

Statistiques descriptives — Tous les corrigés

LOGIMATHS

Brevet 2026 — Métropole

1. Combien de médailles d'or ont été obtenues par les Pays-Bas ?

D'après le tableau, les Pays-Bas ont obtenu **27 médailles d'or**.

2. Calculer le nombre de médailles d'or obtenues par l'Australie.

Le total des médailles de l'Australie est 63, dont 17 en argent et 28 en bronze.

Médailles d'or = $63 - 17 - 28 = 18$.

3. Montrer que l'affirmation « Plus de 20 % des médailles obtenues par la Grande-Bretagne sont en bronze » est vraie.

La Grande-Bretagne a obtenu 31 médailles de bronze sur un total de 124.

$$\frac{31}{124} \times 100 = 25$$

Le pourcentage de médailles de bronze est donc de 25 %, ce qui est bien plus de 20 % : l'affirmation est **vraie**.

4.a Déterminer la médiane de la série des nombres de médailles obtenues par ces 9 pays. Détailler la démarche.

On classe les 9 valeurs de la colonne Total par ordre croissant :

56 ; 63 ; 71 ; 75 ; 82 ; 89 ; 105 ; 124 ; 220.

La médiane est la valeur du milieu, la 5e sur 9, soit **82 médailles**.

4.b Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Cela signifie qu'au moins la moitié de ces 9 pays ont obtenu au maximum 82 médailles, et qu'au moins la moitié en ont obtenu au moins 82.

5. Le Brésil a obtenu 20 médailles d'argent en 2021 puis 26 en 2024. Quel est le pourcentage d'augmentation ?

L'augmentation est de $26 - 20 = 6$ médailles.

En proportion du nombre initial : $\frac{6}{20} \times 100 = 30$

Le nombre de médailles d'argent obtenues par le Brésil a augmenté de **30 %**.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 1)**A.1.a Donner $P(C)$.**

L'énoncé indique directement que 75 % des familles réservent une cabine : $P(C) = 0,75$.

A.1.b Reproduire l'arbre et compléter les quatre pointillés.

- Sur la première branche : $P(V) = 0,3$
- Sur la deuxième branche : $P(\overline{V}) = 0,7$
- Sur les branches issues de V : $P_V(C) = 0,8$ et $P_V(\overline{C}) = 0,2$

A.2 Calculer la probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine.

$$P(V \cap C) = P(V) \times P_V(C) = 0,3 \times 0,8 = 0,24.$$

A.3 Une famille a réservé une cabine. Déterminer la probabilité qu'elle réserve un emplacement pour un véhicule.

$$\text{On cherche } P_C(V) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)}.$$

$$P_C(V) = \frac{0,24}{0,75} = 0,32.$$

A.4 Déterminer la probabilité qu'une famille n'ayant pas réservé de véhicule réserve tout de même une cabine, arrondie à 10^{-2} . Interpréter le résultat.

D'après la formule des probabilités totales, $P(C) = P(V) \times P_V(C) + P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(C)$.

$$0,75 = 0,24 + 0,7 \times P_{\overline{V}}(C)$$

$$P_{\overline{V}}(C) = \frac{0,75 - 0,24}{0,7} = \frac{0,51}{0,7} \approx 0,73.$$

Interprétation : parmi les familles qui ne réservent pas d'emplacement pour un véhicule, environ 73 % réservent tout de même une cabine.

B.1 Justifier que $E(X) = 96$ et que $V(X) = 3114$.

$$E(X) = 0 \times 0,19 + 70 \times 0,06 + 100 \times 0,51 + 170 \times 0,24 = 4,2 + 51 + 40,8 = 96.$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,19 + 70^2 \times 0,06 + 100^2 \times 0,51 + 170^2 \times 0,24 = 294 + 5\,100 + 6\,936 = 12\,330.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 12\,330 - 96^2 = 12\,330 - 9\,216 = 3\,114.$$

B.2.a Justifier que $Z = 0,6(X + Y)$.

Une remise de 40 % revient à ne payer que 60 % du montant total des suppléments et des extras, soit $X + Y$: donc $Z = 0,6(X + Y)$.

B.2.b En déduire que $E(Z) = 120$ et que $V(Z) = 1728$.

$$E(Z) = 0,6 \times (E(X) + E(Y)) = 0,6 \times (96 + 104) = 0,6 \times 200 = \mathbf{120}.$$

$$X \text{ et } Y \text{ étant indépendantes, } V(Z) = 0,6^2 \times (V(X) + V(Y)) = 0,36 \times (3\,114 + 1\,686) = 0,36 \times 4\,800 = \mathbf{1\,728}.$$

B.3.a Montrer que $E(M_n) = 120$ et que $V(M_n) = 1728/n$.

Les variables $Z_1, \dots, Z_n$ suivent toutes la même loi que Z , donc $E(M_n) = \frac{n \times E(Z)}{n} = E(Z) = \mathbf{120}$.

$$\text{Les variables étant indépendantes, } V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times n \times V(Z) = \frac{V(Z)}{n} = \frac{1\,728}{n}.$$

B.3.b Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(114 < M_n < 126) \geq 0,85$. Interpréter.

L'évènement $114 < M_n < 126$ équivaut à $|M_n - 120| < 6$, dont le contraire est $|M_n - 120| \geq 6$.

$$\text{D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, } P(|M_n - 120| \geq 6) \leq \frac{V(M_n)}{6^2} = \frac{1\,728}{36n} = \frac{48}{n}.$$

On veut $P(114 < M_n < 126) \geq 0,85$, soit $P(|M_n - 120| \geq 6) \leq 0,15$: il suffit donc que $\frac{48}{n} \leq 0,15$.

$$n \geq \frac{48}{0,15} = 320.$$

Le plus petit entier qui convient est $\mathbf{n = 320}$: un échantillon d'au moins 320 familles garantit, via cette inégalité, que le prix moyen payé a au moins 85 % de chances d'être compris entre 114 € et 126 €.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan ($A(2; 1; 1)$, $B(3; -2; 0)$, $C(0; -1; 1)$).

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-2 \\ -2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-2 \\ -1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ont des coordonnées non proportionnelles (par exemple $\frac{1}{-2} \neq \frac{-3}{-2}$), donc ils ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés : **ils définissent bien un plan.**

2.a Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; -1; 4)$ est normal au plan (ABC).

On calcule les produits scalaires (le repère est orthonormé) :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + (-1) \times (-3) + 4 \times (-1) = 1 + 3 - 4 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) + 4 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : $\vec{n}$ est donc un vecteur normal à (ABC).

2.b En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x - y + 4z - 5 = 0$.

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ étant normal à (ABC), une équation de ce plan est de la forme $x - y + 4z + d = 0$.

Comme A appartient à (ABC) : $2 - 1 + 4 \times 1 + d = 0$, soit $5 + d = 0$, donc $d = -5$.

Une équation cartésienne de (ABC) est donc $x - y + 4z - 5 = 0$.

3. Vérifier la représentation paramétrique donnée de la droite Δ passant par D et orthogonale au plan (ABC).

Une droite orthogonale au plan (ABC) est dirigée par un vecteur normal à ce plan, ici $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Comme Δ passe par $D(0; 0; 2)$, une représentation paramétrique de Δ est $x = 0 + 1t$, $y = 0 - 1t$, $z = 2 + 4t$, soit bien $x = t$, $y = -t$, $z = 2 + 4t$ avec $t \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point $H(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3})$.

Le projeté orthogonal de D sur (ABC) est le point d'intersection de Δ et de (ABC).

Un point de Δ a pour coordonnées $(t; -t; 2 + 4t)$. En le substituant dans l'équation du plan :

$$t - (-t) + 4(2 + 4t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 2t + 8 + 16t - 5 = 0 \Leftrightarrow 18t = -3 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{6}$$

Les coordonnées de H sont donc $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; 2 - \frac{4}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$.

5.a Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$$

$$CB = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-(-1))^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

Comme $AB = CB$, le triangle ABC est isocèle en B.

5.b Montrer que l'aire du triangle ABC est $3\sqrt{2}$.

Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal (ici B) passe par le milieu I de la base [AC].

$$I = \left(\frac{2+0}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{1+1}{2} \right) = (1; 0; 1)$$

$$AC = \sqrt{(0-2)^2 + (-1-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ et } BI = \sqrt{(1-3)^2 + (0-(-2))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Aire} = \frac{AC \times BI}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 3}{2} = 3\sqrt{2}.$$

6.a En déduire que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 1.

En choisissant ABC comme base, la hauteur associée est la distance DH (H étant le projeté orthogonal de D sur (ABC), question 4).

$$DH = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{18}{36}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \times 3 = 1.$$

6.b Sachant que la distance de A au plan (BCD) vaut $\sqrt{2}$, en déduire l'aire du triangle BCD.

En reprenant le volume avec BCD comme base et $h = \sqrt{2}$ comme hauteur associée : $V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{BCD} \times h$.

$$1 = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{BCD} \times \sqrt{2}, \text{ donc } \text{Aire}_{BCD} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

7.a Déterminer k pour lequel A, B, C et $D_k(0; 0; k)$ sont coplanaires. Quel est alors le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) ?

D_k appartient au plan (ABC) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$0 - 0 + 4k - 5 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{5}{4}$$

Pour $k = \frac{5}{4}$, le point D_k appartient déjà au plan (ABC) : son projeté orthogonal sur (ABC) est donc **lui-même**.

7.b Peut-on trouver une valeur de k telle que A soit le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) ?

Pour que A soit le projeté orthogonal de D_k sur (ABC), le vecteur $\overrightarrow{AD_k}$ devrait être colinéaire au

vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AD_k} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-1 \\ k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ k-1 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières coordonnées seraient dans un rapport $\frac{-2}{1} = -2$ pour $\overrightarrow{AD_k}$, contre $\frac{-1}{-1} = 1$ pour $\vec{n}$: ces rapports sont différents, quelle que soit la valeur de k .

Non, il n'existe aucune valeur de k pour laquelle A est le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) .

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)

A.1 Recopier et compléter l'arbre pondéré.

$$P(A_1) = 0,96 \text{ et } P(\overline{A_1}) = 1 - 0,96 = \mathbf{0,04}.$$

$$\text{D'après l'énoncé : } P_{A_1}(A_2) = \mathbf{0,94}, P_{A_1}(\overline{A_2}) = \mathbf{0,06}, P_{\overline{A_1}}(A_2) = \mathbf{0,35}, P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) = \mathbf{0,65}.$$

A.2 Montrer que $P(A_2) = \mathbf{0,9164}$.

A_1 et $\overline{A_1}$ formant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2)$$

$$P(A_2) = 0,96 \times 0,94 + 0,04 \times 0,35 = \mathbf{0,9164}.$$

A.3 Calculer $P_{A_2}(\overline{A_1})$ et interpréter.

$$P_{A_2}(\overline{A_1}) = \frac{P(\overline{A_1} \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0,04 \times 0,35}{0,9164} \approx \mathbf{0,0153} \text{ (arrondi à } 10^{-4}\text{)}.$$

Sachant que le message reçu par le deuxième relai est sans erreur, il y a environ 1,53 % de chances que le message reçu par le premier relai comportait des erreurs.

B.1.a Déterminer la probabilité que 4 tests soient positifs.

$$P(X = 4) = \binom{50}{4} \times 0,04^4 \times 0,96^{46} \approx \mathbf{0,09} \text{ (arrondi au centième)}.$$

B.1.b Donner la probabilité qu'au moins un test soit positif.

$$\text{À la calculatrice, } P(X \geq 1) \approx \mathbf{0,87} \text{ (arrondi au centième)}.$$

B.1.c Calculer l'espérance et la variance de X .

$$X \text{ suit la loi binomiale } (50; 0,04), \text{ donc } E(X) = 50 \times 0,04 = \mathbf{2} \text{ et } V(X) = 50 \times 0,04 \times 0,96 = \mathbf{1,92}.$$

B.2.a Vérifier que $E(M) = 2$ et montrer que $V(M) = 0,0768$.

M est la moyenne de 25 variables indépendantes de même loi que X : $E(M) = E(X) = 2$.

$$V(M) = \frac{V(X)}{25} = \frac{1,92}{25} = 0,0768.$$

B.2.b À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $P(M < 7) > 0,99$.

$$P(M < 7) = P(-3 < M < 7) = P(-5 < M - 2 < 5) = 1 - P(|M - 2| \geq 5).$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour $t = 5$: $P(|M - 2| \geq 5) \leq \frac{V(M)}{5^2} = \frac{0,0768}{25} = 0,003072$.

Donc $P(M < 7) \geq 1 - 0,003072 = 0,996928$, qui est bien **supérieur à 0,99**.

C.1 Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} \leq p_n$.

Initialisation : $p_2 = 0,59 \times p_1 + 0,35 = 0,59 \times 0,96 + 0,35 = 0,9164 \leq 0,96 = p_1$: vraie au rang 1.

Hérédité : supposons $p_{n+1} \leq p_n$ pour un n donné. Comme $0,59 > 0$: $0,59p_{n+1} \leq 0,59p_n$, donc $0,59p_{n+1} + 0,35 \leq 0,59p_n + 0,35$, soit $p_{n+2} \leq p_{n+1}$: vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_{n+1} \leq p_n$.

C.2 Montrer que la suite (p_n) est convergente.

La suite (p_n) est décroissante (question C.1) et minorée par 0 (une probabilité est toujours positive) : elle est donc convergente.

C.3 Déterminer la valeur exacte de sa limite.

Notons $f(x) = 0,59x + 0,35$, fonction continue telle que $p_{n+1} = f(p_n)$. D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

$$0,59\ell + 0,35 = \ell \Leftrightarrow 0,35 = 0,41\ell \Leftrightarrow \ell = \frac{35}{41}.$$

La suite (p_n) converge donc vers $\frac{35}{41}$.

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)**A.1.a Montrer que le triangle ABC est isocèle en C.**

Le repère étant orthonormé : $AC = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{81}{16} + \frac{144}{16}} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}$.

$$CB = \sqrt{\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}.$$

Comme $AC = CB$, le triangle ABC est isocèle en C.

A.1.b Montrer que l'aire du triangle ABC est 6,75 m².

Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal C est aussi une médiane : elle passe par I, milieu de [AB], de coordonnées $\left(\frac{9}{4}; 0; 0\right)$.

$$AB = \frac{9}{2} \text{ et } CI = \sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} = 3.$$

$$\text{Aire} = \frac{AB \times CI}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 3 = \mathbf{6,75 \text{ m}^2}.$$

A.2.a Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $z = 0$.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ont des coordonnées non proportionnelles : A, B, C ne sont pas alignés et définissent un plan.

Comme $z_A = z_B = z_C = 0$, **une équation cartésienne du plan (ABC) est bien $z = 0$.**

A.2.b Montrer que $H\left(\frac{3}{2}; 1; 0\right)$ est le projeté orthogonal de D sur (ABC).

$z_H = 0$, donc H appartient à (ABC).

$\overrightarrow{HD} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, normal à (ABC) (car l'équation du plan est $z = 0$) : la droite (HD) est donc orthogonale à (ABC).

H est donc bien le projeté orthogonal de D sur (ABC).

A.3 En déduire le volume du module.

En choisissant ABC comme base, la hauteur associée est $DH = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = 3$.

$$V = \frac{1}{3} \times 6,75 \times 3 = \mathbf{6,75 \text{ m}^3}.$$

B.1.a Montrer que $\vec{n}(4; 3; 3)$ est normal au plan (BCD).

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : B, C, D définissent bien un plan.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \times \left(-\frac{9}{4}\right) + 3 \times 3 + 3 \times 0 = -9 + 9 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 4 \times (-3) + 3 \times 1 + 3 \times 3 = -12 + 3 + 9 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD) : **$\vec{n}$ est donc normal à (BCD).**

B.1.b En déduire qu'une équation cartésienne de (BCD) est $4x + 3y + 3z - 18 = 0$.

Une équation de (BCD) est de la forme $4x + 3y + 3z + d = 0$. Comme $B\left(\frac{9}{2}; 0; 0\right) \in (BCD)$: $4 \times \frac{9}{2} + d = 0$, donc $d = -18$.

Une équation cartésienne de (BCD) est donc bien $4x + 3y + 3z - 18 = 0$.

B.1.c Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale à (BCD) passant par D.

$$\Delta \text{ est dirigée par } \vec{n}(4; 3; 3) \text{ et passe par } D\left(\frac{3}{2}; 1; 3\right) : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

B.2 Montrer que L a pour coordonnées $\left(-\frac{5}{2}; -2; 0\right)$.

L, point de Δ , a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2} + 4t_0; 1 + 3t_0; 3 + 3t_0\right)$ pour un certain t_0 , et vérifie l'équation de (ABC), soit $z = 0$.

$$3 + 3t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = -1.$$

En remplaçant : $x = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}$, $y = 1 - 3 = -2$, $z = 0$: L a bien pour coordonnées $\left(-\frac{5}{2}; -2; 0\right)$.

B.3 Montrer que le module est adapté aux débutants.

$$\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DL} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DL} = 0 \times (-4) + 0 \times (-3) + (-3) \times (-3) = 9.$$

Or $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DL} = DH \times DL \times \cos(\widehat{LDH})$, avec $DH = 3$ et $DL = \sqrt{16 + 9 + 9} = \sqrt{34}$.

$$\cos(\widehat{LDH}) = \frac{9}{3\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}, \text{ donc } \widehat{LDH} \approx 59,04^\circ.$$

Comme $59,04^\circ < 60^\circ$, le module est bien adapté aux débutants.

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)

A.1 Donner les variations de F_2 sur $]0; 3]$.

F_2 est une primitive de f_2 , donc ses variations sont données par le signe de f_2 . D'après le graphique, F_2 est décroissante sur $]0; 0,3]$, croissante sur $[0,3; 2,5]$, puis décroissante sur $[2,5; 3]$.

A.2 Identifier les courbes représentant f_2 et f_2' .

f_2 admet un maximum en $x \approx 0,75$ (là où F_2 change de croissante à décroissante) : sa dérivée doit s'y annuler. C'est la **courbe 1** qui s'annule vers 0,75 : elle représente f_2' .

Le point A (point d'inflexion de $\mathcal{C}_2$) est situé vers $x \approx 1,6$: la dérivée seconde s'y annule. C'est la **courbe 2** qui s'annule vers 1,6 : elle représente f_2'' .

B.1.a Montrer que $f_1(x) = -1 - \ln(x)/x^2$.

