

Suites numériques — Tous les corrigés

LOGIMATHS

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)

A.1 Calculer V_1 et V_2 ($V_0 = 0$, $V_{n+1} = 0,995 V_n + 6$).

$$V_1 = 0,995 \times 0 + 6 = 6 \text{ litres.}$$

$$V_2 = 0,995 \times 6 + 6 = 5,97 + 6 = 11,97 \text{ litres.}$$

A.2 Recopier et compléter le programme Python pour qu'il renvoie le volume après n heures.

- `def volume(n) :`
- Ligne 2 : `v = 0`
- Ligne 3 : `for k in range(n) :`
- Ligne 4 : `v = 0.995*v + 6`
- Ligne 5 : `return v`

A.3 Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.

Initialisation : $V_0 = 0$ et $V_1 = 6$ (question 1), donc $V_0 \leq V_1 \leq 1200$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ pour un entier n donné.

Comme $0,995 > 0$, on peut multiplier chaque membre : $0,995V_n \leq 0,995V_{n+1} \leq 0,995 \times 1200$, soit $0,995V_n \leq 0,995V_{n+1} \leq 1194$.

En ajoutant 6 partout : $0,995V_n + 6 \leq 0,995V_{n+1} + 6 \leq 1200$, c'est-à-dire $V_{n+1} \leq V_{n+2} \leq 1200$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.

A.4 Justifier que la suite (V_n) converge, et calculer sa limite.

D'après la question précédente, la suite (V_n) est croissante et majorée par 1200.

D'après le théorème de convergence monotone, **la suite (V_n) converge** vers une limite ℓ .

La fonction associée à la récurrence, $x \mapsto 0,995x + 6$, est continue (fonction affine), donc ℓ est solution de l'équation $x = 0,995x + 6$.

$$0,005x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{0,005} = 1200.$$

La suite (V_n) converge donc vers **1 200** : le volume de substance polluante se stabilise autour de 1 200 litres.

B.1.a Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,005y + 6$ sur $[0; +\infty[$.

(E) est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0,005$ et $b = 6$. Sa solution particulière constante est $y_p = -\frac{b}{a} = \frac{6}{0,005} = 1\,200$.

Les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-0,005t} + 1\,200$, où **C est une constante réelle**.

B.1.b Montrer que, pour tout réel t de $[0; +\infty[$, $v(t) = 1200(1 - e^{-0,005t})$.

Comme $v(0) = 0$: $Ce^0 + 1\,200 = 0$, donc $C = -1\,200$.

$$v(t) = -1\,200e^{-0,005t} + 1\,200 = 1\,200(1 - e^{-0,005t}).$$

B.1.c Calculer la limite de v en $+\infty$.

Quand $t \rightarrow +\infty$, $e^{-0,005t} \rightarrow 0$, donc $v(t) \rightarrow 1\,200 \times (1 - 0) = \mathbf{1\,200}$.

B.1.d Déterminer le sens de variation de la fonction v sur $[0; +\infty[$.

$v'(t) = 1\,200 \times 0,005 \times e^{-0,005t} = 6e^{-0,005t}$, toujours strictement positif.

La fonction v est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

B.2 Un taux de substance polluante supérieur à 5 % du volume du bassin (30 000 L) nécessite un nettoyage complet. Le propriétaire devra-t-il procéder à ce nettoyage ?

Le seuil critique est $0,05 \times 30\,000 = 1\,500$ litres.

La fonction v est strictement croissante et tend vers 1 200 sans jamais l'atteindre : elle est donc toujours strictement inférieure à 1 200, donc à 1 500.

Non, selon ce modèle, le volume de substance polluante n'atteindra jamais le seuil de 1 500 litres : un nettoyage complet ne sera jamais nécessaire.

B.3 Déterminer la valeur exacte de l'instant au-delà duquel le volume dépasse 50 litres (en heure et minute, arrondi à la minute).

On résout $v(t) = 50$: $1\,200(1 - e^{-0,005t}) = 50$, soit $1 - e^{-0,005t} = \frac{50}{1\,200} = \frac{1}{24}$.

$$e^{-0,005t} = \frac{23}{24}, \text{ donc } -0,005t = \ln\left(\frac{23}{24}\right).$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{23}{24}\right)}{-0,005} = 200 \ln\left(\frac{24}{23}\right) \text{ (valeur exacte), soit environ 8,51 heures.}$$

8,51 heures $\approx$ **8 h 31 min.**

Bac Première 2026 — Métropole (SPE)

Affirmation 1 : quelle que soit la valeur de u , $x^2 + x - u^2 = 0$ possède deux solutions réelles distinctes. Vrai ou faux ?

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-u^2) = 1 + 4u^2$.

Comme $4u^2 \geq 0$ pour tout réel u , $\Delta \geq 1 > 0$: **le discriminant est toujours strictement positif, l'équation admet donc toujours deux solutions réelles distinctes. L'affirmation 1 est VRAIE.**

Affirmation 2 : la suite (u_n) définie par $u_n = 2^{-n}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Vrai ou faux ?

$u_n = 2^{-n} = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$: (u_n) est bien géométrique de raison $\frac{1}{2}$, de premier terme $u_0 = 1$.

L'affirmation 2 est VRAIE.

Affirmation 3 : le point $A(3;3)$ appartient à la tangente à Cf en $x=0$, pour $f(x) = e^x - 1$. Vrai ou faux ?

$f'(x) = e^x$, donc $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$. L'équation de la tangente en $x = 0$ est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$.

