2)$ inverse le sens de l'inégalité : $n \ln(0,2) < \ln(0,001) \iff n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)}$.

À la calculatrice, $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)} \approx 4,29$. Les entiers naturels strictement supérieurs à 4,29 sont donc les entiers supérieurs ou égaux à 5.

Donc, la réponse est : les entiers naturels n tels que $n \geq 5$.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 2)

1. Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'évolution de la population est modélisée par la suite (u_n) définie par $u_0 = 40$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,008u_n(200 - u_n)$, où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$. Donner une estimation du nombre d'oiseaux au début de l'année 2022.

L'année 2022 correspond à $2021 + 1$, donc le nombre d'oiseaux recherché est estimé par u_1 .

$$u_1 = 0,008 u_0(200 - u_0) = 0,008 \times 40 \times (200 - 40) = 0,008 \times 40 \times 160 = 51,2.$$

Donc, la réponse est qu'on estime la population à environ 51 oiseaux au début de l'année 2022.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$. Résoudre dans $[0 ; 100]$ l'équation $f(x) = x$.

$$\text{Pour } x \in [0 ; 100] : f(x) = x \iff 0,008x(200 - x) = x \iff 1,6x - 0,008x^2 = x \iff 0,008x^2 - 0,6x = 0.$$

$$\text{En factorisant : } 0,008x^2 - 0,6x = 0 \iff x(0,008x - 0,6) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 0,008x - 0,6 = 0.$$

$$\text{L'équation } 0,008x - 0,6 = 0 \text{ donne } x = \frac{0,6}{0,008} = 75, \text{ valeur bien comprise dans } [0 ; 100].$$

Donc, la réponse est que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions dans $[0 ; 100]$: 0 et 75.

3.a Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0 ; 100]$ et dresser son tableau de variations.

$$\text{Pour tout } x \text{ de } [0 ; 100], \text{ en développant : } f(x) = 0,008x(200 - x) = 1,6x - 0,008x^2 = -0,008x^2 + 1,6x.$$

f est donc une fonction polynôme du second degré, de coefficient dominant $-0,008 < 0$: sa courbe représentative est une parabole tournée vers le bas, dont le sommet a pour abscisse $x_S = -\frac{1,6}{2 \times (-0,008)} = \frac{1,6}{0,016} = 100$.

Une telle fonction est strictement croissante sur $]-\infty ; x_S]$ et strictement décroissante sur $[x_S ; +\infty[$. Comme $x_S = 100$ est la borne droite de $[0 ; 100]$, f est donc strictement croissante sur tout l'intervalle $[0 ; 100]$.

On calcule les valeurs aux bornes : $f(0) = 0,008 \times 0 \times 200 = 0$ et $f(100) = 0,008 \times 100 \times 100 = 80$. Le tableau de variations de f sur $[0 ; 100]$ montre donc une croissance stricte de 0 (en $x = 0$) à 80 (en $x = 100$).

3.b En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$.

Pour tout entier naturel n , notons P_n la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$ ».

Initialisation. On a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51,2$ (question 1), donc $0 \leq 40 \leq 51,2 \leq 100$: la propriété P_0 est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que P_n est vraie, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$. Les trois nombres 0, u_n , u_{n+1} et 100 appartiennent à $[0 ; 100]$, et f est croissante sur cet intervalle (question 3.a), donc l'inégalité est conservée par f : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(100)$.

Or $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ (par définition de la suite) et $f(100) = 80$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 80$. Comme $80 \leq 100$, on en déduit $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 100$: la propriété P_{n+1} est vraie.

Conclusion. La propriété P_0 est vraie, et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$.

3.c En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est donc croissante.

De plus, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 100$: la suite (u_n) est donc majorée par 100.

Une suite croissante et majorée converge, donc, la réponse est que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ .

3.d Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

La suite (u_n) converge vers ℓ et est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est continue sur $[0 ; 100]$ (car f est une fonction polynôme) et où l'intervalle $[0 ; 100]$ contient tous les termes de la suite ainsi que sa limite ℓ (d'après la question 3.b).

D'après le théorème du point fixe, ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[0 ; 100]$, dont on a montré (question 2) qu'elle admet exactement deux solutions : 0 et 75.

Par ailleurs, la suite (u_n) est croissante à partir de $u_0 = 40$ (question 3.b), donc $\ell \geq 40$. Cela exclut la solution 0, donc $\ell = 75$.

Donc, la réponse est que la suite converge vers $\ell = 75$. Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que, selon ce modèle, la population d'oiseaux de la colonie se stabilise à long terme autour de 75 individus.

4. On considère l'algorithme Python suivant, où 'p' est un réel donné.

- | | |
|-----------------------------|--|
| • def seuil(p) : | • # fonction qui cherche l'annee ou le seuil p est depasse |
| • n = 0 | • # compteur d'annees ecoulees depuis 2021 |
| • u = 40 | • # valeur initiale u0 |
| • while u < p : | • # tant que le seuil n'est pas atteint |
| • n = n + 1 | • # on avance d'une annee |
| • u = 0.008 * u * (200 - u) | • # on applique la relation de recurrence |
| • return (n + 2021) | • # on renvoie l'annee correspondante |

4. (suite) L'exécution de 'seuil(100)' ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi, à l'aide de la question 3.

La fonction 'seuil(p)' calcule successivement les termes de la suite (u_n) en partant de $u_0 = 40$, et s'arrête dès qu'un terme atteint ou dépasse la valeur 'p', en renvoyant alors l'année correspondante.

Or, d'après la question 3, la suite (u_n) est croissante et converge vers $\ell = 75$: tous ses termes restent donc strictement inférieurs à 75, et a fortiori strictement inférieurs à 100.

Ainsi, pour 'p = 100', la condition 'u < p' (c'est-à-dire $u_n < 100$) reste vraie pour toutes les valeurs successives de n : la boucle 'while' ne s'arrête donc jamais, et la fonction tourne indéfiniment sans jamais renvoyer de résultat.