$f_1 = w + \frac{u}{v}$ avec $w(x) = 1 - x$, $u(x) = 1 + \ln x$, $v(x) = x$, donc $w'(x) = -1$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v'(x) = 1$.

$$f_1'(x) = w'(x) + \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} = -1 + \frac{1 - (1 + \ln x)}{x^2} = -1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

B.1.b Déterminer la limite de $f_1(x)$ en $+\infty$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1'(x) = -1$.

B.2.a Justifier les variations de f_1 et la valeur de l'extremum.

$f_1''(x)$ a le signe de $2 \ln x - 1$ (car $x^3 > 0$), positif pour $x > e^{\frac{1}{2}}$.

f_1' est donc décroissante sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$ puis croissante sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$.

$$f_1'(e^{\frac{1}{2}}) = -1 - \frac{\ln(e^{\frac{1}{2}})}{e} = -1 - \frac{1}{2e} : \text{c'est bien la valeur du minimum du tableau.}$$

B.2.b Justifier la limite de f_1 en 0.

Quand $x \rightarrow 0^+$: $-\ln(x) \rightarrow +\infty$ et $x^2 \rightarrow 0^+$, donc par quotient puis somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1'(x) = +\infty$.

B.2.c Montrer qu'il existe une unique solution α à $f_1(x) = 0$, puis que f_1 admet un maximum.

Sur $\left]0; e^{\frac{1}{2}}\right]$, f_1' est continue et strictement décroissante, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1'(x) = +\infty > 0$ et $f_1'(e^{\frac{1}{2}}) = -1 - \frac{1}{2e} < 0$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_1'(x) = 0$ y admet une unique solution.

Sur $\left[e^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[$, f_1' est strictement croissante et tend vers -1 , donc reste toujours strictement négative : pas de solution sur cet intervalle.

Il existe donc **une unique solution** α à $f_1'(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$, et f_1 **admet un maximum en** α (signe de f_1' positif puis négatif).

B.2.d Compléter le script Python calculant une valeur approchée de α .

- Condition de la boucle « while » : **while d(u) > 0 :**
- Instruction dans la boucle : **u = u + 0.01**

C.1 Montrer que H est une primitive de h.

H est de la forme $\frac{1}{2}u^2$ avec $u(x) = 1 + \ln x$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$, et $H'(x) = u'(x)u(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x) = h(x)$.

H est donc bien une primitive de h sur $]0; +\infty[$.

C.2 Existe-t-il k tel que la valeur moyenne de f sur $[1; e]$ soit nulle ?

$$\begin{aligned} \text{La valeur moyenne est } \mu &= \frac{1}{e-1} \int_1^e f_k(x) dx = \frac{1}{e-1} \int_1^e (1-x+kh(x)) dx = \frac{1}{e-1} \left[x - \frac{x^2}{2} + kH(x) \right]_1^e \\ &= \frac{1}{e-1} \left(\left(e - \frac{e^2}{2} + k \frac{(1+1)^2}{2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} + k \frac{(1+0)^2}{2} \right) \right) = \frac{2e - e^2 + 3k - 1}{2(e-1)}. \end{aligned}$$

$$\mu = 0 \Leftrightarrow 2e - e^2 + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{e^2 - 2e + 1}{3} = \frac{(e-1)^2}{3}.$$

Oui, il existe une unique valeur $k = \frac{(e-1)^2}{3}$ pour laquelle la valeur moyenne de f_k sur $[1; e]$ est nulle.

Bac Première 2026 — Amérique du Nord (SPE)**A.1 Recopier et compléter l'arbre pondéré (urne à 1 boule rouge, 9 vertes, tirage avec remise).**

$P(R_1) = \frac{1}{10}$, $P(\overline{R_1}) = \frac{9}{10}$; $P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{10}$, $P_{R_1}(\overline{R_2}) = \frac{9}{10}$; $P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{1}{10}$, $P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) = \frac{9}{10}$ (tirage avec remise : les probabilités sont les mêmes au 2^e tirage).

A.2.a Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X .

Le joueur paie 1 € puis reçoit 3 € (deux rouges), 1 € (deux vertes) ou 0 € (sinon) : le gain algébrique prend donc les valeurs $X = 2$ (3-1), $X = 0$ (1-1) et $X = -1$ (0-1).

A.2.b Montrer que $P(X = -1) = \frac{18}{100}$.

$\{X = -1\}$ correspond à une boule rouge et une boule verte (dans un ordre ou l'autre) : $\{X = -1\} = (R_1 \cap \overline{R_2}) \cup (\overline{R_1} \cap R_2)$, réunion d'événements disjoints.

$$P(X = -1) = P(R_1 \cap \overline{R_2}) + P(\overline{R_1} \cap R_2) = \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{100} + \frac{9}{100} = \frac{18}{100}.$$

A.2.c Recopier et compléter le tableau de la loi de probabilité de X.

$$P(X = 2) = P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \text{ et } P(X = 0) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{81}{100}.$$

$$x_k : -1 ; 0 ; 2 \quad P(X = x_k) : \frac{18}{100} ; \frac{81}{100} ; \frac{1}{100} \text{ (vérification : } \frac{18}{100} + \frac{81}{100} + \frac{1}{100} = 1).$$

A.2.d Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

$$E(X) = (-1) \times \frac{18}{100} + 0 \times \frac{81}{100} + 2 \times \frac{1}{100} = \frac{-18 + 0 + 2}{100} = \frac{-16}{100} = -0,16.$$

Sur un grand nombre de parties, le joueur perd en moyenne 0,16 € (16 centimes) par partie : **le jeu est défavorable au joueur.**

B.1 Démontrer que $E(Y) = (4n^2 - 20n)/100$ (urne à n boules rouges, 10 - n vertes).

Comme en partie A, Y prend les valeurs -1, 0, 2 : $P(Y = 2) = \left(\frac{n}{10}\right)^2 = \frac{n^2}{100}$.

$$P(Y = -1) = 2 \times \frac{n}{10} \times \frac{10 - n}{10} = \frac{2n(10 - n)}{100} \text{ (on ne calcule pas } P(Y = 0), \text{ sans effet sur l'espérance).}$$

$$E(Y) = 2 \times \frac{n^2}{100} - 1 \times \frac{2n(10 - n)}{100} = \frac{2n^2 - 20n + 2n^2}{100} = \frac{4n^2 - 20n}{100}.$$

B.2 Pour combien de boules rouges le jeu est-il équitable ?

Le jeu est équitable lorsque $E(Y) = 0$: $\frac{4n^2 - 20n}{100} = 0 \iff 4n(n - 5) = 0 \iff n = 0 \text{ ou } n = 5$.

$n = 0$ correspond à une urne sans boule rouge (plus vraiment un jeu de hasard) : la situation pertinente est donc $n = 5$ **boules rouges** (et 5 vertes), pour laquelle le jeu est équitable.

Brevet 2025 — Amérique du Nord

Situation 1. Une urne contient 40 boules (5 rouges, 20 vertes, 15 blanches). Calculer la probabilité d'obtenir une boule verte en tirant au hasard.

Il y a 20 boules vertes sur 40 : la probabilité est $\frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Situation 2. Décomposer 1 050 en produit de facteurs premiers.

$$1\,050 = 105 \times 10 = 5 \times 21 \times 2 \times 5 = 5 \times 3 \times 7 \times 2 \times 5 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7.$$

Situation 3. Un article coûte 25 €. Calculer son prix après une augmentation de 14 %.

Augmenter de 14 %, c'est multiplier par $1 + \frac{14}{100} = 1,14$.

$25 \times 1,14 = 28,50$ € : le nouveau prix est **28,50 €**.

Situation 4. Le polygone 2 est un agrandissement du polygone 1, de coefficient 2,5. L'aire du polygone 1 est $7,5 \text{ cm}^2$. Calculer l'aire du polygone 2.

Si les longueurs sont multipliées par k , les aires le sont par k^2 , ici $2,5^2 = 6,25$.

L'aire du polygone 2 est donc $7,5 \times 6,25 = 46,875 \text{ cm}^2$.

Situation 5.1 Une classe de 3e a des tailles réparties ainsi : 152 cm ($\times 2$), 157 ($\times 4$), 160 ($\times 2$), 162 ($\times 5$), 165 ($\times 2$), 170 ($\times 4$), 174 ($\times 6$), 180 ($\times 5$). Calculer la moyenne des tailles.

$$\bar{t} = \frac{2 \times 152 + 4 \times 157 + 2 \times 160 + 5 \times 162 + 2 \times 165 + 4 \times 170 + 6 \times 174 + 5 \times 180}{2 + 4 + 2 + 5 + 2 + 4 + 6 + 5} = \frac{5\,016}{30} = 167,2 \text{ cm.}$$

Situation 5.2 Quelle est la médiane des tailles de cette classe ?

Il y a 30 élèves : dans l'ordre croissant, la 15e taille est 165 cm et la 16e est 170 cm. Toute valeur entre 165 cm et 170 cm peut être prise comme médiane de cette série.

Brevet 2025 — Amérique du Nord

1. Malo s'entraîne sur un parcours de 13,5 km ; une courbe donne sa distance parcourue en fonction du temps. Le temps et la distance sont-ils proportionnels ?

La représentation graphique de la distance en fonction du temps n'est pas un segment de droite passant par l'origine : la distance parcourue par Malo **n'est pas proportionnelle** au temps de course.

2. Quelle distance a-t-il parcourue au bout de 20 minutes (lecture graphique) ?

Au bout de 20 minutes, Malo a parcouru **4,5 km**.

3. Combien de temps a-t-il mis pour parcourir les 9 premiers kilomètres (lecture graphique) ?

Malo a parcouru les 9 premiers kilomètres en **50 minutes**.

4. Sachant qu'il a parcouru les 13,5 km en 80 minutes, dont un arrêt de 10 minutes, calculer sa vitesse moyenne au dixième de km/h près.

$$\text{Sans l'arrêt (70 min de course effective)} : v_1 = \frac{13,5}{\frac{70}{60}} = 13,5 \times \frac{60}{70} = \frac{81}{7} \approx 11,6 \text{ km/h.}$$

$$\text{Avec l'arrêt (80 min au total)} : v_2 = \frac{13,5}{\frac{80}{60}} = 13,5 \times \frac{60}{80} = \frac{81}{8} \approx 10,1 \text{ km/h.}$$

5.a Louise (12 km/h) et Hillal (10 km/h), partis en même temps sur les 13,5 km, courent à vitesse régulière. Qui franchit la ligne d'arrivée en premier ?

Louise court plus vite qu'Hillal : c'est elle qui arrive la première.

5.b Quelle distance sépare Louise et Hillal lorsque la première d'entre eux franchit la ligne d'arrivée ?

Louise parcourt les 13,5 km à 12 km/h en un temps $t = \frac{13,5}{12}$ heures.

Pendant ce temps, Hillal parcourt $10 \times \frac{13,5}{12} = 11,25$ km.

Hillal est donc à $13,5 - 11,25 = \mathbf{2,25}$ km de l'arrivée à cet instant.

Brevet 2025 — Asie

Question 1. Une urne contient 4 boules bleues, 6 violettes, 7 rouges, 3 jaunes, indiscernables au toucher. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule violette en tirant au hasard ?

Il y a $4 + 6 + 7 + 3 = 20$ boules en tout, situation d'équiprobabilité : $P = \frac{\text{issues favorables}}{\text{issues possibles}}$.

Il y a 6 boules violettes sur 20 : $P = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$. **Réponse : $\frac{3}{10}$.**

Question 2. Calculer 70 % d'une quantité revient à multiplier cette quantité par :

Prendre 70 % d'une quantité revient à multiplier par le coefficient $\frac{70}{100} = 0,70$. **Réponse : 0,70.**

Les autres propositions correspondent à des erreurs classiques : $0,30 = 1 - 0,7$ (coefficient d'une baisse de 70 %), $1,70 = 1 + 0,7$ (hausse de 70 %), $1,30 = 1 + 0,3$ (hausse de 30 %).

Question 3. On considère la série 7 ; 18 ; 12 ; 13 ; 15. Quelle affirmation est vraie parmi : étendue = 8, médiane = 12, moyenne = 53, moyenne = 13 ?

La moyenne vaut $\frac{7 + 18 + 12 + 13 + 15}{5} = \frac{65}{5} = 13$. **Réponse : la moyenne de cette série est 13.**

Les autres propositions sont fausses : l'étendue vaut $18 - 7 = 11$ (et non 8, en oubliant de ranger la série avant de soustraire) ; la médiane, une fois la série rangée (7 ; 12 ; 13 ; 15 ; 18), vaut 13 (et non 12) ; la « moyenne » 53 vient d'un calcul sans les parenthèses ($7 + 18 + 12 + 13 + 15 \div 5 = 53$, faux).

Question 4. Une fonction affine f a pour représentation une droite passant par $(0 ; 4)$ et $(1 ; 2)$. Quelle est l'expression de f parmi : $2x + 4$, $4x - 2$, $-2x + 4$, $-4x + 2$?

La droite coupe l'axe des ordonnées en $(0 ; 4)$, donc l'ordonnée à l'origine est $b = 4$.

En passant de $(0 ; 4)$ à $(1 ; 2)$, l'ordonnée diminue de 2 quand l'abscisse augmente de 1 : le coefficient directeur est $a = -2$.

Réponse : $f(x) = -2x + 4$.

Brevet 2025 — Métropole

1.a Léa veut installer des panneaux solaires rectangulaires (3 angles droits visibles) sur son toit. Quelle est la nature de cette figure ?

Un quadrilatère possédant 3 angles droits est nécessairement un **rectangle** (le quatrième angle vaut alors aussi 90° par somme des angles).

1.b Chaque panneau mesure 1,70 m de long et 1,10 m de large. Calculer l'aire d'un panneau.

$$1,10 \times 1,70 = 1,87 \text{ m}^2.$$

1.c Léa installe 10 panneaux. Calculer l'aire totale occupée.

$$1,87 \times 10 = 18,7 \text{ m}^2.$$

2.a Sur la vue de côté du toit, le triangle AIC (I le pied de la hauteur du toit) est-il isocèle, rectangle, isocèle rectangle ou équilatéral ?

Le triangle AIC est **rectangle en I** (I est le pied de la hauteur, donc l'angle en I est droit).

2.b Sachant $AI = 4$ m et $IC = 3$ m, calculer la longueur AC.

Le triangle ACI est rectangle en I : $AC^2 = AI^2 + IC^2 = 16 + 9 = 25$, donc **AC = 5 m**.

3.a La partie rectangulaire du toit (AEGC) mesure 50 m^2 . Les 10 panneaux occupent environ 19 m^2 . La condition 1 impose que les panneaux occupent moins de 40 % de cette surface. Calculer le pourcentage occupé.

$$\frac{19}{50} = \frac{38}{100} = 38 \%, \text{ ce qui respecte la condition (moins de 40 \%).}$$

3.b La condition 2 impose que l'angle α de la pente du toit ait une tangente inférieure à 0,839. Parmi trois rapports proposés, lequel donne directement $\tan(\alpha)$?

$$\tan(\alpha) = \frac{IC}{AI} \text{ (côté opposé sur côté adjacent à l'angle } \alpha, \text{ dans le triangle rectangle AIC).}$$

3.c Calculer $\tan(\alpha)$.

$$\tan(\alpha) = \frac{IC}{AI} = \frac{3}{4} = \mathbf{0,75}.$$

3.d Léa pourra-t-elle installer les 10 panneaux, en respectant les deux conditions ?

Condition 1 : $38\% < 40\%$: **respectée**.

Condition 2 : $\tan(\alpha) = 0,75 < 0,839$: **respectée**.

Les deux conditions étant réunies, **Léa pourra installer ses 10 panneaux solaires**.

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 1)

Partie A — 1. Les connexions se répartissent : 25 % via A, 15 % via B, le reste via C ; 90 % des connexions via A sont stables, 80 % via B, 85 % via C. Compléter l'arbre pondéré.

Le reste des connexions transite via C, soit $1 - 0,25 - 0,15 = 0,6$, donc $P(C) = 0,6$.

Sur la première branche : $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,15$, $P(C) = 0,6$.

Sur les branches suivantes : $P_A(S) = 0,9$ et $P_A(\bar{S}) = 0,1$; $P_B(S) = 0,8$ et $P_B(\bar{S}) = 0,2$; $P_C(S) = 0,85$ et $P_C(\bar{S}) = 0,15$.

Partie A — 2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à 0,12.

$$P(S \cap B) = P(B) \times P_B(S) = 0,15 \times 0,8 = 0,12.$$

Partie A — 3. Calculer $P(C \cap \bar{S})$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

$$P(C \cap \bar{S}) = P(C) \times P_C(\bar{S}) = 0,6 \times 0,15 = 0,09.$$

Cela signifie que 9 % des connexions de l'entreprise transitent via le serveur C et sont instables.

Partie A — 4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0,855$.

Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) + P(C) \times P_C(S) = 0,25 \times 0,9 + 0,15 \times 0,8 + 0,6 \times 0,85 = 0,225 + 0,12 + 0,51 = 0,855.$$

Partie A — 5. Sachant que la connexion est stable, calculer la probabilité qu'elle ait eu lieu via le serveur B (arrondie au millièmme).

$$P_S(B) = \frac{P(S \cap B)}{P(S)} = \frac{0,12}{0,855} \approx \mathbf{0,140} \text{ (au millièmme).}$$

Partie B — 1.a On étudie un échantillon de 50 connexions choisies au hasard (assimilable à un tirage avec remise). On admet que le nombre X de connexions instables suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

Chaque connexion est une épreuve à deux issues : « instable », de probabilité $p = P(\bar{S}) = 1 - 0,855 = 0,145$, répétée $n = 50$ fois de façon indépendante.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$.

Partie B — 1.b Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables (arrondie au millième).

À la calculatrice, $P(X \leq 8) \approx \mathbf{0,704}$ (au millième).

Partie B — 2.a On constitue un échantillon de n connexions ; X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $0,145$. Donner l'expression, en fonction de n , de la probabilité p_n qu'au moins une connexion soit instable.

« Au moins une connexion instable » est l'évènement contraire de « aucune connexion instable », c'est-à-dire $\{X_n = 0\}$.

$$P(X_n = 0) = \binom{n}{0} \times 0,145^0 \times 0,855^n = 0,855^n, \text{ donc } p_n = 1 - 0,855^n.$$

Partie B — 2.b Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $p_n \geq 0,99$.

$$p_n \geq 0,99 \iff 1 - 0,855^n \geq 0,99 \iff 0,855^n \leq 0,01.$$

En passant au logarithme népérien (croissant) : $n \ln(0,855) \leq \ln(0,01)$, et comme $\ln(0,855) < 0$, cela équivaut à $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)}$.