Le point $A(3;3)$ vérifie $y = x$ (puisque $3 = 3$) : **il appartient bien à la tangente. L'affirmation 3 est VRAIE.**

Bac Première 2026 — Métropole (TECHNO)

A.1.a Calculer le montant de l'abonnement n°1 pour 2027.

$$a_1 = a_0 + 30 = 250 + 30 = \mathbf{280 \text{ €}}.$$

A.1.b Calculer a_2 et interpréter.

$$a_2 = a_1 + 30 = 280 + 30 = \mathbf{310 \text{ €}} : \text{ en 2028, l'abonnement n°1 coûtera 310 €}.$$

A.2 Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n .

$$a_{n+1} = a_n + 30.$$

A.3 En déduire la nature de la suite (a_n) et préciser sa raison.

(a_n) est arithmétique de raison **30** (on ajoute toujours le même nombre).

B.1 Justifier que le montant de l'abonnement n°2 en 2027 s'élève à 220 €.

Augmenter de 10 % revient à multiplier par 1,1 : $200 \times 1,1 = 220$ €.

B.2 Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n .

$$b_{n+1} = 1,1 \times b_n.$$

B.3 En déduire la nature de la suite (b_n) et préciser sa raison.

(b_n) est géométrique de raison 1,1 (on multiplie toujours par le même nombre).

C.1 Quelle formule doit-on écrire dans la cellule D2 ?

$$= \text{B2} - \text{C2} \text{ (puisque } c_n = a_n - b_n \text{)}.$$

C.2 À partir de quelle année le montant de l'abonnement n°2 devient-il plus élevé que le n°1 ?

D'après le tableur, c_n devient négatif à partir de $n = 12$ (cellule D14) : c'est donc à partir de 2038 (2026 + 12) que l'abonnement n°2 devient plus cher que le n°1.

Bac Première 2026 — Antilles et Guyane (SPECIFIQUE)

A.1 Calculer u_1 et u_2 . Interpréter u_2 .

Le nombre d'arbres augmente de 100 par an : $u_1 = 1\,200 + 100 = 1\,300$ et $u_2 = 1\,300 + 100 = 1\,400$. Dans le contexte, la forêt comptera 1 400 arbres en 2012.

A.2 Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de (u_n) et sa raison.

Chaque année, on ajoute 100 arbres : $u_{n+1} = u_n + 100$. (u_n) est donc arithmétique de raison $r = 100$, de premier terme $u_0 = 1\,200$.

A.3 Exprimer u_n en fonction de n .

$$(u_n) \text{ étant arithmétique : } u_n = u_0 + n \times r = 1\,200 + 100n.$$

A.4 À partir de quelle année la forêt comptera-t-elle plus de 2 950 arbres ?

Le nombre d'arbres étant toujours un multiple de 100, la forêt dépassera 2 950 arbres dès qu'elle en comptera 3 000.

$$u_n = 3\,000 \iff 1\,200 + 100n = 3\,000 \iff n = 18 : \text{c'est donc à partir de 2028 (2010 + 18)} \\ \text{que la forêt dépassera 2 950 arbres.}$$

B.1 Calculer le nombre d'arbres au 1er janvier 2011.

Une augmentation de 5 % de 1 000 arbres correspond à +50 arbres : au 1^{er} janvier 2011, il y aura **1 050 arbres**.

B.2 Déterminer la nature de la suite (v_n) et préciser sa raison.

Une hausse de 5 % chaque année revient à multiplier par 1,05 : (v_n) est **géométrique de raison 1,05**, de premier terme $v_0 = 1\,000$.

B.3 En 2030, on estime environ 2 653 arbres. Quel terme de la suite a-t-on calculé, et comment ?

L'année 2030 correspond à v_{20} , car $2030 = 2010 + 20$.

L'expression explicite est $v_n = v_0 \times 1,05^n = 1\,000 \times 1,05^n$: le calcul effectué est donc $1\,000 \times 1,05^{20}$.

C. Interpréter les résultats de la dernière colonne du tableur ($n = 29$).

On observe que $v_{29} = 4\,116 > u_{29} = 4\,100$, alors que pour tous les termes précédents on avait $u_n > v_n$: **à partir de l'année 2039 ($2010 + 29$), la seconde forêt (croissance géométrique) dépassera la première (croissance arithmétique) en nombre d'arbres.**

Bac Première 2026 — Amérique du Nord (SPECIFIQUE)**A.1 Quelle est la nature de la suite (u_n) et sa raison ?**

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours 20 individus : (u_n) est **arithmétique de raison 20**.

A.2 À combien peut-on estimer le nombre de marmottes en juin 2025 ?

Juin 2025 correspond à u_6 (puisque $2025 = 2019 + 6$) : $u_6 = u_0 + 6 \times 20 = 200 + 120 = \mathbf{320}$ marmottes.

A.3 Ce premier modèle semble-t-il adapté, sachant que la population réelle en 2025 était de 355 ?

L'écart entre le modèle (320) et la réalité (355) est de 35 individus, soit environ 10 % de 355 : **cet écart est important, ce premier modèle ne semble donc pas bien adapté à la situation.**

B.1 De quel pourcentage la population a-t-elle augmenté entre 2019 et 2020 ?

$$\frac{220 - 200}{200} = \frac{20}{200} = 0,10 = \mathbf{10 \%}.$$

B.2.a Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Préciser sa raison et son premier terme.

$v_{n+1} = 1,1 \times v_n$: on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par 1,1. (v_n) est **géométrique de raison 1,1**, de premier terme $v_0 = 200$ (population en 2019).

B.2.b Exprimer v_n en fonction de n.

(v_n) étant géométrique : $v_n = v_0 \times 1,1^n = 200 \times 1,1^n$.

B.3.a Selon ce nouveau modèle, à combien peut-on estimer le nombre de marmottes en juin 2025 ?

Juin 2025 correspond à $n = 6$: d'après le tableur, $v_6 = 354$ marmottes.

B.3.b Ce nouveau modèle semble-t-il pertinent, sachant que la population réelle en 2025 était de 355 ?