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)} \approx 29,4$, donc c'est à partir de $n = \mathbf{30}$ que $p_n \geq 0,99$.

Partie B — 3.a On note $F_n = X_n/n$ la fréquence de connexions instables dans un échantillon de n connexions. Calculer l'espérance $E(F_n)$, sachant que $V(F_n) = 0,123975/n$.

$$E(X_n) = np = 0,145n, \text{ et par linéarité de l'espérance, } E(F_n) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n} \times 0,145n = \mathbf{0,145}.$$

Partie B — 3.b Vérifier que $P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq 12,5/n$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à F_n avec une précision $t = 0,1$:

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq t) \leq \frac{V(F_n)}{t^2}, \text{ donc } P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{0,123975/n}{0,01} = \frac{12,3975}{n}.$$

Comme $12,3975 < 12,5$, on a bien $P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,5}{n}$.

Partie B — 3.c Un responsable étudie un échantillon de 1 000 connexions et constate $F_{1000} = 0,3$. Doit-il soupçonner un dysfonctionnement des serveurs ?

$|0,3 - 0,145| = 0,155 \geq 0,1$: cette observation réalise l'évènement $\{|F_{1000} - 0,145| \geq 0,1\}$.

D'après la question précédente, cet évènement a une probabilité inférieure ou égale à $\frac{12,5}{1\,000} = 0,0125$ sous un fonctionnement normal : un tel écart est donc très peu probable si les serveurs fonctionnent normalement.

Le responsable a raison de soupçonner un dysfonctionnement.

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 2)

Partie A — 1. Victor réussit un panier à trois points avec une probabilité de 0,32. Il tente 15 lancers indépendants. On note N le nombre de paniers marqués. On admet que N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

L'épreuve est répétée 15 fois de façon indépendante, avec une probabilité de succès de 0,32 à chaque lancer : N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(15 ; 0,32)$.

Partie A — 2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers.

$$P(N = 4) = \binom{15}{4} \times 0,32^4 \times 0,68^{11} \approx \mathbf{0,206} \text{ (au millième).}$$

Partie A — 3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers.

À la calculatrice, $P(N \leq 6) \approx \mathbf{0,828}$.

Partie A — 4. Déterminer l'espérance de N .

$E(N) = n \times p = 15 \times 0,32 = 4,8$: en moyenne, sur une série de 15 lancers, Victor marque 4,8 paniers.

Partie A — 5.a On note T le nombre de points marqués. Exprimer T en fonction de N .

Chaque panier réussi rapporte 3 points : $T = 3N$.

Partie A — 5.b En déduire l'espérance de T et interpréter cette valeur.

Par linéarité de l'espérance, $E(T) = E(3N) = 3E(N) = 3 \times 4,8 = 14,4$: en moyenne, Victor marque 14,4 points par série de 15 lancers à trois points.

Partie A — 5.c Calculer $P(12 \leq T \leq 18)$.

$$P(12 \leq T \leq 18) = P(12 \leq 3N \leq 18) = P(4 \leq N \leq 6).$$

$$P(4 \leq N \leq 6) = P(N = 4) + P(N = 5) + P(N = 6) \approx 0,206 + 0,213 + 0,167 \approx \mathbf{0,586}.$$

Partie B — 1.a On note X les points marqués par Victor lors d'un match, avec $E(X) = 22$ et $V(X) = 65$. Victor joue $n = 50$ matchs indépendants suivant la même loi que X ; on pose $M_{50} = (X_1 + \dots + X_{50})/50$. Que représente M_{50} ?

M_{50} représente la moyenne empirique, sur 50 matchs, du nombre de points marqués par Victor.

Partie B — 1.b Déterminer l'espérance et la variance de M_{50} .

Chaque X_i suit la même loi que X , donc $E(M_{50}) = E(X) = 22$.

Les X_i étant indépendantes : $V(M_{50}) = \frac{1}{50}V(X) = \frac{65}{50} = 1,3$.

Partie B — 1.c Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $a > 0$: $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.

Ici : $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{V(M_{50})}{3^2} = \frac{1,3}{9} = \frac{13}{90}$.

Partie B — 1.d En déduire que la probabilité de l'évènement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à 0,85.

L'évènement « $19 < M_{50} < 25$ » équivaut à $|M_{50} - 22| < 3$, donc $P(|M_{50} - 22| < 3) = 1 - P(|M_{50} - 22| \geq 3)$.

Comme $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$, on a $P(19 < M_{50} < 25) \geq 1 - \frac{13}{90} = \frac{77}{90} \approx 0,856 > 0,85$.

Partie B — 2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « il n'existe aucun entier naturel n tel que $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$ ».

D'après la loi faible des grands nombres, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq t) = 0$ pour tout réel $t > 0$, donc en particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - 22| \geq 3) = 0$.

Il existe donc un rang N à partir duquel $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$: l'affirmation est fausse.

Autre méthode : l'inégalité de concentration donne $P(|M_n - 22| \geq 3) \leq \frac{65}{9n}$, et $\frac{65}{9n} \leq 0,01 \iff n \geq \frac{6500}{9} \approx 722,2$: dès $n \geq 723$, l'inégalité voulue est vérifiée, ce qui confirme que l'affirmation est fausse.

Bac Terminale 2025 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. Un patient prend 2 mL de médicament chaque heure. On pose $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$ pour tout $n \geq 1$ (u_n = quantité présente après n prises). Calculer u_2 .

$u_2 = 2 + 0,8 \times u_1 = 2 + 0,8 \times 2 = 2 + 1,6 = 3,6$ mL.

Partie A — 2. Montrer par récurrence que $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Initialisation : pour $n = 1$, $10 - 8 \times 0,8^0 = 10 - 8 = 2 = u_1$: la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : on suppose que, pour un entier $n \geq 1$, $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$. Alors : $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n = 2 + 0,8(10 - 8 \times 0,8^{n-1}) = 2 + 8 - 8 \times 0,8^n = 10 - 8 \times 0,8^n$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$.

Partie A — 3. Déterminer la limite de u_n et interpréter.

Comme $-1 < 0,8 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^{n-1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10$.

Cela signifie qu'après un grand nombre de prises, la quantité de médicament dans l'organisme se rapproche indéfiniment de 10 mL, sans jamais l'atteindre.

Partie A — 4. L'inéquation $u_N \geq 10$ admet-elle des solutions pour N entier naturel non nul ? Interpréter.

$$u_N \geq 10 \iff 10 - 8 \times 0,8^{N-1} \geq 10 \iff -8 \times 0,8^{N-1} \geq 0.$$

Or $-8 \times 0,8^{N-1}$ est strictement négatif pour tout N : cette inéquation **n'a pas de solution**.

Cela signifie que la quantité de médicament dans l'organisme reste toujours strictement inférieure à 10 mL, quel que soit le nombre de prises.

Partie A — 5. Déterminer à partir de combien de prises la quantité de médicament est strictement supérieure à 9 mL.

$$u_n > 9 \iff 10 - 8 \times 0,8^{n-1} > 9 \iff -8 \times 0,8^{n-1} > -1 \iff 0,8^{n-1} < \frac{1}{8} \text{ (en divisant par } -8 < 0, \text{ ce qui inverse le sens de l'inégalité).}$$

En passant au logarithme népérien (croissant) : $(n-1) \ln(0,8) < -\ln(8)$, et comme $\ln(0,8) < 0$:
 $n-1 > -\frac{\ln(8)}{\ln(0,8)} \approx 9,3$, soit $n > 10,3$.

Les solutions entières sont donc les entiers $n \geq 11$: **c'est à partir de la 11e prise que la quantité dépasse 9 mL.**

Partie B — 1. On pose $S_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)/n$. Calculer S_2 .

$$S_2 = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{2 + 3,6}{2} = 2,8.$$

Partie B — 2. Montrer que $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n$.

En sommant l'expression explicite de u_k pour k de 1 à n : $\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (10 - 8 \times 0,8^{k-1}) = 10n - 8 \sum_{k=1}^n 0,8^{k-1}$.

La somme géométrique $\sum_{k=1}^n 0,8^{k-1} = \frac{1 - 0,8^n}{1 - 0,8} = 5(1 - 0,8^n)$.

Donc $\sum_{k=1}^n u_k = 10n - 8 \times 5(1 - 0,8^n) = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n$.

Partie B — 3. Calculer la limite de S_n .

D'après la question précédente, $S_n = 10 - \frac{40}{n} + \frac{40}{n} \times 0,8^n$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{40}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 10$: la quantité moyenne de médicament tend elle aussi vers 10 mL.

Partie B — 4. On donne la fonction mystere(k) (n=1, s=2; while s<k : n=n+1, s=10-40/n+40*0.8n/n; return n). Que représente mystere(9) ?**

La fonction calcule les termes successifs de S_n (avec la formule explicite de la question précédente) jusqu'à ce que S_n dépasse le seuil k : 'mystere(9)' renvoie donc **le premier rang n à partir duquel la quantité moyenne de médicament dans l'organisme dépasse 9 mL.**

Partie B — 5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

D'après la partie A, $u_n < 9$ pour tout $n \leq 10$ (la quantité ne dépasse 9 mL qu'à partir de la 11e prise).

Or S_n est la moyenne de $u_1, \dots, u_n$: si tous les u_k (pour $k \leq 10$) sont inférieurs à 9, alors S_{10} l'est aussi.

La valeur renvoyée par 'mystere(9)' est donc nécessairement **strictement supérieure à 10.**

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 1)

1. Dans la population française, 45 % sont du groupe A (85 % rhésus+), 10 % du groupe B (84 % rhésus+), 3 % du groupe AB (82 % rhésus+), le reste du groupe O. Compléter l'arbre pondéré.

Le reste correspond au groupe O : $1 - 0,45 - 0,10 - 0,03 = 0,42$. L'arbre a pour première branche $P(A) = 0,45$, $P(B) = 0,10$, $P(AB) = 0,03$, $P(O) = 0,42$, puis sur chaque branche $P_A(R) = 0,85$, $P_B(R) = 0,84$, $P_{AB}(R) = 0,82$ (les probabilités $P_O(R)$ ne sont pas encore connues à ce stade).

2. Montrer que $P(B \cap R) = 0,084$ et interpréter.

$$P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0,10 \times 0,84 = 0,084.$$

Cela signifie que 8,4 % de la population française est à la fois de groupe sanguin B et de rhésus positif.

3. On précise que $P(R) = 0,8397$. Montrer que $P_O(R) = 0,83$.

Les événements A, B, AB, O forment une partition, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(AB \cap R) + P(O \cap R), \text{ soit } P(O \cap R) = 0,8397 - 0,45 \times 0,85 - 0,084 - 0,03 \times 0,82 = 0,3486.$$

$$P_O(R) = \frac{P(O \cap R)}{P(O)} = \frac{0,3486}{0,42} = 0,83.$$

4. Un donneur universel est de groupe O et de rhésus négatif. Montrer que la probabilité qu'un individu soit donneur universel est 0,0714.

$$\text{On cherche } P(O \cap \bar{R}) = P(O) \times P_O(\bar{R}) = P(O) \times (1 - P_O(R)).$$

$$P(O \cap \bar{R}) = 0,42 \times (1 - 0,83) = 0,42 \times 0,17 = 0,0714.$$

5.a Sur un échantillon de 100 personnes (tirage avec remise), X compte le nombre de donneurs universels. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

L'épreuve « être donneur universel », de probabilité $p = 0,0714$, est répétée 100 fois de façon indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise) : X suit la **loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0714$** .

5.b Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans l'échantillon.

$$\text{À la calculatrice, } P(X \leq 7) \approx \mathbf{0,577}.$$

5.c Montrer que $E(X) = 7,14$ et $V(X) \approx 6,63$ (à 10^{-2} près).

$$E(X) = np = 100 \times 0,0714 = 7,14 \text{ et } V(X) = np(1 - p) = 100 \times 0,0714 \times 0,9286 \approx 6,63.$$

6. On organise une collecte dans N villes ; $X_1, \dots, X_N$ (indépendantes, même loi que X) comptent les donneurs universels par ville, avec $E=7,14$ et $V=6,63$. On pose $M_N = (X_1 + \dots + X_N)/N$. Que représente M_N ?

M_N représente le nombre moyen de donneurs universels par collecte, sur les N collectes organisées.

7. Calculer $E(M_N)$.

M_N étant la moyenne empirique de variables de même loi que X : $E(M_N) = E(X) = 7,14$.

8. Montrer que $V(M_N) = 6,63/N$.

$$V(M_N) = \frac{V(X)}{N} = \frac{6,63}{N}.$$

9. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(7 < M_N < 7,28) \geq 0,95$.

L'évènement « $7 < M_N < 7,28$ » équivaut à $|M_N - 7,14| < 0,14$, donc $P(|M_N - 7,14| < 0,14) = 1 - P(|M_N - 7,14| \geq 0,14)$.

On veut $P(|M_N - 7,14| \geq 0,14) \leq 0,05$. D'après Bienaymé-Tchebychev, avec $t = 0,14$: $P(|M_N - 7,14| \geq 0,14) \leq \frac{6,63}{N \times 0,14^2}$.

On veut donc $\frac{6,63}{0,0196 N} \leq 0,05 \iff N \geq \frac{6,63}{0,05 \times 0,0196} \approx 6\,765,3$.

La plus petite valeur qui convient est donc $N = 6\,766$.

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 2)

Partie A — 1. Dans un centre multisports, une personne peut chuter en séance 1 (A, $P(A)=0,6$) puis en séance 2 (B) ; $P_A(B) = 0,3$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,4$. Représenter la situation par un arbre pondéré.

L'arbre a pour première branche $P(A) = 0,6$, $P(\bar{A}) = 0,4$, puis $P_A(B) = 0,3$, $P_A(\bar{B}) = 0,7$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,4$, $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,6$.

Partie A — 2. Calculer $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ et interpréter.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,4 \times 0,6 = 0,24.$$

Cela signifie que 24 % des personnes ne chutent ni lors de la première ni lors de la deuxième séance.

Partie A — 3. Montrer que $P(B) = 0,34$.

$\{A, \bar{A}\}$ forme une partition, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4 = 0,18 + 0,16 = 0,34$.

Partie A — 4. Sachant que la personne n'a pas chuté à la deuxième séance, calculer la probabilité qu'elle n'ait pas chuté à la première.

$$P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,24}{1 - 0,34} = \frac{0,24}{0,66} \approx 0,364.$$

Partie A — 5.a Sur un échantillon de 100 personnes (tirage avec remise), X compte celles n'ayant chuté ni à la première ni à la deuxième séance (probabilité 0,24). Justifier la loi de X et ses paramètres.

L'épreuve « ne pas chuter » (probabilité 0,24) est répétée 100 fois de façon indépendante : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,24$.

Partie A — 5.b Quelle est la probabilité d'avoir au moins 20 personnes sur 100 n'ayant chuté à aucune des deux séances ?

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx 1 - 0,145 \approx 0,855.$$

Partie A — 5.c Calculer $E(X)$ et interpréter.

$E(X) = np = 100 \times 0,24 = 24$: en moyenne, sur 100 personnes, 24 ne chuteront ni lors de la première ni lors de la deuxième séance.

Partie B — 1. T_1 (temps d'attente samedi, $E=40$, écart-type=10) et T_2 (dimanche, $E=60$, écart-type=16) sont indépendantes ; $T = T_1 + T_2$. Déterminer $E(T)$ et interpréter.

Par linéarité de l'espérance : $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 40 + 60 = 100$: il faut attendre en moyenne 100 minutes sur les deux jours.

Partie B — 2. Montrer que $V(T) = 356$.

T_1 et T_2 étant indépendantes : $V(T) = V(T_1) + V(T_2) = \sigma(T_1)^2 + \sigma(T_2)^2 = 10^2 + 16^2 = 100 + 256 = 356$.

Partie B — 3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $P(60 < T < 140) > 0,77$.

L'évènement « $60 < T < 140$ » équivaut à $|T - 100| < 40$ (en centrant sur $E(T) = 100$).

D'après Bienaymé-Tchebychev, avec $t = 40$: $P(|T - 100| \geq 40) \leq \frac{V(T)}{40^2} = \frac{356}{1600}$.

Donc $P(|T - 100| < 40) \geq 1 - \frac{356}{1600} = \frac{1244}{1600} \approx 0,7775 > 0,77$.

Brevet 2024 — Amérique du Nord

1. Un magasin relève les prix de cinq vêtements : 12 €, 15 €, 10 €, 7 € et 13 €. Affirmation A : la moyenne des prix est 11,40 €. Affirmation B : la médiane des prix est 10 €. Ces affirmations sont-elles vraies ou fausses ?

Affirmation A : la moyenne vaut $\frac{12 + 15 + 10 + 7 + 13}{5} = \frac{57}{5} = 11,4$ €. L'affirmation A est **vraie**.

Affirmation B : en rangeant les prix dans l'ordre croissant, on obtient 7 ; 10 ; 12 ; 13 ; 15. La valeur centrale (la 3e sur 5) est 12 €, donc la médiane est 12 € et non 10 €. L'affirmation B est **fausse**.

2. Lors d'un entraînement, une élève parcourt 20 m en 6 secondes. Affirmation C : sa vitesse moyenne est de 14 km/h. Vrai ou faux ?

La vitesse moyenne est $v = \frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{20}{6} \approx 3,33$ m/s.

Pour convertir en km/h, on multiplie par 3,6 (puisque 1 m/s = 3,6 km/h) : $3,33 \times 3,6 \approx 12$ km/h.

La vitesse moyenne de l'élève est donc d'environ 12 km/h, et non 14 km/h. L'affirmation C est **fausse**.

3. Une urne contient 15 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 15. Affirmation D : la probabilité de tirer une boule portant un nombre premier est $\frac{7}{15}$. Vrai ou faux ?

Les nombres premiers compris entre 1 et 15 sont 2, 3, 5, 7, 11 et 13 : il y en a 6.

La probabilité de tirer un nombre premier est donc $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$, et non $\frac{7}{15}$. L'affirmation D est **fausse**.

4. Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport (-3). Affirmation E : l'aire du triangle A'B'C' est égale à 3 fois l'aire du triangle ABC. Vrai ou faux ?

Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$, et donc les aires par k^2 .

Ici $k = -3$, donc les aires sont multipliées par $(-3)^2 = 9$, et non par 3.