354 est très proche de 355 (écart inférieur à 0,3 %) : **ce second modèle semble donc pertinent.**

B.3.c En juin de quelle année la population aura-t-elle dépassé 400 individus, selon ce modèle ?

D'après le tableur, la première valeur dépassant 400 est $v_8 = 429$ (colonne H) : **la population dépassera 400 individus en juin 2027** ($2019 + 8$).

Bac Première 2026 — Amérique du Nord (SPE)

A.1 Donner la puissance électrique des panneaux à 11 h 00 (lecture graphique).

Avec la précision permise par le graphique, on lit une puissance d'environ **5,75 kW** à 11 h.

A.2 Résoudre graphiquement $f(x) \geq 5$ et interpréter.

Graphiquement, $f(x) \geq 5$ pour $x \in [10,5 ; 15,5]$ environ : **la puissance des panneaux dépasse 5 kW entre environ 10 h 30 et 15 h 30**, soit pendant environ 5 heures dans la journée.

B.1 Déterminer la nature de la suite (c_n) et préciser sa raison.

Chaque année, le tarif est multiplié par 1,06 (hausse de 6 %) : (c_n) est **géométrique de raison $q = 1,06$** , de premier terme $c_0 = 0,15$.

B.2 Exprimer c_n en fonction de n.

(c_n) étant géométrique : $c_n = c_0 \times q^n = 0,15 \times 1,06^n$.

B.3 Donner le calcul permettant d'obtenir le coût en 2030.

2030 correspond à $2020 + 10$, soit $n = 10$: le coût pour 1 kWh en 2030 est $c_{10} = 0,15 \times 1,06^{10}$ (calcul non demandé).

B.4.a Que représentent les variables c et S du programme Python ?

c représente le coût (en euros) d'un kWh pour l'année considérée. S représente l'économie totale cumulée (en euros) depuis 2020 : à chaque tour de boucle, on ajoute l'économie de l'année (2000 kWh non achetés, au prix c), puis on met à jour l'année et le prix.

B.4.b Le programme affiche 16. Interpréter ce résultat.

Il faut 16 années pour que l'économie cumulée dépasse 7 000 €, le coût de l'installation : selon ce modèle, l'investissement de Camille est rentabilisé en $2020 + 16 = 2036$.

Bac Première 2026 — Centres étrangers G1 (SPECIFIQUE)**1. Calculer B_1 et interpréter le résultat.**

$B_1 = 900 - 10 = 890$. En 2026, le club de basketball comptera environ 890 adhérents.

2. Exprimer B_n en fonction de n .

Le club perd 10 adhérents chaque année (suite arithmétique de raison -10) : $B_n = 900 - 10n$.

3. Justifier que le club aura perdu plus de 10 % de ses adhérents entre 2025 et 2035.

2035 correspond à $n = 10$: $B_{10} = 900 - 10 \times 10 = 800$.

Une baisse de 10 % par rapport à 900 correspond à $900 \times 0,9 = 810$ adhérents.

Comme $800 < 810$, le club aura bien perdu plus de 10 % de ses adhérents entre 2025 et 2035.

4. Par lecture graphique, estimer le nombre d'adhérents au handball en 2028.

2028 correspond à $n = 3$ ($2025 + 3$) : par lecture graphique, on estime à environ 350 adhérents.

5. Quelle est la nature de la suite (H_n) ? Préciser son premier terme et sa raison.

La relation $H_{n+1} = 1,2 \times H_n$ montre que (H_n) est géométrique de raison 1,2, de premier terme $H_0 = 200$.

6. À partir de quelle année le handball dépassera-t-il le basketball en nombre d'adhérents ?

$$B_7 = 900 - 7 \times 10 = 830 \text{ et, par lecture graphique, } H_7 \approx 717 < 830 : H_7 < B_7.$$

$$B_8 = 900 - 8 \times 10 = 820 \text{ et, par lecture graphique, } H_8 \approx 860 > 820 : H_8 > B_8.$$

C'est donc à partir de 2033 ($2025+8$) que le club de handball comptera plus d'adhérents que le club de basketball.

Bac Première 2026 — Centres étrangers G1 (SPE)

A.1.a Calculer u_1 .

$$u_0 = 1 \text{ et la hauteur augmente de } 0,4 \text{ m par an : } u_1 = 1 + 0,4 = \mathbf{1,4 \text{ m.}}$$

A.1.b Quelle sera la hauteur de l'arbre deux ans après sa plantation ?

$$u_2 = u_1 + 0,4 = 1,4 + 0,4 = \mathbf{1,8 \text{ m.}}$$

A.2 Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

La hausse de 0,4 m par an se traduit par $u_{n+1} = u_n + 0,4$: (u_n) est arithmétique de raison 0,4, de premier terme $u_0 = 1$.

A.3 Exprimer u_n en fonction de n .

$$(u_n) \text{ étant arithmétique : } u_n = u_0 + n \times 0,4 = 0,4n + 1.$$

A.4 Au bout de combien d'années le mûrier atteindra-t-il 9 mètres ?

$$u_n = 9 \iff 0,4n + 1 = 9 \iff 0,4n = 8 \iff n = 20 : \text{c'est } \mathbf{20 \text{ ans}} \text{ après sa plantation que l'arbre atteindra } 9 \text{ mètres.}$$

B.1 Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier.

Le nombre de nouvelles branches double chaque année : $v_{n+1} = 2 \times v_n$: (v_n) est géométrique de raison **2**, de premier terme $v_0 = 2$.

B.2.a Montrer que, trois ans après la plantation, l'arbre possède 30 branches en tout.

Un an après, 4 nouvelles branches sont apparues, pour un total de 6 branches.

Deux ans après, il apparaît $4 \times 2 = 8$ nouvelles branches, pour un total de $6 + 8 = 14$ branches.

Trois ans après, il apparaît $8 \times 2 = 16$ nouvelles branches, pour un total de $14 + 16 = \mathbf{30 \text{ branches}}$, ce qui correspond bien à la valeur annoncée.

B.2.b Interpréter la valeur 4094 affichée par le programme Python.

La variable ‘v’ stocke les termes successifs de (v_n) (nouvelles branches), et ‘total’ le nombre total de branches, actualisé à chaque tour de boucle. La boucle s’exécutant 10 fois : **4094 est le nombre total de branches du mûrier, 10 ans après sa plantation.**

Bac Première 2026 — Centres étrangers G1 (TECHNO)

Affirmation 1 : $u_3 = 47$, avec $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Vrai ou faux ?

$$u_1 = 2 \times 5 + 1 = 11, u_2 = 2 \times 11 + 1 = 23, u_3 = 2 \times 23 + 1 = 47.$$

L’affirmation 1 est VRAIE.

Affirmation 2 : $V_{n+1} = 1,1V_n + 200$ modélise une perte d’un dixième d’abonnés puis un gain de 200. Vrai ou faux ?

Perdre un dixième des abonnés revient à en conserver les neuf dixièmes, soit multiplier par $1 - \frac{1}{10} = 0,9$, puis ajouter 200 : $V_{n+1} = 0,9V_n + 200$.

La formule proposée ($1,1V_n + 200$) correspondrait à une **hausse** de 10 %, pas à une perte d’un dixième.

L’affirmation 2 est FAUSSE.

Affirmation 3 : $w_n = (n + 4)/3$ est arithmétique de premier terme 4 et de raison $\frac{1}{3}$. Vrai ou faux ?

$$w_0 = \frac{0 + 4}{3} = \frac{4}{3} \neq 4.$$

L’affirmation 3 est FAUSSE (le premier terme est $\frac{4}{3}$, pas 4).

Affirmation 4 : la probabilité qu’un élève se rende au lycée en bus est $\frac{3}{4}$. Vrai ou faux ?

$$P(\text{Bus}) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}.$$

L’affirmation 4 est VRAIE.

Affirmation 5 : sachant que l’élève a pris le bus, la probabilité que ce soit un garçon est 0,6. Vrai ou faux ?

Parmi les 150 élèves prenant le bus, 90 sont des filles, donc $150 - 90 = 60$ sont des garçons.

$$P_{\text{Bus}}(\text{Garçon}) = \frac{60}{150} = 0,4 \neq 0,6.$$

L’affirmation 5 est FAUSSE.

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 2)

Partie A — 1.a On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Donner la valeur exacte de u_1 et u_2 .

$$u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{2} \text{ et } u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{2}}.$$

Partie A — 1.b Émettre une conjecture, à la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.

À la calculatrice, on conjecture que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 1.

Partie A — 2.a Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation : $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,414$ et $u_0 = 2$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que, pour un entier n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$. La fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{1} \leq \sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n}$, soit $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Partie A — 2.b En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, (u_n) est minorée par 1 et décroissante : toute suite décroissante et minorée étant convergente, (u_n) converge vers une limite $\ell \geq 1$.

Partie A — 2.c Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.

$$\text{Pour } x \geq 0 : \sqrt{x} = x \iff x = x^2 \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

L'équation admet deux solutions sur $[0 ; +\infty[$: 0 et 1.

Partie A — 2.d Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) .

(u_n) converge vers ℓ et vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction racine carrée, continue sur $[0 ; +\infty[$: par le théorème du point fixe, ℓ est solution de $f(x) = x$.

D'après la question précédente, les solutions sont 0 et 1, et comme $\ell \geq 1$, on a $\ell = 1$.

La suite (u_n) converge vers 1.

Partie B — 1.a On pose $v_n = \ln(u_n)$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$\text{Pour tout entier naturel } n : v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(\sqrt{u_n}) = \frac{1}{2} \ln(u_n) = \frac{1}{2} v_n.$$

(v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, de premier terme $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$.

Partie B — 1.b Exprimer v_n en fonction de n .

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\ln(2)}{2^n}.$$

Partie B — 1.c En déduire que, pour tout entier naturel n , $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.

Comme $v_n = \ln(u_n)$ et $v_n = \frac{\ln(2)}{2^n}$, on a $\frac{\ln(2)}{2^n} = \ln(u_n)$, soit $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.

Partie B — 2.a Déterminer à la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à $]0,99 ; 1,01[$, et une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.

À la calculatrice, pour tout $k < 7$, $u_k > 1,01$, et $u_7 \approx 1,00543$: la plus petite valeur est $k = 7$.

Partie B — 2.b En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.

En prenant $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ pour $x \in]0,99 ; 1,01[$: $\ln(u_7) \approx u_7 - 1 \approx 0,00543$.

Partie B — 2.c Déduire des questions précédentes une approximation de $\ln(2)$.

D'après ce qui précède, $\ln(2) \approx 2^7 \ln(u_7) \approx 2^7 \times 0,00543 \approx 0,695$.

Partie B — 3. On généralise à tout réel a strictement supérieur à 1. Compléter l'algorithme Python (from math import *; def Briggs(a) : n=0; while a>=1.01 : a=sqrt(a); n=n+1; L=...; return L) pour que Briggs(a) approche $\ln(a)$.

En s'appuyant sur la relation $\ln(a) \approx 2^n(a - 1)$ établie précédemment, il faut compléter la ligne par ' $L = 2n * (a-1)$ '.

Bac Terminale 2025 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. Un patient prend 2 mL de médicament chaque heure. On pose $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$ pour tout $n \geq 1$ (u_n = quantité présente après n prises). Calculer u_2 .

$$u_2 = 2 + 0,8 \times u_1 = 2 + 0,8 \times 2 = 2 + 1,6 = 3,6 \text{ mL.}$$

Partie A — 2. Montrer par récurrence que $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Initialisation : pour $n = 1$, $10 - 8 \times 0,8^0 = 10 - 8 = 2 = u_1$: la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : on suppose que, pour un entier $n \geq 1$, $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$. Alors : $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n = 2 + 0,8(10 - 8 \times 0,8^{n-1}) = 2 + 8 - 8 \times 0,8^n = 10 - 8 \times 0,8^n$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$.