L'aire du triangle A'B'C' est donc égale à 9 fois celle du triangle ABC, et non à 3 fois. L'affirmation E est **fausse**.

Brevet 2024 — Asie

QCM (une seule réponse exacte par question, aucune justification n'était demandée sur la copie). 1. Parmi les nombres 1, 21, 37 et 54, lequel est un nombre premier ? Réponses proposées : A. 1 B. 21 C. 37 D. 54

1 n'est pas premier : il n'a qu'un seul diviseur (lui-même).

21 est divisible par 1, 3, 7 et 21 : il a donc plus de deux diviseurs.

54 est divisible par 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 et 54 : il a lui aussi plus de deux diviseurs.

37 n'admet que deux diviseurs : 1 et 37. C'est donc le seul nombre premier de la liste. **Réponse C.**

2. Un cube a pour arête 5 cm. Quelle est l'aire totale de son patron ? Réponses proposées : A. 125 cm² B. 150 cm² C. 120 cm² D. 100 cm²

Le patron d'un cube est constitué de 6 faces carrées, chacune de côté 5 cm.

L'aire d'une face est $5^2 = 25 \text{ cm}^2$, donc l'aire totale du patron est $6 \times 25 = 150 \text{ cm}^2$. **Réponse B.**

3. Quelle est une forme factorisée de l'expression $4x^2 - 9$? Réponses proposées : A. $(4x - 3)(4x + 3)$ B. $(2x - 3)(2x + 3)$ C. $(2x - 3)^2$ D. $(4x - 9)(4x + 9)$

On reconnaît une différence de deux carrés : $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2$.

D'après l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, on obtient $(2x - 3)(2x + 3)$. **Réponse B.**

4. Un écran de télévision est au format 16 :9 (rapport longueur/largeur). Sa longueur mesure 110 cm. Quelle est sa largeur, arrondie ? Réponses proposées : A. 62 cm B. 103 cm C. 196 cm D. 94 cm

On cherche la largeur ℓ telle que $\frac{110}{\ell} = \frac{16}{9}$, ce qui revient à résoudre le tableau de proportionnalité

$$\text{longueur/largeur} = \frac{16}{9} = 110/\ell.$$

Par produit en croix : $\ell = \frac{110 \times 9}{16} = 61,875$, soit environ **62 cm. Réponse A.**

5. On donne la série de valeurs : 4,1 ; 3,67 ; 4,23 ; 4,5 ; 3,4. Quelle est la médiane de cette série ? Réponses proposées : A. 0,83 B. 4,1 C. 4,23 D. 3,98

On range d'abord les valeurs dans l'ordre croissant : 3,4 ; 3,67 ; 4,1 ; 4,23 ; 4,5.

Il y a 5 valeurs (nombre impair), la médiane est donc la valeur du milieu, en position $\frac{5+1}{2} = 3$: c'est **4,1. Réponse B.**

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. Au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient été infectés par la COVID-19. On prélève un individu au hasard ; quelle est la probabilité qu'il ait déjà été infecté (événement I) ?

Par équiprobabilité, $P(I) = 0,057$.

Partie A — 2.a On prélève 100 personnes (tirage assimilé avec remise) ; X compte les personnes déjà infectées. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

L'épreuve « être déjà infecté » (probabilité 0,057) est répétée 100 fois de façon indépendante : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,057$.

Partie A — 2.b Calculer son espérance et interpréter.

$E(X) = 100 \times 0,057 = 5,7$: en moyenne, un échantillon de 100 adultes contient 5,7 personnes déjà infectées.

Partie A — 2.c Quelle est la probabilité qu'aucune personne de l'échantillon ne soit infectée (à 10^{-4} près) ?

$$P(X = 0) = 0,943^{100} \approx 0,0028.$$

Partie A — 2.d Quelle est la probabilité qu'au moins 2 personnes soient infectées (à 10^{-4} près) ?

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,9801.$$

Partie A — 2.e Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leq n) > 0,9$, et interpréter.

À la calculatrice, $P(X \leq 8) \approx 0,883$ et $P(X \leq 9) \approx 0,941$: le plus petit entier est $n = 9$. Il y a plus de 9 chances sur 10 que l'échantillon contienne au plus 9 personnes déjà infectées.

Partie B — 1. Un test a une sensibilité de 0,8 ($P_I(T)$, test positif sachant infecté) et une spécificité de 0,99 ($P_{\bar{I}}(\bar{T})$). Compléter l'arbre de probabilités.

$$P(I) = 0,057, P(\bar{I}) = 0,943 ; P_I(T) = 0,8, P_I(\bar{T}) = 0,2 ; P_{\bar{I}}(T) = 0,01, P_{\bar{I}}(\bar{T}) = 0,99.$$

Partie B — 2. Montrer que $P(T) = 0,05503$.

Par les probabilités totales : $P(T) = P(I \cap T) + P(\bar{I} \cap T) = 0,057 \times 0,8 + 0,943 \times 0,01 = 0,0456 + 0,00943 = 0,05503$.

Partie B — 3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif (à 10^{-4} près) ?

$$P_T(I) = \frac{P(I \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0456}{0,05503} \approx \mathbf{0,8286}.$$

Partie C. Dans un autre pays, avec le même test, la proportion de tests positifs est de 29,44 %. Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard ait été infecté ?

En notant x la proportion d'infectés : $P(T) = 0,8x + 0,01(1 - x) = 0,79x + 0,01$.

$0,79x + 0,01 = 0,2944 \iff 0,79x = 0,2844 \iff x = 0,36$: la probabilité d'avoir été infecté est **0,36** (36 % de la population).

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 2)

1. À l'issue d'un examen, 91,7 % des étudiants ont répondu « oui » à la question « Pensez-vous avoir réussi ? » ; 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non », et 98 % de ceux ayant réussi ont répondu « oui ». Préciser $P(Q)$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q})$.

$P(Q) = 0,917$ (proportion de « oui ») et $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0,65$ (probabilité d'avoir répondu « non » sachant qu'on a échoué).

2.a En notant $x = P(R)$, compléter l'arbre pondéré.

$$P(R) = x, P(\bar{R}) = 1 - x; P_R(Q) = 0,98, P_R(\bar{Q}) = 0,02; P_{\bar{R}}(Q) = 0,35, P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0,65.$$

2.b Montrer que $x = 0,9$.

Par les probabilités totales : $P(Q) = 0,98x + 0,35(1 - x) = 0,63x + 0,35$.

$$0,63x + 0,35 = 0,917 \iff 0,63x = 0,567 \iff x = 0,9.$$

3. L'étudiant interrogé a répondu « oui ». Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen (à 10^{-3} près) ?

$$P_Q(R) = \frac{P(Q \cap R)}{P(Q)} = \frac{0,9 \times 0,98}{0,917} \approx \mathbf{0,962}.$$

4. La note N suit la loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615). À partir de quelle note la directrice doit-elle récompenser pour que 65 % des étudiants le soient ?

À la calculatrice : $P(N \geq 11) \approx 0,797$ et $P(N \geq 12) \approx 0,649$: en récompensant à partir de la **note 11**, environ 80 % des étudiants sont récompensés, ce qui est le premier seuil garantissant au moins 65 %.

5. Les notes $N_1, \dots, N_{10}$ de dix étudiants sont indépendantes et suivent la même loi binomiale (20 ; 0,615). Calculer $E(S)$ et $V(S)$ pour $S = N_1 + \dots + N_{10}$.

Pour chaque note : $E(N_i) = 20 \times 0,615 = 12,3$ et $V(N_i) = 20 \times 0,615 \times 0,385 = 4,7355$.

$E(S) = 10 \times 12,3 = 123$ et, par indépendance, $V(S) = 10 \times 4,7355 = 47,355$.

6.a On pose $M = \frac{S}{10}$. Que modélise cette variable aléatoire ?

M modélise la **moyenne des notes** obtenues par les dix étudiants choisis au hasard.

6.b Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.

$E(M) = \frac{1}{10}E(S) = 12,3$ et $V(M) = \frac{1}{100}V(S) = 0,47355$.

6.c À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier que la probabilité que la moyenne de dix étudiants soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 %.

L'intervalle $]10,3 ; 14,3[$ est centré sur $E(M) = 12,3$: l'évènement s'écrit $|M - 12,3| < 2$.

Bienaymé-Tchebychev : $P(|M - 12,3| \geq 2) \leq \frac{0,47355}{4} \approx 0,118$, donc $P(|M - 12,3| < 2) \geq 0,88 \geq 0,8$.

L'affirmation est justifiée.

Bac Terminale 2024 — Polynésie française (jour 2)

1.a La suite (u_n) est définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$. Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2 .

$$u_1 = 8 - \ln\left(\frac{8}{4}\right) = 8 - \ln(2) \approx \mathbf{7,31}.$$

$$u_2 = u_1 - \ln\left(\frac{u_1}{4}\right) \approx 7,3069 - \ln(1,8267) \approx \mathbf{6,70}.$$

1.b Une fonction Python 'mystere(k)' initialise 'u = 8' et 'S = 0', puis répète 'k' fois 'S = S + u' suivi de 'u = u - log(u/4)', avant de renvoyer 'S'. L'appel 'mystere(10)' renvoie 58,440... Que représente ce résultat ?

À chaque tour de boucle, 'S' accumule la valeur courante de 'u' avant sa mise à jour : après 10 tours, 'S' contient donc $u_0 + u_1 + \dots + u_9$, c'est-à-dire **la somme des dix premiers termes de la suite (u_n) , de u_0 à u_9 .**

1.c Modifier la fonction pour qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite.

- def mystere(k) :
- u = 8

- $S = 0$
- for i in range(k) :
- $S = S + u$
- $u = u - \log(u / 4)$
- return S / k

2. Soit $f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$ définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Étudier les variations de f et préciser la valeur exacte de son minimum.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x-1$: $f'(x) < 0$ sur $]0 ; 1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$.

f est donc strictement décroissante sur $]0 ; 1]$ puis strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$, avec un minimum en $x = 1$ valant $f(1) = 1 - \ln\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \ln(4)$.

3.a On admet que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n . Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation : $u_0 = 8$ et $u_1 \approx 7,31$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour un certain n . Comme f est croissante sur $[1 ; +\infty[$, on a $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, soit $f(1) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Or $f(1) = 1 + \ln(4) \approx 2,39 \geq 1$, donc $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

3.b En déduire que (u_n) converge, et noter ℓ sa limite.

L'encadrement précédent montre que (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leq u_n$) et minorée par 1 : elle converge donc vers une limite réelle $\ell \geq 1$.

3.c Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0 ; +\infty[$.

$f(x) = x \iff x - \ln\left(\frac{x}{4}\right) = x \iff \ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \iff \frac{x}{4} = 1 \iff x = 4$: l'unique solution est 4.

3.d En déduire la valeur de ℓ .

f est continue sur $]0 ; +\infty[$ (car dérivable); en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. D'après la question précédente, la seule solution possible est $\ell = 4$: $\ell = 4$.

Brevet 2023 — Métropole, Antilles et Guyane

1. Un QCM propose trois listes de nombres pour la question « citer trois diviseurs de 84 » : (84, 168, 252), (2, 3, 4) et (2, 5, 7). Laquelle est correcte ?

84 se décompose en $84 = 2^2 \times 3 \times 7$, donc ses diviseurs comprennent notamment 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 et 84.

On vérifie que $84 \div 2 = 42$, $84 \div 3 = 28$ et $84 \div 4 = 21$: ce sont bien trois diviseurs entiers de 84.

En revanche 168 et 252 sont des multiples de 84 (et non des diviseurs), et 5 ne divise pas 84 : **la liste correcte est (2, 3, 4).**

2. La pyramide SABCD est un agrandissement de coefficient 2 de la pyramide SA'B'C'D'. Par quel nombre doit-on multiplier le volume de SA'B'C'D' pour obtenir celui de SABCD ?

Dans un agrandissement (ou une réduction) de coefficient k , les longueurs sont multipliées par k , mais les volumes sont multipliés par k^3 .

Ici $k = 2$, donc le volume est multiplié par $2^3 = 8$.

3. Quelle est la valeur de l'expression $x^2 + 3x - 5$ pour $x = -2$?

On remplace x par -2 : $(-2)^2 + 3 \times (-2) - 5 = 4 - 6 - 5$.

Soit $4 - 6 - 5 = -7$.

4. Un sac opaque contient huit boules numérotées de 1 à 8. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 2 ?

Parmi les nombres de 1 à 8, les multiples de 2 sont 2, 4, 6 et 8, soit 4 boules favorables sur 8 au total.

La probabilité cherchée est donc $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

5. Le triangle DEF est l'image du triangle ABC par une homothétie de centre O. Sur la figure, DEF est situé de l'autre côté de O par rapport à ABC, et ses dimensions sont doublées par rapport à ABC. Quel est le rapport de cette homothétie ?

Une homothétie de rapport positif conserve le côté de O sur lequel se trouve la figure, tandis qu'un rapport négatif la fait basculer de l'autre côté du centre.

Ici DEF se trouve bien de l'autre côté de O par rapport à ABC : le rapport est donc négatif.

De plus, DEF est environ deux fois plus grand qu'ABC : la valeur absolue du rapport est 2.

Le rapport de l'homothétie est donc -2 .

Brevet 2023 — Amérique du Nord

Partie A (évolution du nombre de visiteurs). 1.a D'après le diagramme en barres du nombre de visiteurs annuels sur un site touristique entre 2010 et 2021, quel a été le nombre de visiteurs en 2010 (aucune justification attendue) ?

D'après la hauteur de la première barre du diagramme, le nombre de visiteurs en 2010 était de **300 000**.

1.b En quelle année le nombre de visiteurs a-t-il été le plus élevé (aucune justification attendue) ?

La barre la plus haute du diagramme, avant la baisse marquée des deux dernières années, correspond à l'année **2019**.

2. En 2020, le site a compté 187 216 visiteurs, puis 219 042 en 2021. Le maire de la ville souhaitait une progression d'au moins 15 % entre 2020 et 2021. Cet objectif a-t-il été atteint ?

Une progression de 15 % correspond à un nombre de visiteurs multiplié par $1 + \frac{15}{100} = 1,15$.

Le nombre de visiteurs qu'il aurait fallu atteindre est donc $1,15 \times 187\,216 = 215\,298,4$.

Or le nombre de visiteurs réellement observé en 2021, 219 042, est supérieur à 215 298,4 : l'objectif du maire a bien été atteint.

Partie B (prix des hôtels). Le tableau des prix facturés pour une nuit (en euro) et de leurs effectifs est : 60 € (1 200 nuits), 80 € (1 350), 85 € (1 000), 90 € (1 100), 110 € (1 200), 120 € (1 300), 350 € (900), 500 € (300). 3. Déterminer l'étendue des prix facturés.

L'étendue d'une série est la différence entre sa plus grande et sa plus petite valeur.

Ici, le prix maximal est 500 € et le prix minimal est 60 €, donc l'étendue vaut $500 - 60 = 440$ euros.

4. Quelle est la moyenne des prix facturés pour une nuit, arrondie à l'euro près ?

Le nombre total de nuits facturées est $1\,200 + 1\,350 + 1\,000 + 1\,100 + 1\,200 + 1\,300 + 900 + 300 = 8\,350$.

La somme totale facturée est $60 \times 1\,200 + 80 \times 1\,350 + 85 \times 1\,000 + 90 \times 1\,100 + 110 \times 1\,200 + 120 \times 1\,300 + 350 \times 900 + 500 \times 300 = 1\,117\,000$ euros.

La moyenne est donc $\frac{1\,117\,000}{8\,350} \approx 133,77$, soit environ **134 euros**.

5. L'association des hôteliers affirme : « dans les hôtels de cette ville, au moins la moitié des nuits est facturée à moins de 100 € ». Cette affirmation est-elle vraie ?

Il y a 8 350 nuits au total, dont la moitié représente $\frac{8\,350}{2} = 4\,175$ nuits.

Les nuits facturées strictement en dessous de 100 € correspondent aux prix 60 €, 80 €, 85 € et 90 €, soit $1\,200 + 1\,350 + 1\,000 + 1\,100 = 4\,650$ nuits.

Comme $4\,650 > 4\,175$, plus de la moitié des nuits sont bien facturées à moins de 100 € : l'affirmation de l'association est vraie.

Brevet 2023 — Amérique du Nord

1. La piste d'un hippodrome est composée de deux lignes droites de 850 m chacune et de deux virages en demi-cercle de rayon 40 m. Montrer que la longueur d'un tour de piste est d'environ 1 951 m.

Les deux virages en demi-cercle, mis bout à bout, forment un cercle complet de rayon 40 m, de périmètre $2 \times \pi \times 40 \approx 251,33$ m.

La longueur d'un tour de piste est la somme des deux lignes droites et de ce cercle complet : $850 \times 2 + 251,33 = 1\,951,33$ m.

La longueur d'un tour de piste est donc bien d'environ **1 951 m**.

2.a Un cheval parcourt un tour de piste (1 951 m) en 2 min 9 s. Calculer sa vitesse moyenne en mètre par seconde, arrondie à l'unité.

On convertit d'abord la durée en secondes : $2 \text{ min } 9 \text{ s} = 2 \times 60 + 9 = 129 \text{ s}$.

La vitesse moyenne est $v = \frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{1\,951}{129} \approx 15,13$, soit environ **15 m/s**.

2.b Convertir cette vitesse moyenne en kilomètre par heure.

Pour convertir une vitesse de m/s en km/h, on multiplie par 3,6 (puisque $1 \text{ m/s} = \frac{3\,600}{1\,000} \text{ km/h} = 3,6 \text{ km/h}$).

En reprenant la valeur exacte, $v = \frac{1\,951}{129} \times 3,6 \approx 54,5$, soit environ **54 km/h** (à comparer à l'arrondi de la question précédente, $15 \times 3,6 = 54 \text{ km/h}$).

3. La surface de la piste a une aire d'environ 73 027 m² et on souhaite y semer du gazon en totalité. Trois marques de sacs sont disponibles : marque A (500 m² par sac, 141,95 €), marque B (400 m² par sac, 87,90 €), marque C (300 m² par sac, 66,50 €). Quelle marque doit-on choisir pour dépenser le moins possible ?

Marque A : $73\,027 \div 500 \approx 146,05$, il faut donc 147 sacs entiers, pour un coût de $147 \times 141,95 = 20\,866,65$ €.

Marque B : $73\,027 \div 400 \approx 182,57$, il faut donc 183 sacs entiers, pour un coût de $183 \times 87,90 = 16\,085,70$ €.

Marque C : $73\,027 \div 300 \approx 243,42$, il faut donc 244 sacs entiers, pour un coût de $244 \times 66,50 = 16\,226$ €.

Le coût le plus faible est celui de la marque B, avec 16 085,70 € : **il faut choisir la marque B.**

Brevet 2023 — Nouvelle-Calédonie

1. D'après des chercheurs, la probabilité qu'une personne subisse une attaque mortelle de requin au cours de sa vie est l'une des trois valeurs suivantes : $2,7 \times 10^{-7}$, $2,7 \times 10^0$ ou $2,7 \times 10^7$. Laquelle ?

Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1. Or $2,7 \times 10^0 = 2,7$ et $2,7 \times 10^7$ sont bien supérieurs à 1 : seule $2,7 \times 10^{-7}$ (un nombre très petit, proche de 0) peut être une probabilité.

2. Calculer $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{7}{4}$.

On commence par le produit : $\frac{2}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{2 \times 7}{5 \times 4} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$.

On met ensuite les deux fractions au même dénominateur : $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$, donc $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{6}{10} - \frac{7}{10} = -\frac{1}{10}$.

3. Un pantalon vendu 80 € est affiché à 60 € sur un site. Quel est le pourcentage de réduction ?

La réduction représente $80 - 60 = 20$ € sur un prix de départ de 80 €.

Le taux de réduction est donc $\frac{20}{80} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100}$, soit **25 %**.

4. ABCD est un parallélogramme de centre E. Que peut-on dire de l'homothétie de centre A qui transforme B en F, où F est le milieu de [AB] ?

Dans un parallélogramme ABCD, les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu commun E : E est donc le milieu de [AC].

F étant le milieu de [AB], l'homothétie de centre A qui envoie B sur son milieu F a pour rapport $\frac{1}{2}$; cette même homothétie envoie alors C, par le même rapport, sur le milieu de [AC], c'est-à-dire sur **E**.

5. Déterminer la médiane de la série de valeurs : 11 ; 17 ; 8 ; 14 ; 3 ; 20 ; 5 ; 10 ; 12.

On range d'abord les 9 valeurs par ordre croissant : 3 ; 5 ; 8 ; 10 ; 11 ; 12 ; 14 ; 17 ; 20.

Comme il y a 9 valeurs (nombre impair), la médiane est la 5e valeur de cette liste triée, soit **11**.

Brevet 2023 — Nouvelle-Calédonie

1. Le parcours de la randonnée est schématisé par le triangle DMV, avec N sur [DM] et P sur [DV] tels que (NP) et (VM) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (DM). Justifier que (PN) et (VM) sont parallèles.

Les droites (PN) et (VM) sont toutes les deux perpendiculaires à la même droite (DM) : deux droites perpendiculaires à une même troisième droite sont parallèles entre elles, donc **(PN) et (VM) sont parallèles**.

2. On donne $DM = 3,8$ km (distance totale de la randonnée), $MV = 741$ m (altitude maximale) et Fabienne, partie de D, atteint le panneau P après avoir parcouru $DP = 3$ km. Déterminer l'altitude de Fabienne au panneau P.

- Les droites (PN) et (VM) étant parallèles, avec P sur (DV) et N sur (DM), on se trouve dans une configuration de Thalès dans le triangle DMV.
- Le théorème de Thalès donne : $\frac{DP}{DV} = \frac{PN}{VM}$.
- En remplaçant : $\frac{3}{3,8} = \frac{PN}{741}$.
- On en déduit $PN = \frac{3 \times 741}{3,8} = \frac{2223}{3,8} = 585$ m. Fabienne se trouve donc à 585 m d'altitude au panneau P.

3. Fabienne a parcouru les 3 km du trajet [DP] en 2 heures. Quelle est sa vitesse moyenne, en km/h, sur ce trajet ?

La vitesse moyenne est la distance parcourue divisée par la durée : $\frac{3}{2} = 1,5$ km/h.

4. Sur la fin du parcours [PV], Fabienne marche à une vitesse moyenne de 1,2 km/h. La durée totale estimée de la randonnée est de 2 h 30 min. A-t-elle dépassé cette durée ?

- La distance totale de la randonnée est $DV = 3,8$ km ; Fabienne a déjà parcouru $DP = 3$ km, il lui reste donc $PV = 3,8 - 3 = 0,8$ km à parcourir.
- À la vitesse de 1,2 km/h, le temps nécessaire pour parcourir ces 0,8 km est $\frac{0,8}{1,2} = \frac{2}{3}$ h.
- Or $\frac{2}{3}$ h = $\frac{2}{3} \times 60 = 40$ minutes : Fabienne met donc 2 h (pour [DP]) + 40 min (pour [PV]) = **2 h 40 min** au total.
- Comme 2 h 40 min est supérieur à la durée estimée de 2 h 30 min, **Fabienne a bien dépassé cette durée** (de 10 minutes).

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

Partie A — 1. Une entreprise loue des trottinettes électriques et contrôle leur état chaque lundi. On admet que si une trottinette est en bon état un lundi donné, la probabilité qu'elle le soit encore le lundi suivant est 0,9 ; si elle est en mauvais état, la probabilité qu'elle passe en bon état la semaine suivante est 0,4. On note B_n l'événement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et $p_n = P(B_n)$, avec $p_0 = 1$. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.

Comme la trottinette est en bon état à l'instant 0 ($p_0 = 1$), on a directement $p_1 = P_{B_0}(B_1) = 0,9$.

En construisant l'arbre pondéré sur les deux premières semaines (issues B_1 ou $\overline{B_1}$, puis B_2 ou $\overline{B_2}$ à chaque fois), la formule des probabilités totales donne : $p_2 = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(B_2) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = 0,81 + 0,04 = 0,85$.

On obtient bien $p_1 = 0,9$ et $p_2 = 0,85$.

Partie A — 2. Reproduire et compléter l'arbre pondéré traduisant le passage de la semaine n à la semaine $n + 1$.

L'arbre a pour première branche B_n avec probabilité p_n (puis B_{n+1} avec probabilité 0,9 et $\overline{B_{n+1}}$ avec probabilité 0,1), et pour seconde branche $\overline{B_n}$ avec probabilité $1 - p_n$ (puis B_{n+1} avec probabilité 0,4 et $\overline{B_{n+1}}$ avec probabilité 0,6).

Partie A — 3. En déduire que, pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

Les événements B_n et $\overline{B_n}$ forment une partition de l'univers, donc la formule des probabilités totales donne : $p_{n+1} = P(B_n) \times 0,9 + P(\overline{B_n}) \times 0,4 = 0,9p_n + 0,4(1 - p_n) = 0,9p_n + 0,4 - 0,4p_n$.

Donc, la réponse est $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

Partie A — 4.a Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,8$.

Initialisation : $p_0 = 1 \geq 0,8$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que pour un entier naturel n donné, $p_n \geq 0,8$. Alors, en multipliant par $0,5 > 0$: $0,5p_n \geq 0,4$, puis en ajoutant 0,4 : $0,5p_n + 0,4 \geq 0,8$, c'est-à-dire $p_{n+1} \geq 0,8$. La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : par principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,8$.

Partie A — 4.b Quelle communication l'entreprise peut-elle envisager à partir de ce résultat ?

En interprétant p_n comme la proportion de trottinettes en bon état, l'entreprise peut communiquer sur le fait qu'au moins 80 % de son parc reste en permanence en bon état, quelle que soit la semaine considérée.

Partie A — 5.a On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = p_n - 0,8$. Montrer que (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = (0,5p_n + 0,4) - 0,8 = 0,5p_n - 0,4 = 0,5(p_n - 0,8) = 0,5 u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0,5$, de premier terme $u_0 = p_0 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$.

Partie A — 5.b En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n .

D'après la forme explicite d'une suite géométrique : $u_n = u_0 \times q^n = 0,2 \times 0,5^n$ pour tout entier naturel n . Comme $p_n = u_n + 0,8$, on obtient $p_n = 0,2 \times 0,5^n + 0,8$.

Partie A — 5.c En déduire la limite de la suite (p_n) .

La raison 0,5 est strictement comprise entre -1 et 1 , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0 + 0,8 = 0,8$.

Partie B — 1. On modélise désormais l'état des trottinettes du parc par une probabilité de bon état égale à 0,8, indépendamment d'une trottinette à l'autre. On note X le nombre de trottinettes en bon état dans un lot de 15, ce prélèvement pouvant être assimilé à un tirage avec remise. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

On répète 15 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve à deux issues (« la trottinette est en bon état », de probabilité 0,8) : X compte le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(15 ; 0,8)$.

Partie B — 2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes du lot soient toutes en bon état.

$$P(X = 15) = 0,8^{15} \approx \mathbf{0,0352} \text{ (arrondi au dix-millième).}$$

Partie B — 3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes du lot soient en bon état.

$$\text{À la calculatrice, } P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx \mathbf{0,9389} \text{ (arrondi au dix-millième).}$$

Partie B — 4. On admet que $E(X) = 12$. Interpréter ce résultat.

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$, on a $E(X) = np = 15 \times 0,8 = 12$. Cela signifie qu'en moyenne, sur un grand nombre de lots de 15 trottinettes prélevées dans le parc, 12 d'entre elles sont en bon état.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Une chaîne de télévision hésite à programmer un jeu réunissant quatre candidats en deux phases : une phase de qualification où chaque candidat est qualifié avec une probabilité de 0,6 indépendamment des autres, puis une phase finale qui n'a lieu que si au moins deux candidats sont qualifiés, et dont la durée (en minutes) dépend du nombre de qualifiés selon le tableau : 0 qualifié $\rightarrow$ 0 min, 1 $\rightarrow$ 0 min, 2 $\rightarrow$ 5 min, 3 $\rightarrow$ 9 min, 4 $\rightarrow$ 11 min. Le jeu n'est retenu que si la phase finale a lieu dans au moins 80 % des cas ET si sa durée moyenne ne dépasse pas 6 minutes. Le jeu peut-il être retenu ?

Condition 1. Chaque candidat est qualifié ou non de façon indépendante avec la même probabilité 0,6 : en notant X le nombre de candidats qualifiés parmi les quatre, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4 ; 0,6)$.

La phase finale a lieu dès que $X \geq 2$. À la calculatrice, $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0,0256 - 0,1536 \approx 0,821$.

Comme $0,821 \geq 0,8$, la condition 1 est vérifiée.

Condition 2. Notons T la variable aléatoire égale à la durée de la phase finale ; elle prend les valeurs 0, 5, 9 et 11.

$$P(T = 11) = P(X = 4) = 0,6^4 \approx 0,1296 ; P(T = 9) = P(X = 3) = \binom{4}{3} \times 0,6^3 \times 0,4 \approx 0,3456 ;$$

$$P(T = 5) = P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,6^2 \times 0,4^2 \approx 0,3456 ; P(T = 0) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0,0256 + 0,1536 = 0,1792.$$

L'espérance de T vaut $E(T) = 0 \times 0,1792 + 5 \times 0,3456 + 9 \times 0,3456 + 11 \times 0,1296 = 1,728 + 3,1104 + 1,4256 = 6,264$ minutes.

Comme $6,264 > 6$, la durée moyenne dépasse 6 minutes : la condition 2 n'est **pas** vérifiée.

Donc, la réponse est : la condition 1 est remplie mais pas la condition 2, donc **le jeu ne peut pas être retenu** en l'état.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 1)

Partie A — 1. Un télévendeur relance une personne au premier appel : la probabilité qu'elle ne décroche pas vaut 0,6, et si elle décroche, la probabilité qu'elle achète vaut 0,3. Si elle n'a pas décroché, on tente un second appel : la probabilité qu'elle ne décroche toujours pas vaut 0,3, et si elle décroche cette fois, la probabilité d'achat vaut 0,2. On note D_1 , D_2 et A les événements « décroche au 1er appel », « décroche au 2e appel » et « achète le produit ». Compléter l'arbre pondéré.

L'arbre comporte deux niveaux : sur la première branche, $P(D_1) = 0,4$ et $P(\overline{D_1}) = 0,6$, avec $P_{D_1}(A) = 0,3$ et $P_{D_1}(\overline{A}) = 0,7$; sur la seconde branche (issue de $\overline{D_1}$), $P_{\overline{D_1}}(D_2) = 0,7$ et $P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) = 0,3$, avec $P_{\overline{D_1} \cap D_2}(A) = 0,2$ et $P_{\overline{D_1} \cap D_2}(\overline{A}) = 0,8$.

Partie A — 2. En utilisant l'arbre, montrer que $P(A) = 0,204$.

D'après la formule des probabilités totales, l'achat se produit soit dès le premier appel, soit après le second : $P(A) = P(D_1 \cap A) + P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap A) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \times 0,2 = 0,12 + 0,084 = \mathbf{0,204}$.

Partie A — 3. Sachant que la personne a acheté le produit, quelle est la probabilité qu'elle ait décroché dès le premier appel ?

Il s'agit de calculer $P_A(D_1) = \frac{P(D_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{0,4 \times 0,3}{0,204} = \frac{0,12}{0,204} \approx \mathbf{0,588}$.

Partie B — 1.a On prélève un échantillon aléatoire de 30 personnes ; X compte le nombre d'entre elles qui achètent le produit (on admet l'indépendance des situations). Donner, sans justification, la loi suivie par X et ses paramètres.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,204$.

Partie B — 1.b Déterminer, au millième près, la probabilité que 6 personnes exactement de l'échantillon achètent le produit.

$$P(X = 6) = \binom{30}{6} \times 0,204^6 \times (1 - 0,204)^{30-6} \approx \mathbf{0,179}.$$

Partie B — 1.c Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

$E(X) = np = 30 \times 0,204 = \mathbf{6,12}$. Cela signifie que, sur un grand nombre d'échantillons de 30 personnes contactées, le nombre d'acheteurs est en moyenne de 6,12 par échantillon.

Partie B — 2. Pour un échantillon de n personnes, déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins une personne achète le produit soit supérieure ou égale à 0,99.

Notons toujours X le nombre d'acheteurs parmi les n personnes, de loi binomiale de paramètres n et $p = 0,204$. On veut le plus petit n tel que $P(X \geq 1) \geq 0,99$, c'est-à-dire $1 - P(X = 0) \geq 0,99$, soit $P(X = 0) \leq 0,01$.

Or $P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,204^0 \times (1 - 0,204)^n = 0,796^n$. L'inéquation devient $0,796^n \leq 0,01$.

En passant au logarithme népérien (croissant) : $n \ln(0,796) \leq \ln(0,01)$, puis, comme $\ln(0,796) < 0$, on divise en changeant le sens de l'inégalité : $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)} \approx 20,18$.

Le plus petit entier convenable est donc $n = 21$ (on vérifie que $n = 20$ donne $P(X \geq 1) \approx 0,9896 < 0,99$, tandis que $n = 21$ donne $P(X \geq 1) \approx 0,9917 \geq 0,99$).

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 2)

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère le point $A(1; 1; 0)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, ainsi que la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Déterminer une représentation paramétrique de (d) .

Un point $M(x; y; z)$ appartient à (d) si et seulement si $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ pour un certain réel t , ce qui donne la représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 4y + 2z + 1 = 0$. Justifier que la droite (d) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un point B de coordonnées $(1; -1; 1)$.

En substituant les coordonnées paramétriques de (d) dans l'équation de $\mathcal{P}$: $1 + 4(1 + 2t) + 2(-t) + 1 = 0$, soit $1 + 4 + 8t - 2t + 1 = 0$, c'est-à-dire $6t + 6 = 0$, d'où $t = -1$.

En reportant $t = -1$ dans la représentation paramétrique de (d) : $x = 1$, $y = 1 - 2 = -1$, $z = 1$. Le système admet donc une unique solution, ce qui montre que (d) et $\mathcal{P}$ sont sécants, au point $B(1; -1; 1)$.

3.a On considère le point C(1 ; -1 ; -1). Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ont la même première et la même deuxième coordonnée mais des troisièmes coordonnées différentes ($1 \neq -1$) : ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et définissent bien un plan (ABC).

3.b Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

On calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 0 + 0 \times (-2) + 0 \times 1 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 0 + 0 \times (-2) + 0 \times (-1) = 0$. Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il lui est normal.

3.c Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Le plan (ABC) admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal, donc une équation de la forme $x + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$. Comme A(1 ; 1 ; 0) appartient au plan : $1 + d = 0$, soit $d = -1$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $x - 1 = 0$.

4.a Justifier que le triangle ABC est isocèle en A.

On a $AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 0^2 + (-2)^2 + 1^2 = 5$ et $AC^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2 = 5$. Donc $AB^2 = AC^2$, c'est-à-dire $AB = AC$: le triangle ABC est isocèle en A.

4.b Soit H le milieu du segment [BC]. Calculer la longueur AH puis l'aire du triangle ABC.

Les coordonnées de H sont la moyenne de celles de B et C : $H \left(\frac{1+1}{2} ; \frac{-1-1}{2} ; \frac{1-1}{2} \right)$, soit H(1 ; -1 ; 0).

On obtient $AH^2 = (1-1)^2 + (-1-1)^2 + (0-0)^2 = 4$, d'où $AH = 2$.

Le triangle ABC étant isocèle en A, la médiane issue de A est aussi la hauteur relative au côté [BC], donc $\mathcal{A}(ABC) = \frac{BC \times AH}{2}$. Or $BC^2 = (1-1)^2 + (-1+1)^2 + (-1-1)^2 = 4$, d'où $BC = 2$.

Donc, la réponse est $\mathcal{A}(ABC) = \frac{2 \times 2}{2} = 2$ unité d'aire.

5.a Soit D le point de coordonnées (0 ; -1 ; 1). Montrer que la droite (BD) est une hauteur de la pyramide ABCD.

On calcule $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BD} = -\vec{n}$. Comme $\vec{n}$ est normal au plan (ABC), $\overrightarrow{BD}$ l'est aussi : la droite (BD), orthogonale au plan de base (ABC) et passant par le sommet D, est donc bien une hauteur de la pyramide ABCD.

5.b En déduire le volume de la pyramide ABCD (on rappelle que le volume d'une pyramide vaut $V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée).

On prend pour base le triangle (ABC), d'aire $\mathcal{A}(ABC) = 2$, et pour hauteur la longueur BD.

$$BD^2 = \|\overrightarrow{BD}\|^2 = (-1)^2 + 0^2 + 0^2 = 1, \text{ donc } BD = 1.$$

Donc, la réponse est $V(ABCD) = \frac{1}{3} \times 2 \times 1 = \frac{2}{3}$ unité de volume.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 1)

1. On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1, muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Donner les coordonnées des points E, C et G dans ce repère.