Partie A — 3. Déterminer la limite de u_n et interpréter.

Comme $-1 < 0,8 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^{n-1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10$.

Cela signifie qu'après un grand nombre de prises, la quantité de médicament dans l'organisme se rapproche indéfiniment de 10 mL, sans jamais l'atteindre.

Partie A — 4. L'inéquation $u_N \geq 10$ admet-elle des solutions pour N entier naturel non nul ? Interpréter.

$$u_N \geq 10 \iff 10 - 8 \times 0,8^{N-1} \geq 10 \iff -8 \times 0,8^{N-1} \geq 0.$$

Or $-8 \times 0,8^{N-1}$ est strictement négatif pour tout N : cette inéquation **n'a pas de solution**.

Cela signifie que la quantité de médicament dans l'organisme reste toujours strictement inférieure à 10 mL, quel que soit le nombre de prises.

Partie A — 5. Déterminer à partir de combien de prises la quantité de médicament est strictement supérieure à 9 mL.

$$u_n > 9 \iff 10 - 8 \times 0,8^{n-1} > 9 \iff -8 \times 0,8^{n-1} > -1 \iff 0,8^{n-1} < \frac{1}{8} \text{ (en divisant par } -8 < 0, \text{ ce qui inverse le sens de l'inégalité).}$$

En passant au logarithme népérien (croissant) : $(n-1) \ln(0,8) < -\ln(8)$, et comme $\ln(0,8) < 0$:
 $n-1 > -\frac{\ln(8)}{\ln(0,8)} \approx 9,3$, soit $n > 10,3$.

Les solutions entières sont donc les entiers $n \geq 11$: **c'est à partir de la 11e prise que la quantité dépasse 9 mL.**

Partie B — 1. On pose $S_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)/n$. Calculer S_2 .

$$S_2 = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{2 + 3,6}{2} = 2,8.$$

Partie B — 2. Montrer que $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n$.

En sommant l'expression explicite de u_k pour k de 1 à n : $\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (10 - 8 \times 0,8^{k-1}) = 10n - 8 \sum_{k=1}^n 0,8^{k-1}$.

La somme géométrique $\sum_{k=1}^n 0,8^{k-1} = \frac{1 - 0,8^n}{1 - 0,8} = 5(1 - 0,8^n)$.

Donc $\sum_{k=1}^n u_k = 10n - 8 \times 5(1 - 0,8^n) = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n$.

Partie B — 3. Calculer la limite de S_n .

D'après la question précédente, $S_n = 10 - \frac{40}{n} + \frac{40}{n} \times 0,8^n$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{40}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 10$: la quantité moyenne de médicament tend elle aussi vers 10 mL.

Partie B — 4. On donne la fonction `mystere(k)` (`n=1, s=2 ; while s<k : n=n+1, s=10-40/n+40*0.8**n/n ; return n`). Que représente `mystere(9)` ?

La fonction calcule les termes successifs de S_n (avec la formule explicite de la question précédente) jusqu'à ce que S_n dépasse le seuil k : 'mystere(9)' renvoie donc le **premier rang n à partir duquel la quantité moyenne de médicament dans l'organisme dépasse 9 mL.**

Partie B — 5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

D'après la partie A, $u_n < 9$ pour tout $n \leq 10$ (la quantité ne dépasse 9 mL qu'à partir de la 11e prise).

Or S_n est la moyenne de $u_1, \dots, u_n$: si tous les u_k (pour $k \leq 10$) sont inférieurs à 9, alors S_{10} l'est aussi.

La valeur renvoyée par 'mystere(9)' est donc nécessairement **strictement supérieure à 10.**

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 2)

Partie A — 1. Une population animale du milieu A est modélisée par une suite géométrique (u_n) , $u_0 = 6$ (en milliers), de raison 0,93 ($n =$ années depuis 2025). Donner la population au 1er janvier 2026.

$$u_1 = u_0 \times 0,93 = 6 \times 0,93 = 5,58 \text{ (milliers), soit } \mathbf{5\,580 \text{ individus.}}$$

Partie A — 2. Exprimer u_n en fonction de n .

$$(u_n) \text{ étant géométrique de premier terme } 6 \text{ et de raison } 0,93 : u_n = 6 \times 0,93^n.$$

Partie A — 3. Déterminer la limite de (u_n) et interpréter.

$$\text{Comme } 0,93 \in]-1 ; 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,93^n = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, la population du milieu A tend vers l'extinction.

Partie B — 1. On modélise la population du milieu B par $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n$. Donner la population au 1er janvier 2026.

$$v_1 = -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 = -1,8 + 6,6 = 4,8 \text{ (milliers), soit } \mathbf{4\,800 \text{ individus.}}$$

Partie B — 2. On pose $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$ sur $[0 ; +\infty[$. Démontrer que f est croissante sur $[0 ; 11]$.

$$f \text{ est dérivable sur } [0 ; +\infty[: f'(x) = -0,1x + 1,1.$$

$$f'(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{1,1}{0,1} = 11 : f \text{ est donc croissante sur } [0 ; 11].$$

Partie B — 3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.

Initialisation : $v_0 = 6$ et $v_1 = 4,8$, donc $2 \leq v_1 \leq v_0 \leq 6$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que, pour un entier n , $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$. Comme $v_n, v_{n+1} \in [0 ; 11]$ et que f est croissante sur $[0 ; 11]$: $f(2) \leq f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \leq f(6)$.