En suivant les arêtes du cube depuis A : E $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et G $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: c'est un vecteur directeur de la droite (EC), qui passe par E(0 ; 0 ; 1).

Donc, la réponse est : (EC) a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

3. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

Les points G, B, D ne sont pas alignés, donc (GBD) est un plan, dirigé par exemple par $\overrightarrow{GB} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{GB} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) = 0 - 1 + 1 = 0, \text{ donc } \overrightarrow{EC} \perp \overrightarrow{GB}.$$

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + (-1) \times 0 = -1 + 1 + 0 = 0, \text{ donc } \overrightarrow{EC} \perp \overrightarrow{BD}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (GBD), donc la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).

4.a Justifier qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est $x + y - z - 1 = 0$.

Comme (EC) est orthogonale à (GBD), tout vecteur directeur de (EC) est un vecteur normal à (GBD); en particulier $\overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient.

Le plan (GBD) a donc une équation de la forme $x + y - z + d = 0$. En écrivant que B(1 ; 0 ; 0) appartient à ce plan : $1 + 0 - 0 + d = 0$, donc $d = -1$.

Donc, la réponse est : le plan (GBD) a pour équation $x + y - z - 1 = 0$.

4.b Montrer que le point I, intersection de (EC) et (GBD), a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Les coordonnées de I vérifient à la fois la représentation paramétrique de (EC) et l'équation de (GBD) : $x = t, y = t, z = 1 - t$ et $x + y - z - 1 = 0$.

$$\text{En substituant : } t + t - (1 - t) - 1 = 0 \iff 3t - 2 = 0 \iff t = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Donc, la réponse est : } I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right), \text{ car } x_I = t = \frac{2}{3}, y_I = t = \frac{2}{3} \text{ et } z_I = 1 - t = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

4.c En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

La droite (EC) étant orthogonale au plan (GBD) et le coupant en I, la distance de E au plan (GBD) est la longueur EI.

$$EI^2 = \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

$$EI = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \text{ Donc, la réponse est : la distance de E au plan (GBD) vaut } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

5.a Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.

Les segments [BD], [DG] et [GB] sont chacun la diagonale d'une face du cube (respectivement ABCD, CDHG et BCGF), qui sont trois carrés de même côté 1, donc superposables. Leurs diagonales ont donc toutes la même longueur $\sqrt{2}$: le triangle BDG, ayant ses trois côtés égaux, est équilatéral.

5.b Calculer l'aire du triangle BDG, en utilisant le point J milieu de [BD].

Dans un triangle équilatéral, la médiane issue d'un sommet est aussi la hauteur : [GJ] est donc la hauteur issue de G, et l'aire du triangle vaut $\mathcal{A} = \frac{BD \times GJ}{2}$.

B(1 ; 0 ; 0) et D(0 ; 1 ; 0) donnent J $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 0\right)$, milieu de [BD].

$$GJ^2 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (0 - 1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}, \text{ donc } GJ = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

[BD] est la diagonale d'un carré de côté 1, donc $BD = \sqrt{2}$.

$$\text{Donc, la réponse est : } \mathcal{A} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6. Justifier que le volume du tétraèdre EGBD est égal à $\frac{1}{3}$.

En prenant le triangle BDG comme base, d'aire $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et EI comme hauteur associée (E est le sommet opposé, et EI est la distance de E au plan de la base), le volume vaut $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times EI = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 3}{6} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$. Donc, la réponse est : le volume du tétraèdre EGBD vaut $\frac{1}{3}$.

Brevet 2022 — Nouvelle-Calédonie

1. Dans un tableur, les cellules A1, B1 et C1 contiennent des nombres. Quelle formule saisie en D1 affiche leur somme ?

C'est la formule « =SOMME(A1 :C1) » qui additionne le contenu des cellules de A1 à C1.

2. Une série de six nombres est 15 ; 10 ; 13 ; 9 ; 10 ; x. Pour quelle valeur de x la moyenne de la série vaut-elle 11 ?

$$\text{La moyenne s'écrit } \frac{15 + 10 + 13 + 9 + 10 + x}{6} = \frac{57 + x}{6}.$$

$$\text{On résout } \frac{57 + x}{6} = 11, \text{ soit } 57 + x = 66, \text{ d'où } x = 9.$$

3. Sur la Terre, l'équateur est-il un méridien, un demi-cercle ou un parallèle ?

L'équateur est un cercle qui entoure la Terre perpendiculairement à l'axe des pôles : **c'est un parallèle** (les méridiens, eux, passent par les pôles).

4. Quel est le volume exact, en cm^3 , d'une boule de 6 cm de diamètre ? (rappel : $V = \frac{4\pi R^3}{3}$)

Un diamètre de 6 cm correspond à un rayon $R = 3$ cm.

$$V = \frac{4\pi \times 3^3}{3} = \frac{4\pi \times 27}{3} = 4\pi \times 9 = 36\pi \text{ cm}^3.$$

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 1)

Partie A — 1.a Chaque jour travaillé, Paul rejoint la gare à vélo avec probabilité $\frac{2}{3}$, sinon en voiture. À vélo, il rate son train avec probabilité $\frac{1}{50}$; en voiture, avec probabilité $\frac{1}{10}$. On note V l'évènement « Paul prend son vélo » et R l'évènement « Paul rate son train ». Représenter la situation par un arbre pondéré.

L'arbre part de la racine avec les branches V (probabilité $\frac{2}{3}$) et $\bar{V}$ (probabilité $\frac{1}{3}$) ; sous V , les branches R ($\frac{1}{50}$) et $\bar{R}$ ($\frac{49}{50}$) ; sous $\bar{V}$, les branches R ($\frac{1}{10}$) et $\bar{R}$ ($\frac{9}{10}$).

Partie A — 1.b Montrer que la probabilité que Paul rate son train vaut $\frac{7}{150}$.

D'après la formule des probabilités totales : $P(R) = P(V) \times P_V(R) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{150} + \frac{5}{150} = \frac{7}{150}$.

Partie A — 1.c Sachant que Paul a raté son train, déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo.

$$P_{R(V)} = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{50}}{\frac{7}{150}} = \frac{\frac{2}{150}}{\frac{7}{150}} = \frac{2}{7}.$$

Partie A — 2.a Sur un mois, Paul se rend 20 fois à la gare selon les mêmes modalités, les choix des différents jours étant indépendants. X compte le nombre de jours où il prend son vélo. Déterminer la loi suivie par X et ses paramètres.

La répétition de 20 épreuves identiques et indépendantes à deux issues (vélo ou non, avec probabilité $\frac{2}{3}$ de prendre le vélo) est un schéma de Bernoulli répété : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{3}$, notée $X \sim \mathcal{B}\left(20 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 2.b Calculer la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur les 20 (arrondi au millième).

$$P(X = 10) = \binom{20}{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \approx \mathbf{0,054} \text{ (à la calculatrice).}$$

Partie A — 2.c Calculer la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur les 20 (arrondi au millième).

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx \mathbf{0,962} \text{ (à la calculatrice).}$$

Partie A — 2.d En moyenne, sur une période de 20 jours, combien de fois Paul prend-il son vélo pour rejoindre la gare (arrondi à l'entier) ?

L'espérance de X vaut $E(X) = np = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} \approx 13,33$. En moyenne, Paul prend donc son vélo environ **13** jours sur 20.

Partie A — 3. Quand Paul se rend à la gare en voiture, le temps de trajet T (en minutes, arrondi à la minute) suit la loi donnée par le tableau : k de 10 à 18 minutes avec $P(T = k)$ valant respectivement 0,14 ; 0,13 ; 0,13 ; 0,12 ; 0,12 ; 0,11 ; 0,10 ; 0,08 ; 0,07. Déterminer l'espérance de T et l'interpréter.

$$E(T) = 10 \times 0,14 + 11 \times 0,13 + 12 \times 0,13 + 13 \times 0,12 + 14 \times 0,12 + 15 \times 0,11 + 16 \times 0,10 + 17 \times 0,08 + 18 \times 0,07 = 13,5.$$

Donc, sur un grand nombre de trajets en voiture, la durée moyenne du trajet est de **13,5 minutes**, soit 13 minutes et 30 secondes.

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 2)

Partie 1 — 1. Julien doit prendre l'avion et a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport. S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'arriver à temps ; sinon, il ne peut plus arriver à temps. On note B l'évènement « Julien réussit à prendre son bus », de probabilité $P(B) = 0,2$, et V l'évènement « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ». Donner la valeur de $P_B(V)$.

S'il réussit à prendre son bus, Julien est certain d'être à l'heure à l'aéroport pour son vol. Donc, la réponse est $P_B(V) = 1$.

Partie 1 — 2. S'il manque son bus, Julien prend une compagnie de voitures privées, avec une probabilité 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport. Représenter la situation par un arbre pondéré.

On représente un arbre à deux niveaux : le premier niveau donne les branches B (probabilité 0,2) et $\overline{B}$ (probabilité $1 - 0,2 = 0,8$).

Depuis B partent les branches V (probabilité 1, puisque $P_B(V) = 1$) et $\bar{V}$ (probabilité 0).

Depuis $\bar{B}$ partent les branches V (probabilité 0,5) et $\bar{V}$ (probabilité 0,5).

Partie 1 — 3. Montrer que $P(V) = 0,6$.

D'après la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'évènements $\{B, \bar{B}\}$:

$$P(V) = P(B \cap V) + P(\bar{B} \cap V) = P(B) \times P_B(V) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(V).$$

$$P(V) = 0,2 \times 1 + 0,8 \times 0,5 = 0,2 + 0,4 = 0,6.$$

Donc, la réponse est $P(V) = 0,6$.

Partie 1 — 4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ?

$$\text{On cherche } P_V(B) = \frac{P(V \cap B)}{P(V)} = \frac{P(B \cap V)}{P(V)} = \frac{0,2 \times 1}{0,6} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}.$$

Donc, la réponse est $P_V(B) = \frac{1}{3}$.

Partie 2 — 1. Une compagnie aérienne pratique le surbooking : chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement, indépendamment des autres. Pour un vol de 200 places où 206 billets ont été vendus, on note X la variable aléatoire comptant le nombre de passagers se présentant à l'embarquement. Justifier que X suit une loi binomiale, en précisant ses paramètres.

On répète 206 fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues : « le passager se présente » (probabilité $1 - 0,05 = 0,95$) ou « le passager ne se présente pas » (probabilité 0,05). X compte le nombre de succès.

Donc, la réponse est que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 206$ et $p = 0,95$.

Partie 2 — 2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?

L'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p vaut $n \times p$, donc $E(X) = 206 \times 0,95 = 195,7$.

Donc, la réponse est qu'en moyenne, environ 196 passagers se présentent à l'embarquement.

Partie 2 — 3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement, arrondie à 10^{-3} près.

$$P(X = 201) = \binom{206}{201} \times 0,95^{201} \times 0,05^5.$$

Donc, la réponse est $P(X = 201) \approx 0,031$ (à 10^{-3} près).

Partie 2 — 4. Calculer $P(X \leq 200)$, arrondi à 10^{-3} près, puis interpréter ce résultat.

La calculatrice donne $P(X \leq 200) \approx 0,948$ (à 10^{-3} près).

Donc, la réponse est qu'il y a environ 94,8 % de chances qu'au plus 200 passagers se présentent, c'est-à-dire que tous les passagers présents puissent embarquer : il est donc très probable que l'avion ne soit pas en surcapacité.

Partie 2 — 5.a Chaque billet coûte 250 €. Si plus de 200 passagers se présentent, la compagnie doit rembourser le billet et payer une pénalité de 600 € à chaque passager lésé. On note Y le nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ; sa loi de probabilité est donnée par $P(Y=0) = 0,94775$, $P(Y=1) = 0,03063$, $P(Y=2) = 0,01441$, $P(Y=3) = 0,00539$, $P(Y=4) = 0,00151$, $P(Y=5) = 0,00028$. Compléter la loi de probabilité en calculant $P(Y = 6)$.

Y ne peut prendre que les valeurs 0 à 6 (au maximum $206 - 200 = 6$ passagers surnuméraires), et la somme de toutes les probabilités d'une loi vaut 1.

$$P(Y = 6) = 1 - (P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) + P(Y=5)).$$

$$P(Y = 6) = 1 - (0,94775 + 0,03063 + 0,01441 + 0,00539 + 0,00151 + 0,00028) = 1 - 0,99997 = 0,00003.$$

Donc, la réponse est $P(Y = 6) = 0,00003$.

Partie 2 — 5.b Justifier que $C = 51\,500 - 850Y$, où C est le chiffre d'affaires de la compagnie sur ce vol.

La compagnie encaisse d'abord la vente des 206 billets, soit $206 \times 250 = 51\,500$ €.

Pour chacun des Y passagers ne pouvant pas embarquer, elle doit rembourser le billet (250 €) et verser une pénalité de 600 €, soit $250 + 600 = 850$ € par passager lésé, donc un total de $850Y$ € à déduire.

Donc, la réponse est $C = 51\,500 - 850Y$.

Partie 2 — 5.c Donner la loi de probabilité de C sous forme d'un tableau, puis calculer l'espérance de C à l'euro près.

D'après la relation $C = 51\,500 - 850Y$ et la loi de Y , on obtient les valeurs suivantes : $c_0 = 51\,500$, $c_1 = 50\,650$, $c_2 = 49\,800$, $c_3 = 48\,950$, $c_4 = 48\,100$, $c_5 = 47\,250$, $c_6 = 46\,400$ (chacune avec la même probabilité que la valeur y_i correspondante de Y).

Par linéarité de l'espérance, $E(C) = 51\,500 - 850 \times E(Y)$, ou directement $E(C) = \sum_i c_i \times P(Y=y_i)$.

$$E(C) \approx 51\,500 \times 0,94775 + 50\,650 \times 0,03063 + 49\,800 \times 0,01441 + 48\,950 \times 0,00539 + 48\,100 \times 0,00151 + 47\,250 \times 0,00028 + 46\,400 \times 0,00003 \approx 51\,429,25.$$

Donc, la réponse est $E(C) \approx 51\,429$ € (à l'euro près).

Partie 2 — 5.d Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

En vendant exactement 200 billets (sans risque de pénalité), la compagnie réalise un chiffre d'affaires de $200 \times 250 = 50\,000$ €.

En pratiquant le surbooking à 206 billets, elle peut espérer un chiffre d'affaires moyen de 51 429 € (question précédente), soit 1 429 € de plus.

Donc, la réponse est que le surbooking est en moyenne plus avantageux pour la compagnie que la vente de 200 billets seulement.

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

Partie A — 1. Lors de la fabrication d'une paire de lunettes, la paire de verres subit deux traitements T1 et T2. On prélève au hasard une paire de verres dans la production et on note A l'évènement « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 » et B l'évènement « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 ». On donne $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,2$, et la probabilité qu'une paire ne présente aucun des deux défauts est 0,75. Recopier et compléter le tableau à double entrée des probabilités (lignes $B/\bar{B}$, colonnes $A/\bar{A}$).

On sait que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,75$, donc, comme la ligne « Total » vaut 1, $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,2 = 0,8$ et $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,1 = 0,9$.

Dans la ligne $\bar{B}$, la case $A \cap \bar{B}$ vaut donc $P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,8 - 0,75 = 0,05$.

Dans la colonne A , le total vaut $P(A) = 0,1$, donc la case $A \cap B$ vaut $0,1 - 0,05 = 0,05$.

Dans la ligne B , la case $\bar{A} \cap B$ vaut $P(B) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,05 = 0,15$; on vérifie que la colonne $\bar{A}$ totalise bien $0,15 + 0,75 = 0,9 = P(\bar{A})$.

Le tableau complété est donc : ligne B : 0,05 (A), 0,15 ($\bar{A}$), 0,2 (total); ligne $\bar{B}$: 0,05 (A), 0,75 ($\bar{A}$), 0,8 (total); ligne Total : 0,1, 0,9, 1.

Partie A — 2.a Déterminer, en justifiant, la probabilité qu'une paire de verres prélevée au hasard présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.

L'évènement « la paire présente un défaut pour au moins un des deux traitements » est l'évènement $A \cup B$, contraire de l'évènement « la paire ne présente aucun des deux défauts », c'est-à-dire $\bar{A} \cap \bar{B}$.

Donc $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,75 = 0,25$.

Partie A — 2.b Donner la probabilité qu’une paire de verres prélevée au hasard présente deux défauts, un pour chaque traitement T1 et T2.

D’après le tableau de la question 1, la probabilité que la paire présente les deux défauts à la fois est directement lue dans la case $A \cap B$: $P(A \cap B) = 0,05$.

Partie A — 2.c Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

Si A et B étaient indépendants, on aurait $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or $P(A) \times P(B) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$, alors que $P(A \cap B) = 0,05$ (question précédente).

Comme $0,02 \neq 0,05$, les évènements A et B ne sont donc pas indépendants.

Partie A — 3. Calculer la probabilité qu’une paire de verres prélevée au hasard présente un défaut pour un seul des deux traitements.

Présenter un défaut pour un seul des deux traitements correspond à l’évènement $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, réunion de deux évènements incompatibles.

D’après le tableau de la question 1, $P(A \cap \overline{B}) = 0,05$ et $P(\overline{A} \cap B) = 0,15$.

Donc, la probabilité cherchée vaut $0,05 + 0,15 = 0,2$.

Partie A — 4. Calculer la probabilité qu’une paire de verres prélevée au hasard présente un défaut pour le traitement T2, sachant qu’elle présente un défaut pour le traitement T1.

Il s’agit de calculer la probabilité conditionnelle $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$$P_A(B) = \frac{0,05}{0,1} = 0,5.$$

Partie B — 1. On prélève au hasard un échantillon de 50 paires de verres, assimilé à un tirage avec remise vu la taille de la production. X est la variable aléatoire comptant, dans un tel échantillon, le nombre de paires présentant un défaut pour le traitement T1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

Le prélèvement est assimilé à la répétition de 50 tirages indépendants et identiques, chacun ayant deux issues : la paire présente le défaut T1 (probabilité $P(A) = 0,1$) ou non.

X compte le nombre de succès (le défaut T1) parmi ces 50 répétitions indépendantes d’une même épreuve de Bernoulli : X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$, notée $X \sim \mathcal{B}(50 ; 0,1)$.