Or $f(2) = -0,05 \times 4 + 2,2 = 2$ et $f(6) = v_1 = 4,8 \leq 6$, donc $2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 6$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n , $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.

Partie B — 4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite .

D'après la question précédente, (v_n) est décroissante (car $v_{n+1} \leq v_n$) et minorée par 2 : toute suite décroissante et minorée étant convergente, (v_n) **converge vers une limite $\ell \geq 2$.**

Partie B — 5.a Justifier que v_n vérifie $f(v_n) = v_{n+1}$, puis en déduire la valeur de ℓ .

(v_n) vérifie $v_{n+1} = f(v_n)$ avec f continue : d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

$$f(\ell) = \ell \iff -0,05\ell^2 + 1,1\ell = \ell \iff 0,05\ell^2 - 0,1\ell = 0 \iff 0,05\ell(\ell - 2) = 0, \text{ soit } \ell = 0 \text{ ou } \ell = 2.$$

Comme $\ell \geq 2$, on a $\ell = 2$.

Partie B — 5.b Interpréter ce résultat.

Au bout d'un grand nombre d'années, la population du milieu B se stabilise autour de 2 000 individus, soit le tiers de la population initiale.

Partie C — 1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.

$$\text{On cherche } u_n < 3 \iff 6 \times 0,93^n < 3 \iff 0,93^n < \frac{1}{2}.$$

En passant au logarithme népérien (croissant) : $n \ln(0,93) < -\ln(2)$, et comme $\ln(0,93) < 0$:
 $n > -\frac{\ln(2)}{\ln(0,93)} \approx 9,55$, soit $n \geq 10$.

La population du milieu A passera sous 3 000 individus à partir de 2035.

Partie C — 2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.

(v_n) étant décroissante, on calcule : $v_5 \approx 3,14$ et $v_6 \approx 2,96$: **la population du milieu B passera sous 3 000 individus à partir de 2031 ($n = 6$).**

Partie C — 3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera celle du milieu A.

(u_n) converge vers 0 et (v_n) converge vers 2, toutes deux décroissantes à partir de la même valeur initiale $u_0 = v_0 = 6$: il existera donc nécessairement un rang N à partir duquel $v_N > u_N$.

Partie C — 4.a Compléter le programme Python (n=0, u=6, v=6; while ... : u=...; v=...; n=n+1; print(2025+n)) pour qu'il affiche l'année où la population B dépasse la population A.

Il faut compléter par 'while u >= v :', 'u = 0.93*u', 'v = -0.05*v+1.1*v' (les formules de récurrence des deux suites).

Partie C — 4.b Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

À la calculatrice : $u_{12} \approx 2,51$ et $v_{12} \approx 2,41$ (encore $u > v$) ; $u_{13} \approx 2,34$ et $v_{13} \approx 2,36$ (désormais $v > u$) : le programme affiche **2038**.

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 1)

Partie A — 1. Une zone de 20 ha voit sa posidonie occuper 1 ha au 1er juillet 2024 ($u_0 = 1$). On modélise $u_{n+1} = 0,02u_n^2 + 1,3u_n$. Calculer la superficie au 1er juillet 2025.

$$u_1 = -0,02 \times 1^2 + 1,3 \times 1 = 1,28 : \mathbf{1,28 \text{ ha.}}$$

Partie A — 2.a On pose $h(x) = -0,02x^2 + 1,3x$ sur $[0 ; 20]$ (croissante). Démontrer que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,28$, donc $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 20$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que, pour un entier n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$. Comme h est croissante sur $[0 ; 20]$: $h(1) \leq h(u_n) \leq h(u_{n+1}) \leq h(20)$, soit $1,28 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 18$.

Comme $1 \leq 1,28$ et $18 \leq 20$: $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 20$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

Partie A — 2.b En déduire que la suite (u_n) converge, vers une limite L .

D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée par 20 : elle **converge donc vers une limite** $L \in [1 ; 20]$.

Partie A — 2.c Justifier que $L = 15$.

(u_n) vérifie $u_{n+1} = h(u_n)$ avec h continue : L est solution de $h(x) = x$.

$$h(x) = x \iff -0,02x^2 + 0,3x = 0 \iff -0,02x(x - 15) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 15.$$

Comme $L \in [1 ; 20]$, seule $x = 15$ convient : $L = 15$.

Partie A — 3.a Sans calcul, justifier que la surface dépassera 14 hectares.

(u_n) converge vers 15 : tout intervalle ouvert contenant 15, comme $]14 ; +\infty[$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. La surface dépassera donc bien 14 ha.

Partie A — 3.b Compléter l'algorithme (def seuil() : n=0, u=1 ; while ... : n=... ; u=... ; return n) pour qu'il affiche l'année où la surface dépasse 14 ha.

Il faut compléter par 'while u <= 14 :', 'n = n+1', 'u = -0.02*u2 + 1.3*u'. L'appel 'seuil()' renvoie 18 (car $u_{17} \approx 13,8$ et $u_{18} \approx 14,1$).

Partie B — On modélise $f(t)$ (superficie au temps t , en continu) avec $f(0)=1$, f ne s'annulant pas, dérivable, solution de $(E_1) : y' = 0,02y(15-y)$. On pose $g(t) = 1/f(t)$. Montrer que g est solution de $(E_2) : y' = -0,3y + 0,02$.

$$g'(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)^2} = -\frac{0,02f(t)(15-f(t))}{f(t)^2} = -\frac{0,02(15-f(t))}{f(t)} = -0,3 \times \frac{1}{f(t)} + 0,02 = -0,3g(t) + 0,02.$$

g est donc bien solution de (E_2) .

Partie B — 2. Donner les solutions de (E_2) .

Les solutions de (E_2) sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-0,3t} + \frac{1}{15}$, avec $C \in \mathbb{R}$ (solution particulière constante $\frac{0,02}{0,3} = \frac{1}{15}$ plus solution homogène).

Partie B — 3. En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 15 / (14e^{-0,3t} + 1)$.

$$g(0) = \frac{1}{f(0)} = 1, \text{ donc } C + \frac{1}{15} = 1 \iff C = \frac{14}{15}.$$

$$g(t) = \frac{14}{15}e^{-0,3t} + \frac{1}{15}, \text{ donc } f(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{\frac{14}{15}e^{-0,3t} + \frac{1}{15}} = \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1}.$$

Partie B — 4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,3t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} (14e^{-0,3t} + 1) = 1$, et par quotient $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 15$: cohérent avec le modèle discret.

Partie B — 5. Résoudre $f(t) > 14$ sur $[0; +\infty[$ et interpréter.

$$f(t) > 14 \iff \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1} > 14 \iff 15 > 14(14e^{-0,3t} + 1) \iff 1 > 196e^{-0,3t} \iff e^{-0,3t} < \frac{1}{196}.$$

$$\text{En passant au logarithme : } -0,3t < -\ln(196) \iff t > \frac{\ln(196)}{0,3}.$$

L'ensemble des solutions est $\left] \frac{\ln(196)}{0,3} ; +\infty \right[$, soit $t > 17,6$: il faudra environ 17,6 ans (17 ans et 7 mois) pour dépasser 14 ha, cohérent avec le modèle discret.

Bac Terminale 2025 — Polynésie française (jour 2)

Partie A — 1.a Une donnée binaire (0 ou 1) est transmise de machine en machine, fidèlement (90 %) ou de façon contraire (10 %). V_n : « la n-ième machine détient 1 ». Compléter l'arbre de probabilité.

Chaque transmission fidèle a une probabilité 0,9 et chaque transmission contraire 0,1 : l'arbre a pour branches $P_{V_n}(V_{n+1}) = 0,9$, $P_{V_n}(\overline{V_{n+1}}) = 0,1$, $P_{\overline{V_n}}(V_{n+1}) = 0,1$, $P_{\overline{V_n}}(\overline{V_{n+1}}) = 0,9$.

Partie A — 1.b Démontrer que $P(V_3) = 0,82$ et interpréter.

$\{V_2, \overline{V_2}\}$ forme une partition, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(V_3) = P(V_2) \times P_{V_2}(V_3) + P(\overline{V_2}) \times P_{\overline{V_2}}(V_3)$.

$$P(V_2) = 0,9 \text{ (car } P(V_1) = 1), \text{ donc } P(V_3) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,1 = 0,81 + 0,01 = 0,82.$$

Cela signifie qu'il y a 82 % de chances que la troisième machine détienne la valeur 1.

Partie A — 1.c Sachant que la troisième machine a reçu 1, calculer la probabilité que la deuxième ait aussi reçu 1.

$$P_{V_3}(V_2) = \frac{P(V_2 \cap V_3)}{P(V_3)} = \frac{0,9 \times 0,9}{0,82} = \frac{81}{82} \approx 0,988.$$

Partie A — 2.a On note $p_n = P(V_n)$, $p_1 = 1$. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1$.

$\{V_n, \overline{V_n}\}$ forme une partition, donc $p_{n+1} = P(V_n) \times P_{V_n}(V_{n+1}) + P(\overline{V_n}) \times P_{\overline{V_n}}(V_{n+1}) = 0,9p_n + 0,1(1 - p_n)$.

$$p_{n+1} = 0,9p_n + 0,1 - 0,1p_n = 0,8p_n + 0,1.$$

Partie A — 2.b Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$.

Initialisation : pour $n = 1$, $0,5 \times 0,8^0 + 0,5 = 0,5 + 0,5 = 1 = p_1$: la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : on suppose que, pour un entier $n \geq 1$, $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$. Alors : $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1 = 0,8(0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5) + 0,1 = 0,5 \times 0,8^n + 0,4 + 0,1 = 0,5 \times 0,8^n + 0,5$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$.

Partie A — 2.c Calculer la limite de p_n et interpréter.

Comme $-1 < 0,8 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^{n-1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,5$.

Quand le nombre de machines tend vers l'infini, la probabilité que la dernière détienne la valeur 1 tend vers 0,5 (la donnée devient totalement aléatoire).

Partie B — 1. On donne un script Python `simulation(n)` (`donnee=1` ; puis pour chaque étape : `if rand()<0.1 : donnee=1-donnee`). Déterminer le rôle des lignes « `if rand()<0.1` » et « `donnee=1-donnee` ».

‘`rand()`’ renvoie un nombre aléatoire de $[0 ; 1[$; la condition ‘`rand()<0.1`’ est donc vraie avec une probabilité de 0,1 (proportionnelle à la longueur de l'intervalle $[0 ; 0,1]$).

Cette ligne simule donc l'évènement « transmission contraire » (probabilité 0,1) ; la ligne ‘`donnee = 1 - donnee`’ inverse alors la valeur (0 devient 1, 1 devient 0), simulant cette transmission contraire.

Partie B — 2. Calculer la probabilité que `simulation(4)` renvoie `[1,1,1,1]` et que `simulation(6)` renvoie `[1,0,1,0,0,1]`.

`[1,1,1,1]` correspond à 4 transmissions fidèles successives : $P = 0,9^4 = 0,6561 \approx \mathbf{0,656}$.

`[1,0,1,0,0,1]` correspond à 3 transmissions contraires, puis fidèle, puis contraire, puis fidèle : $P = 0,1^3 \times 0,9 \times 0,1 \times 0,9 = 0,9^2 \times 0,1^4 = 8,1 \times 10^{-5} \approx \mathbf{0,000}$ (au millième).

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 1)

Affirmation 1. Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0. Vraie ou fausse ?