Partie B — 2. Donner l'expression permettant de calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, exactement 10 paires de verres présentant ce défaut. Effectuer ce calcul et arrondir le résultat à 10^{-3} .

$$P(X = 10) = \binom{50}{10} \times 0,1^{10} \times 0,9^{40}.$$

La calculatrice donne $P(X = 10) \approx \mathbf{0,015}$ au millième près.

Partie B — 3. En moyenne, combien de paires de verres présentant ce défaut peut-on trouver dans un échantillon de 50 paires ?

Le nombre moyen de paires présentant le défaut correspond à l'espérance de X , qui vaut $E(X) = n \times p = 50 \times 0,1 = 5$.

Donc, en moyenne, on trouve **5** paires de verres présentant ce défaut dans un échantillon de 50 paires.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

1. Le directeur d'une grande entreprise a proposé à tous ses salariés un stage de formation à un nouveau logiciel, suivi par 25 % des salariés. Parmi les 52 % de femmes de l'entreprise, 40 % ont suivi le stage. On interroge au hasard un salarié et on note F l'évènement « le salarié interrogé est une femme » et S l'évènement « le salarié interrogé a suivi le stage ». **a.** Donner la probabilité de l'évènement S .

L'énoncé indique directement que le stage a été suivi par 25 % des salariés interrogés au hasard, donc $P(S) = 0,25$.

1.b Recopier et compléter les branches de l'arbre pondéré associé aux évènements F et S .

L'arbre part de la racine avec les branches F (probabilité 0,52) et $\overline{F}$ (probabilité $1 - 0,52 = 0,48$) ; sous F , les branches S (probabilité 0,40, donnée par l'énoncé) et $\overline{S}$ (probabilité $1 - 0,40 = 0,60$) ; sous $\overline{F}$, les branches S et $\overline{S}$ (probabilités encore inconnues à ce stade).

1.c Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage vaut **0,208**.

On cherche $P(F \cap S)$. D'après la formule des probabilités composées : $P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0,52 \times 0,40 = 0,208$.

1.d Sachant que la personne interrogée a suivi le stage, quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

On cherche $P_S(F) = \frac{P(S \cap F)}{P(S)} = \frac{0,208}{0,25} = 0,832$. Donc, la probabilité que ce soit une femme sachant qu'elle a suivi le stage vaut **0,832**.

1.e Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés, moins de 10 % ont suivi le stage. Justifier cette affirmation.

D'après la formule des probabilités totales appliquée à S : $P(S) = P(S \cap F) + P(S \cap \bar{F})$, donc $P(S \cap \bar{F}) = P(S) - P(S \cap F) = 0,25 - 0,208 = 0,042$.

On cherche $P_{\bar{F}}(S) = \frac{P(S \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{0,042}{0,48} = 0,0875$.

Comme $0,0875 < 0,1$, l'affirmation du directeur est vérifiée : moins de 10 % des hommes salariés ont suivi le stage.

2.a On note X la variable aléatoire qui, à un échantillon de 20 salariés choisis au hasard, associe le nombre d'entre eux ayant suivi le stage (l'effectif de l'entreprise est assez grand pour assimiler ce choix à un tirage avec remise). Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par X .

Choisir 20 salariés indépendamment, chacun ayant suivi ou non le stage avec la même probabilité $p = P(S) = 0,25$ (tirage assimilé à un tirage avec remise), constitue la répétition de 20 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. X compte le nombre de succès (« a suivi le stage ») : X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$, notée $X \sim \mathcal{B}(20 ; 0,25)$.

2.b Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

$P(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,25^5 \times 0,75^{15} \approx 0,202$ (à la calculatrice). Donc, la probabilité que 5 salariés exactement aient suivi le stage vaut environ **0,202**.

2.c On donne un programme Python qui utilise la fonction 'binomiale(i, n, p)' renvoyant $P(X = i)$ pour $X \sim \mathcal{B}(n ; p)$: 'def proba(k) : ' puis ' $P = 0$ ', 'for i in range(0, k+1) : $P = P + \text{binomiale}(i, 20, 0.25)$ ', 'return P'. Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par 'proba(5)', et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

La boucle 'for i in range(0, k+1)' cumule les probabilités $P(X = i)$ pour i allant de 0 à k inclus. Donc 'proba(5)' calcule $P(X \leq 5) = \sum_{i=0}^5 P(X = i)$. À la calculatrice, $P(X \leq 5) \approx 0,617$. Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'il y a environ **61,7 % de chances qu'au plus 5 salariés, sur un échantillon de 20, aient suivi le stage.**

2.d Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

L'évènement « au moins 6 salariés ont suivi le stage » est l'évènement contraire de « au plus 5 salariés ont suivi le stage ». Donc $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 1 - 0,617 = 0,383$. Donc, **la probabilité qu'au moins 6 salariés sur 20 aient suivi le stage vaut environ 0,383.**

3. Cette question est indépendante des précédentes. Pour inciter les salariés à se former, l'entreprise a décidé d'augmenter de 5 % le salaire des salariés ayant suivi le stage, et de 2 % celui des salariés ne l'ayant pas suivi. Quel est le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de l'entreprise dans ces conditions ?

Le pourcentage moyen d'augmentation dépend en réalité de la répartition des salaires entre les deux catégories de salariés (ceux ayant suivi le stage et les autres), et pas seulement des proportions de salariés (25 % et 75 %). Illustrons avec deux répartitions différentes de la masse salariale, à effectifs identiques (25 salariés ayant suivi le stage, 75 ne l'ayant pas suivi, sur un échantillon de 100).

Premier cas : les 25 salariés formés touchent 1000 € et les 75 autres touchent 1200 €. La masse salariale totale avant augmentation est $25 \times 1000 + 75 \times 1200 = 115\,000$ €, soit un salaire moyen de 1150 €. Après augmentation, la masse salariale devient $25 \times 1000 \times 1,05 + 75 \times 1200 \times 1,02 = 118\,050$ €, soit un salaire moyen de 1180,50 €. Le coefficient multiplicateur moyen est $\frac{1180,50}{1150} \approx 1,0265$, soit une augmentation moyenne d'environ **2,65 %**.

Deuxième cas : les 25 salariés formés touchent 1200 € et les 75 autres touchent 1000 €. La masse salariale totale avant augmentation est $25 \times 1200 + 75 \times 1000 = 105\,000$ €, soit un salaire moyen de 1050 €. Après augmentation, la masse salariale devient $25 \times 1200 \times 1,05 + 75 \times 1000 \times 1,02 = 108\,000$ €, soit un salaire moyen de 1080 €. Le coefficient multiplicateur moyen est $\frac{1080}{1050} \approx 1,0286$, soit une augmentation moyenne d'environ **2,86 %**.

Les deux répartitions donnent des pourcentages moyens différents (2,65 % contre 2,86 %) alors que les proportions de salariés formés (25 %) et non formés (75 %) sont identiques. Donc, **le pourcentage moyen d'augmentation ne peut pas être déterminé avec les seules données de l'énoncé : il dépend de la répartition des salaires entre les deux groupes.**

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

Partie 1 — Stéphanie s'entraîne au basket-ball. Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points, et parmi eux 60 % sont réussis; les trois quarts restants sont des tirs à trois points, et parmi eux 35 % sont réussis. Elle réalise un tir; on note D l'évènement « le tir choisi est un tir à deux points » et R l'évènement « le tir est réussi ». 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

L'arbre part de la racine avec les branches D (probabilité 0,25) et $\overline{D}$ (probabilité 0,75). Sur la branche D , les sous-branches sont R (probabilité 0,6) et $\overline{R}$ (probabilité 0,4). Sur la branche $\overline{D}$, les sous-branches sont R (probabilité 0,35) et $\overline{R}$ (probabilité 0,65).

2. Calculer la probabilité $P(\overline{D} \cap R)$.

D'après la lecture de l'arbre : $P(\overline{D} \cap R) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(R) = 0,75 \times 0,35 = \mathbf{0,2625}$.

3. Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir quelconque est égale à 0,4125.

On calcule de même $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,25 \times 0,6 = 0,15$.

Les évènements D et $\overline{D}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(R) = P(D \cap R) + P(\overline{D} \cap R) = 0,15 + 0,2625 = \mathbf{0,4125}$, ce qui est le résultat annoncé.

4. Sachant que Stéphanie a réussi son tir, calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points (arrondir au centième).

D'après la définition de la probabilité conditionnelle : $P_R(\overline{D}) = \frac{P(R \cap \overline{D})}{P(R)} = \frac{0,2625}{0,4125}$.

On obtient $P_R(\overline{D}) \approx 0,6364$, soit, arrondi au centième, **0,64**.

Partie 2 — Stéphanie réalise une série de 10 tirs à trois points, supposés indépendants; on rappelle que la probabilité de réussir un tir à trois points vaut 0,35. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de tirs réussis. 1. Justifier que X suit une loi binomiale, et préciser ses paramètres.

Les 10 tirs sont indépendants et chacun n'a que deux issues possibles (réussi ou raté), avec la même probabilité de succès 0,35 à chaque tir : X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$.

2. Calculer l'espérance de X , et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour une loi binomiale, $E(X) = np = 10 \times 0,35 = \mathbf{3,5}$. Cela signifie que, si Stéphanie répète très souvent des séries de 10 tirs à trois points, elle réussira en moyenne 3,5 tirs par série.

3. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus sur cette série de 10 (arrondir au centième).

Rater 4 tirs ou plus sur 10, c'est en réussissant au plus $10 - 4 = 6$: l'évènement demandé correspond donc à $(X \leq 6)$.

À la calculatrice, avec X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$: $P(X \leq 6) \approx \mathbf{0,97}$.

4. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs sur cette série de 10 (arrondir au centième).

Rater au plus 4 tirs sur 10, c'est en réussissant au moins $10 - 4 = 6$: l'évènement demandé correspond donc à $(X \geq 6)$.

À la calculatrice : $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx \mathbf{0,09}$.

Partie 3 — Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points indépendants, avec n entier naturel non nul, la probabilité de réussir chaque tir restant égale à 0,35. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité qu'elle réussisse au moins un tir parmi les n soit supérieure ou égale à 0,99.

La probabilité de rater un tir donné vaut $1 - 0,35 = 0,65$. Comme les tirs sont indépendants, la probabilité de les rater tous les n vaut $0,65^n$.

La probabilité de réussir au moins un tir parmi les n est donc l'évènement contraire de « tout rater », de probabilité $1 - 0,65^n$.

On cherche le plus petit entier naturel non nul n tel que $1 - 0,65^n \geq 0,99$, c'est-à-dire $0,65^n \leq 0,01$.

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, cette inégalité équivaut à $\ln(0,65^n) \leq \ln(0,01)$, soit $n \ln(0,65) \leq \ln(0,01)$.

Comme $\ln(0,65) < 0$, diviser par $\ln(0,65)$ inverse le sens de l'inégalité : $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,65)}$.

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,65)} \approx 10,69$, donc le plus petit entier naturel qui convient est $n = 11$: Stéphanie doit prévoir une série d'au moins 11 tirs.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 2)

Partie 1 (première méthode) — On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1, muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$, K le centre du carré $ADHE$ et O le milieu du segment $[AG]$. On donne $I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 1\right)$ et $K\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$. Le but de l'exercice est de calculer, de deux manières différentes, la distance du point B au plan (AIG) . 1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A , B et G .

Le repère étant $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et le cube ayant pour arête 1, on lit directement : $A(0 ; 0 ; 0)$ (origine du repère), $B(1 ; 0 ; 0)$ et $G(1 ; 1 ; 1)$.

2. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG) .

Les points A , I , G ne sont pas alignés (I n'est ni sur (AG) , ni confondu avec A ou G), donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ forment une base du plan (AIG) .

On calcule les coordonnées : $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0,5-0 \\ 0,5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

Le repère étant orthonormé, on calcule les produits scalaires à l'aide des coordonnées : $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AI} = (-1) \times 0,5 + 0,5 \times 0 + 0,5 \times 1 = -0,5 + 0 + 0,5 = 0$.

De même, $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AG} = (-1) \times 1 + 0,5 \times 1 + 0,5 \times 1 = -1 + 0,5 + 0,5 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{BK}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AIG) : il est donc orthogonal à ce plan tout entier, donc la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG) .

3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est $2x - y - z = 0$.

D'après la question précédente, la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG) , donc tout vecteur directeur de (BK) est un vecteur normal à (AIG) . Le vecteur $\vec{n} = -2\overrightarrow{BK}$, de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, est donc normal à (AIG) .

Le plan (AIG) admet donc une équation cartésienne de la forme $2x - y - z + d = 0$, où d est un réel à déterminer.

Comme $A(0 ; 0 ; 0)$ appartient au plan (AIG) , ses coordonnées vérifient l'équation : $2 \times 0 - 0 - 0 + d = 0 \iff d = 0$.

Donc, la réponse est qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est bien $2x - y - z = 0$.

4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BK).

La droite (BK) passe par B(1 ; 0 ; 0) et est dirigée par $\overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

Donc, la réponse est que (BK) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0,5t \\ z = 0,5t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

5. En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées $L\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

On cherche la valeur du paramètre t pour laquelle le point de (BK) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$: d'après la représentation paramétrique, $1 - t = \frac{1}{3}$ donne $t = \frac{2}{3}$, et on vérifie que $0,5 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ pour les deux autres coordonnées. Le point L de coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ appartient donc bien à la droite (BK).

On vérifie aussi que L appartient au plan (AIG), d'équation $2x - y - z = 0$ (question 3) : $2 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$. Les coordonnées de L vérifient donc l'équation du plan.

Le point L appartient donc à la fois à la droite (BK) et au plan (AIG) : c'est le point d'intersection de cette droite et de ce plan. Comme (BK) est orthogonale à (AIG) (question 2), L est donc bien le projeté orthogonal de B sur le plan (AIG).

6. Déterminer la distance du point B au plan (AIG).

La distance de B au plan (AIG) est la distance BL, puisque L est le projeté orthogonal de B sur ce plan. Le repère étant orthonormé, on calcule cette distance à partir des coordonnées de B(1 ; 0 ; 0) et L $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$:

$$BL = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Donc, la réponse est que la distance du point B au plan (AIG) vaut $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Partie 2 (deuxième méthode) — On rappelle que le volume V d'une pyramide vaut $V = \frac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée. 1.a Justifier que, dans le tétraèdre ABIG, $[GF]$ est la hauteur relative à la base AIB.

Le triangle AIB est inclus dans le plan (ABF), qui est le plan contenant la face avant du cube ABFE (car A, I, B appartiennent tous trois à cette face, I étant le milieu de $[EF]$).

Comme ABCDEFGH est un cube, l'arête $[GF]$ est perpendiculaire à la face ABFE, donc perpendiculaire au plan (AIB). Le segment $[GF]$ joint le sommet G du tétraèdre au plan de la base AIB en formant un angle droit avec ce plan : c'est donc bien la hauteur du tétraèdre ABIG relative à la base AIB.

1.b En déduire le volume du tétraèdre ABIG.

Le triangle AIB a pour base $[AB]$, de longueur 1 (arête du cube), et pour hauteur associée la distance de I à la droite (AB), qui vaut ici 1 (même longueur que l'arête $[AE]$, puisque I est le milieu de $[EF]$ à la même hauteur que E et F). Son aire est donc $b_{AIB} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.

La hauteur du tétraèdre relative à cette base est $h_{GF} = GF = 1$ (arête du cube).

Donc, la réponse est $V_{ABIG} = \frac{1}{3} \times b_{AIB} \times h_{GF} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$.

2. On admet que $AI = IG = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et que $AG = \sqrt{3}$. Démontrer que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

Le triangle AIG est isocèle en I (car $AI = IG$), donc la hauteur issue de I est aussi la médiane issue de I : elle passe par le milieu O du côté $[AG]$, qui est précisément le point défini dans l'énoncé comme le milieu de $[AG]$.

On calcule la longueur IO à l'aide des coordonnées : $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ et O, milieu de $[AG]$ avec $A(0; 0; 0)$ et $G(1; 1; 1)$, a pour coordonnées $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

$$IO = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'aire du triangle AIG, dont $[AG]$ est la base et $[IO]$ la hauteur associée, vaut donc $A_{AIG} = \frac{AG \times IO}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Donc, la réponse est que l'aire du triangle AIG est bien $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

3. En déduire la distance du point B au plan (AIG).

On peut aussi calculer le volume du tétraèdre ABIG en considérant le triangle AIG comme base : la hauteur associée est alors la distance h du point B au plan (AIG), c'est-à-dire la distance cherchée.

D'après les questions précédentes, $V_{ABIG} = \frac{1}{6}$ et $A_{AIG} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, donc : $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times A_{AIG} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{4} \times h$.

On en déduit $h = \frac{1}{6} \times \frac{3 \times 4}{\sqrt{6}} = \frac{12}{6\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Donc, la réponse est que l'on retrouve bien la distance du point B au plan (AIG) égale à $\frac{\sqrt{6}}{3}$, ce qui confirme le résultat obtenu par la première méthode.

Brevet 2021 — Métropole, Antilles et Guyane

1. Un tableur donne les températures moyennes mensuelles relevées à Tours en 2019 (en °C) : J 4,4 ; F 7,8 ; M 9,6 ; A 11,2 ; M 13,4 ; J 19,4 ; J 22,6 ; A 20,5 ; S 17,9 ; O 14,4 ; N 8,2 ; D 7,8. Quelle était la température moyenne en novembre 2019 ?

D'après le tableau, le mois de novembre correspond à la valeur **8,2 °C**.

2. Déterminer l'étendue de cette série de températures.

L'étendue d'une série est la différence entre sa plus grande et sa plus petite valeur.

La température la plus élevée est 22,6 °C (juillet) et la plus basse est 4,4 °C (janvier).

L'étendue est donc $22,6 - 4,4 = \mathbf{18,2 \text{ °C}}$.

3. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule prévue pour la moyenne annuelle, afin qu'elle calcule automatiquement la moyenne des douze températures mensuelles ?

On peut saisir une formule utilisant la fonction moyenne du tableur, du type **=MOYENNE(...)** appliquée à la plage des douze cellules contenant les températures mensuelles (on pourrait aussi utiliser la fonction SOMME puis diviser par 12).

4. Vérifier que la température moyenne annuelle à Tours en 2019 est bien 13,1 °C.

En admettant que les mois ont sensiblement la même durée, la moyenne annuelle est la moyenne simple des 12 valeurs mensuelles.

$$\frac{4,4 + 7,8 + 9,6 + 11,2 + 13,4 + 19,4 + 22,6 + 20,5 + 17,9 + 14,4 + 8,2 + 7,8}{12} = \frac{157,2}{12} = 13,1.$$

On obtient bien **13,1 °C**, ce qui confirme la valeur annoncée.

5. En 2009, la température moyenne annuelle à Tours était de 11,9 °C. Le pourcentage d'augmentation entre 2009 et 2019, arrondi à l'unité, est-il de 7 %, 10 % ou 13 % ?

Le taux d'évolution entre 2009 et 2019 se calcule par $\frac{\text{valeur d'arrivée} - \text{valeur de départ}}{\text{valeur de départ}}$, soit $\frac{13,1 - 11,9}{11,9} = \frac{1,2}{11,9} \approx 0,1008$.

Cela représente une augmentation d'environ 10,08 %, soit **10 %** arrondi à l'unité.

Brevet 2021 — Métropole, Antilles et Guyane

1. Le parc du Futuroscope a accueilli 1,9 million de visiteurs en 2019. Combien de visiteurs supplémentaires auraient été nécessaires pour atteindre 2 millions ?

1,9 million s'écrit 1 900 000 et 2 millions s'écrivent 2 000 000.

Il aurait donc fallu $2\,000\,000 - 1\,900\,000 = \mathbf{100\,000}$ visiteurs de plus pour atteindre les 2 millions.

2. Peut-on dire qu'il y a eu environ 5 200 visiteurs par jour au Futuroscope en 2019 ? Justifier.

2019 n'est pas une année bissextile, elle compte donc 365 jours.

Le nombre moyen de visiteurs par jour est $\frac{1\,900\,000}{365} \approx 5\,205$.

Cette valeur est bien proche de 5 200 : **l'affirmation est vraie**, il y a bien eu environ 5 200 visiteurs par jour en 2019.

3.a Un professeur veut répartir 126 garçons et 90 filles en groupes identiques. Décomposer 126 et 90 en produit de facteurs premiers.

En divisant successivement par les nombres premiers : $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 7$ et $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$.

3.b Trouver tous les entiers qui divisent à la fois 126 et 90.

En combinant les facteurs premiers communs 2 et 3^2 , les diviseurs communs à 126 et 90 sont **1, 2, 3, 6, 9 et 18** (ce sont tous les diviseurs de $2 \times 3^2 = 18$, le plus grand diviseur commun aux deux nombres).

3.c En déduire le plus grand nombre de groupes identiques que le professeur peut constituer, ainsi que le nombre de filles et de garçons par groupe.

Pour que chaque groupe ait le même nombre de filles et le même nombre de garçons, le nombre de groupes doit diviser à la fois 126 et 90.

Le plus grand diviseur commun trouvé précédemment est 18 : le professeur peut donc former au maximum **18 groupes**.

Chaque groupe comptera alors $126 \div 18 = 7$ garçons et $90 \div 18 = 5$ filles.

4. Marie (1,60 m) se place à 2 m d'un arbre imaginaire de sorte que son ombre coïncide avec celle de la Gyrotour du Futuroscope. La distance entre Marie et le pied de la tour est alors de 54,25 m. Calculer la hauteur de la Gyrotour.

Notons A le point du sol d'où partent les rayons du soleil, D les pieds de Marie et E le sommet de sa tête, C le pied de la tour et B son sommet ; les points A, D, C sont alignés et les points A, E, B aussi.

Marie et la tour se tiennent toutes deux verticalement sur un sol horizontal : les droites (ED) et (BC) sont donc parallèles.

D'après le théorème de Thalès appliqué aux droites (AC) et (AB) sécantes en A, coupées par les parallèles (DE) et (CB) : $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{CB}$.

On a $AD = 2$ m, $AC = 2 + 54,25 = 56,25$ m et $DE = 1,60$ m, donc $\frac{2}{56,25} = \frac{1,60}{CB}$.

D'où $CB = \frac{1,60 \times 56,25}{2} = \mathbf{45 \text{ m}}$: la Gyrotour mesure 45 m de haut.

Brevet 2021 — Nouvelle-Calédonie

1. Sur 9 mois (avril à décembre 2020), les précipitations relevées à Nouméa (en mm) sont : 147 ; 199 ; 40 ; 67 ; 47 ; 54 ; 104 ; 45 ; 63. Calculer la moyenne, arrondie au mm.

La moyenne est $\frac{147 + 199 + 40 + 67 + 47 + 54 + 104 + 45 + 63}{9} = \frac{766}{9} \approx 85,1$, soit **85 mm** au mm près.

2. Quelle est l'étendue de cette série ?

L'étendue est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur : $199 - 40 = \mathbf{159 \text{ mm}}$.

3. Déterminer la médiane de cette série.

En rangeant les 9 valeurs dans l'ordre croissant : 40 ; 45 ; 47 ; 54 ; 63 ; 67 ; 104 ; 147 ; 199.

La série comporte 9 valeurs, donc la médiane est la 5e valeur : **63 mm**.

4. Quel est le pourcentage de mois où les précipitations dépassent 100 mm, arrondi à l'unité ?

Trois mois dépassent 100 mm (147, 199 et 104), sur 9 relevés au total : $\frac{3}{9} \times 100 = \frac{100}{3} \approx 33,3$, soit **33 %** à l'unité près.

Bac Terminale 2021 — Amérique du Nord

Partie A — Un laboratoire met au point un test anti-dopage. Si un athlète est dopé, le test est positif avec une probabilité de 0,98 ; s'il n'est pas dopé, le test est négatif avec une probabilité de 0,995. On note D l'évènement « l'athlète contrôlé est dopé » et T l'évènement « le test est positif », avec $P(D) = 0,08$. 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

Sur la première branche : $P(D) = 0,08$ et $P(\overline{D}) = 1 - 0,08 = 0,92$.

Depuis D : $P_D(T) = 0,98$ et $P_D(\overline{T}) = 1 - 0,98 = 0,02$.

Depuis $\overline{D}$: le test est négatif avec probabilité 0,995 pour un athlète non dopé, donc $P_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0,995$ et $P_{\overline{D}}(T) = 1 - 0,995 = 0,005$.

Partie A — 2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.

Les évènements D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T)$.

$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,08 \times 0,98 = 0,0784$ et $P(\overline{D} \cap T) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,92 \times 0,005 = 0,0046$.

Donc $P(T) = 0,0784 + 0,0046 = 0,083$.

Partie A — 3.a Sachant que le test d'un athlète est positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé (arrondie au millièème) ?

$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0784}{0,083} \approx \mathbf{0,945} \text{ (au millièème).}$$

Partie A — 3.b Le laboratoire commercialise le test si la probabilité qu'un athlète testé positif soit réellement dopé est supérieure ou égale à 0,95. Ce test sera-t-il commercialisé ?

D'après la question précédente, $0,945 < 0,95$, donc le test ne sera pas commercialisé.

Partie B — Dans une compétition, la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103. 1.a On contrôle 5 athlètes au hasard ; X compte le nombre de tests positifs parmi eux. Donner la loi de X et ses paramètres.

Chaque contrôle est une épreuve à deux issues (positif/négatif) de probabilité $p = 0,103$, répétée $n = 5$ fois de façon indépendante : X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,103$.

Partie B — 1.b Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat.

$$E(X) = np = 5 \times 0,103 = 0,515.$$

Cela signifie que, sur un grand nombre de séries de 5 contrôles, on obtient en moyenne environ 0,515 test positif par série, soit à peu près 1 athlète positif sur 10 contrôlés.

Partie B — 1.c Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif (arrondie au millièm) ?

L'évènement contraire de « au moins un test positif » est « aucun test positif », c'est-à-dire $\{X = 0\}$.

$$P(X = 0) = (1 - 0,103)^5 = 0,897^5 \approx 0,581.$$

$$\text{Donc } P(X \geq 1) = 1 - 0,581 \approx \mathbf{0,419} \text{ (au millièm).}$$

Partie B — 2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité d'avoir au moins un test positif soit supérieure ou égale à 0,75 ?

Pour n athlètes contrôlés, en notant X_n le nombre de tests positifs, $P(X_n = 0) = 0,897^n$, donc $P(X_n \geq 1) = 1 - 0,897^n$.

On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0,897^n \geq 0,75 \iff 0,897^n \leq 0,25$.

À la calculatrice : $0,897^{12} \approx 0,271 > 0,25$ mais $0,897^{13} \approx 0,243 \leq 0,25$.

Donc, la réponse est qu'il faut contrôler au minimum **13 athlètes**.

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 2)

1. Une application génère un ticket sur une grille 3×3 où trois cases contiennent chacune un cœur, disposées au hasard. Justifier qu'il existe exactement 84 façons différentes de placer ces trois cœurs sur la grille.

Placer trois cœurs sur la grille revient à choisir 3 cases parmi les 9 de la grille, sans tenir compte de l'ordre : le nombre de façons est donc $\binom{9}{3}$.

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \frac{504}{6} = 84.$$

Il y a bien 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur la grille.

2. Un ticket est gagnant si les trois cœurs sont alignés côte à côte sur une même ligne, une même colonne ou une même diagonale. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant vaut $\frac{2}{21}$.

La grille compte 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales, soit 8 alignements possibles de trois cases : il y a donc 8 grilles gagnantes parmi les 84 grilles possibles (équiprobables).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est $\frac{8}{84} = \frac{2}{21}$ (en simplifiant par 4).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est donc bien égale à $\frac{2}{21}$.

3. À chaque ticket généré, le joueur verse 1 € ; si le ticket est gagnant, la société lui reverse 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Soit X le gain algébrique du joueur pour un ticket. Un ticket gagnant rapporte $5 - 1 = 4$ € (le joueur récupère les 5 € mais a déjà versé 1 €), un ticket perdant coûte 1 €.

$$P(X = 4) = \frac{2}{21} \text{ et } P(X = -1) = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}.$$

$$E(X) = 4 \times \frac{2}{21} + (-1) \times \frac{19}{21} = \frac{8 - 19}{21} = -\frac{11}{21} \approx -0,524.$$

L'espérance de gain est négative : en moyenne, le joueur perd environ 0,52 € par ticket généré. Le jeu est donc défavorable au joueur.

4.a Un joueur génère 20 tickets de façon indépendante. Soit X le nombre de tickets gagnants parmi ces 20 tickets. Donner la loi de probabilité de X .

Chaque génération de ticket est une épreuve à deux issues (gagnant / perdant) de probabilité de succès $p = \frac{2}{21}$, répétée $n = 20$ fois de façon indépendante.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{21}$.

4.b Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 5)$, arrondie à 10^{-3} .

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{2}{21}\right)^5 \times \left(\frac{19}{21}\right)^{15} \approx \mathbf{0,027} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

4.c Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$, arrondie à 10^{-3} , puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$$(X \geq 1) \text{ est l'évènement contraire de } (X = 0), \text{ donc } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^{20} \approx 1 - 0,135 \approx \mathbf{0,865} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

Sur 20 tickets générés, le joueur a donc environ 86,5 % de chances d'obtenir au moins un ticket gagnant.

Brevet 2020 — Amérique du Nord

1. Voici les temps (en secondes) des huit nageuses en finale du 100 m nage libre : 53,23 ; 54,04 ; 53,61 ; 54,52 ; 53,35 ; 52,93 ; 54,56 ; 54,07. Charlotte Bonnet est arrivée troisième. Quel est son temps ?

En classant les temps par ordre croissant : 52,93 ; 53,23 ; 53,35 ; 53,61 ; 54,04 ; 54,07 ; 54,52 ; 54,56.
Le troisième temps (la troisième meilleure nageuse) est **53,35 s**.

2. Quelle est la vitesse moyenne, en m/s arrondie au dixième, de la nageuse ayant réalisé 52,93 s sur 100 m ?

La vitesse moyenne est $v = \frac{100}{52,93} \approx 1,9$ m/s.

3. Comparer la moyenne et la médiane de cette série de temps.

La moyenne est $\bar{t} = \frac{53,23 + 54,04 + 53,61 + 54,52 + 53,35 + 52,93 + 54,56 + 54,07}{8} \approx 53,79$ s.

Pour la médiane, la série ordonnée compte 8 valeurs : la médiane est la demi-somme des 4e et 5e valeurs, soit $\frac{53,61 + 54,04}{2} \approx 53,83$ s.

La moyenne (environ 53,79 s) et la médiane (environ 53,83 s) sont donc très proches l'une de l'autre.

4. Le tableau du classement des dix premiers pays par médailles d'or indique : Russie 23 or, Grande-Bretagne 13 or, Italie 8 or (entre autres). Est-il vrai qu'à elles deux, la Grande-Bretagne et l'Italie ont autant de médailles d'or que la Russie ?

La Grande-Bretagne et l'Italie totalisent $13 + 8 = 21$ médailles d'or, alors que la Russie en a 23.
Comme $21 < 23$, **c'est faux** : elles n'en ont pas autant que la Russie.

5. La France a remporté 4 médailles d'or sur 12 médailles au total. Est-il vrai que plus de 35 % des médailles françaises sont des médailles d'or ?

La proportion de médailles d'or est $\frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 0,333$, soit environ 33,3 %. Comme $33,3\% < 35\%$, **l'affirmation est fausse**.

6. Dans la feuille de calcul, la colonne F donne le total des médailles (or + argent + bronze). Quelle formule a pu être saisie en F2 avant d'être étirée jusqu'en F11 ?

La colonne F additionne les médailles d'or (C), d'argent (D) et de bronze (E) de chaque ligne : la formule saisie en F2 est **=SOMME(C2:E2)**.

Brevet 2019 — Métropole, Antilles et Guyane

1.a Un sablier est formé de deux cylindres C_1 et C_2 (hauteur 4,2 cm, diamètre 1,5 cm), d'un cylindre central C_3 et de deux demi-sphères. Au départ, le sable remplit le cylindre C_2 aux deux tiers. Montrer que le volume de sable est environ 4,95 cm³.

Le rayon du cylindre C_2 est $r = \frac{1,5}{2} = 0,75$ cm.

Le volume total de C_2 est $V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 0,75^2 \times 4,2$ cm³.

Le sable occupe les deux tiers de ce volume : $V_{\text{sable}} = \frac{2}{3} \times \pi \times 0,75^2 \times 4,2 \approx 4,95$ cm³.

1.b On retourne le sablier ; le débit d'écoulement du sable est constant, égal à 1,98 cm³/min. Calculer le temps d'écoulement du sable dans le cylindre inférieur.

Le temps d'écoulement est $t = \frac{V_{\text{sable}}}{\text{débit}} = \frac{4,95}{1,98} \approx 2,5$ minutes.

Or 2,5 minutes = 2 minutes + 0,5 × 60 secondes = **2 min 30 s**.

2.a Sur un échantillon de sabliers identiques, on mesure plusieurs fois le temps d'écoulement et on obtient un tableau d'effectifs (temps entre 2 min 22 s et 2 min 38 s). Combien de tests ont été réalisés au total ?

En additionnant tous les effectifs du tableau (1 + 1 + 2 + 6 + 3 + 7 + 6 + 3 + 1 + 2 + 3 + 2 + 3), on obtient **40 tests** au total.

2.b Un sablier est mis en vente si l'étendue des temps est inférieure à 20 s, si la médiane est comprise entre 2 min 29 s et 2 min 31 s, et si la moyenne est comprise entre 2 min 28 s et 2 min 32 s. Ce sablier sera-t-il éliminé ?

Étendue : la valeur maximale est 2 min 38 s et la valeur minimale 2 min 22 s, soit une étendue de $38 - 22 = 16$ s, bien inférieure à 20 s.

Médiane : avec 40 valeurs, la médiane est la moyenne entre la 20e et la 21e valeur de la série rangée dans l'ordre croissant. En cumulant les effectifs, on trouve que la 20e valeur est 2 min 29 s et la 21e est 2 min 30 s, donc la médiane vaut 2 min 29,5 s, qui est bien comprise entre 2 min 29 s et 2 min 31 s.

Moyenne : en sommant tous les temps (en secondes après 2 min) pondérés par leurs effectifs et en divisant par 40, on obtient une moyenne d'environ 2 min 30,1 s, bien comprise entre 2 min 28 s et 2 min 32 s.

Les trois conditions étant remplies, **le sablier ne sera pas éliminé**.

Brevet 2018 — Pondichéry

1. Un graphique donne la fréquence cardiaque de Chris (en battements par minute) en fonction du temps lors d'une course à VTT. Quelle est sa fréquence cardiaque au départ de la course ?

D'après le graphique, la fréquence cardiaque de Chris au départ de la course est d'environ **52 battements par minute**.

2. Quel est le maximum de la fréquence cardiaque atteinte par Chris au cours de sa course ?

D'après le graphique, la fréquence cardiaque maximale atteinte par Chris avoisine **160 battements par minute**.

3. Chris est parti à 9 h 33 de chez lui et a terminé sa course à 10 h 26. Quelle a été la durée de sa course, en minutes ?

De 9 h 33 à 10 h 00, il s'écoule $60 - 33 = 27$ minutes.

De 10 h 00 à 10 h 26, il s'écoule 26 minutes.

La durée totale de la course est donc $27 + 26 = 53$ minutes.

4. Chris a parcouru 11 km lors de cette course. Montrer que sa vitesse moyenne est d'environ 12,5 km/h.

La vitesse moyenne est $v = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$, avec une durée de 53 minutes, soit $\frac{53}{60}$ heure.

On calcule $v = \frac{11}{\frac{53}{60}} = \frac{11 \times 60}{53} = \frac{660}{53} \approx 12,45$ km/h.

Donc, la réponse est confirmée : au dixième près, la vitesse moyenne de Chris est bien d'environ **12,5 km/h**.

5. La fréquence cardiaque maximale (FCM) de Chris est 190 battements par minute. Un tableau indique qu'un effort est « soutenu » lorsque la fréquence cardiaque mesurée est comprise entre 70 % et 85 % de la FCM. Estimer la durée de la période pendant laquelle Chris a fourni un effort soutenu.

On calcule les deux seuils : $190 \times \frac{70}{100} = 133$ battements par minute, et $190 \times \frac{85}{100} = 161,5$ battements par minute.

Il faut donc repérer, sur le graphique, la période où la fréquence cardiaque reste comprise entre 133 et 161,5 battements par minute (en pratique, une fois passé le pic initial, la fréquence de Chris reste supérieure à 133 sur une longue plage).

On lit ainsi que cette fréquence dépasse 133 battements par minute entre environ la 8^e et la 42^e minute de course, soit pendant environ **34 minutes**.