Une telle suite converge vers une limite $\ell \geq 0$, mais pas nécessairement 0 : par exemple, la suite $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ est décroissante, minorée par 0, et converge vers 1. **L'affirmation est fausse.**

Affirmation 2. Si, pour tout entier n , $u_n \leq \frac{-9^n + 3^n}{7^n}$, alors $\lim u_n = -\infty$. Vraie ou fausse ?

$\frac{-9^n + 3^n}{7^n} = -\left(\frac{9}{7}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$; comme $\left(\frac{9}{7}\right)^n \rightarrow +\infty$ et $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 1$, le majorant tend vers $-\infty$.

Par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. **L'affirmation est vraie.**

Affirmation 3. La fonction Python 'terme(N)' initialise $U=1$ puis effectue $U=U+i$ pour i dans $\text{range}(N)$. L'appel `terme(4)` renvoie 7. Vraie ou fausse ?

Les valeurs successives de U sont : $1 + 0 = 1$, puis $1 + 1 = 2$, puis $2 + 2 = 4$, puis $4 + 3 = 7$.

L'affirmation est vraie.

Affirmation 4. Prix A : 1 000 € par jour pendant 15 jours. Prix B : 1 € le 1er jour, la somme double chaque jour pendant 15 jours. Le prix A vaut plus que le prix B. Vraie ou fausse ?

Prix A : $1\,000 \times 15 = 15\,000$ €.

Prix B : somme des 15 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2, soit $\frac{1 - 2^{15}}{1 - 2} = 2^{15} - 1 = 32\,767$ €.

$32\,767 > 15\,000$: **l'affirmation est fausse**, le prix B est nettement plus avantageux.

Affirmation 5. La suite $v_n = \int_1^n \ln(x) \, dx$ (pour $n \geq 1$) est croissante. Vraie ou fausse ?

Par la relation de Chasles : $v_{n+1} - v_n = \int_n^{n+1} \ln(x) \, dx$.

Sur $[n ; n+1] \subset [1 ; +\infty[$, $\ln(x) \geq 0$: cette intégrale est positive, donc $v_{n+1} \geq v_n$. **L'affirmation est vraie.**

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 2)

Partie A — 1. Soit $f(x) = x^2 - x \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

En 0 : $x^2 \rightarrow 0$ et, par croissances comparées, $x \ln(x) \rightarrow 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

En $+\infty$: $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$, avec $\frac{\ln(x)}{x} \rightarrow 0$: le facteur entre parenthèses tend vers 1, et $x^2 \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie A — 2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.

$$f'(x) = 2x - \ln(x) - x \times \frac{1}{x} = 2x - 1 - \ln(x).$$

Partie A — 3. Montrer que $f''(x) = \frac{2x-1}{x}$.

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}.$$

Partie A — 4. Étudier les variations de f' sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations (avec la valeur exacte de l'extremum).

Sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $2x - 1$: négatif sur $]0 ; \frac{1}{2}[$, positif au-delà.

f' décroît puis croît, avec un minimum en $x = \frac{1}{2}$: $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$.

Partie A — 5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Le minimum de f' vaut $\ln(2) > 0$: $f'(x) > 0$ sur tout l'intervalle, donc f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B — 1. Soit $g(x) = x - \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau des variations de g .

$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, du signe de $x - 1$: g décroît sur $]0 ; 1]$ puis croît sur $[1 ; +\infty[$, avec un minimum $g(1) = 1 - 0 = 1$.

Partie B — 2. Sachant que 1 est l'unique solution de $g(x) = 1$, résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0 ; +\infty[$.

$f(x) = x \iff x^2 - x \ln(x) - x = 0 \iff x(x - 1 - \ln(x)) = 0$; comme $x > 0$, cela équivaut à $x - \ln(x) = 1$, soit $g(x) = 1$.

L'unique solution est donc $x = 1$.

Partie C — 1. Soit (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence que, pour tout n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Initialisation : $u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,597$, donc $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$: vrai au rang 0.

Hérédité : si $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$, la stricte croissance de f donne $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(1) = 1$; comme $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,6 \geq \frac{1}{2}$, l'encadrement est vrai au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Partie C — 2. Justifier que la suite (u_n) converge.

(u_n) est croissante et majorée par 1 : **elle converge** vers une limite ℓ avec $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

Partie C — 3. Sachant que la limite vérifie $f(\ell) = \ell$, déterminer ℓ .

D'après la partie B, l'équation $f(x) = x$ a pour unique solution 1 sur $]0 ; +\infty[: \ell = 1$.

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 2)

1. Léa estime que si elle gagne une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas ; si elle perd, elle gagne la suivante avec probabilité 0,2 ; et $g_1 = 0,5$. Quelle est la valeur de $P_{G_1}(D_2)$?

Si Léa gagne la première partie, elle perd la deuxième dans $1 - 0,7 = 0,3$ des cas : $P_{G_1}(D_2) = 0,3$.

2. Compléter l'arbre de probabilités des deux premières parties.

$P(G_1) = 0,5$, $P(D_1) = 0,5$; $P_{G_1}(G_2) = 0,7$, $P_{G_1}(D_2) = 0,3$; $P_{D_1}(G_2) = 0,2$, $P_{D_1}(D_2) = 0,8$.

3. Calculer g_2 .

Par les probabilités totales : $g_2 = 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 = 0,35 + 0,1 = 0,45$.

4.a Compléter l'arbre pour les parties n et $n + 1$.

Depuis G_n (probabilité g_n) : $P_{G_n}(G_{n+1}) = 0,7$, $P_{G_n}(D_{n+1}) = 0,3$; depuis D_n (probabilité $1 - g_n$) : $P_{D_n}(G_{n+1}) = 0,2$, $P_{D_n}(D_{n+1}) = 0,8$.

4.b Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2$.

$\{G_n, D_n\}$ forme une partition : $g_{n+1} = g_n \times 0,7 + (1 - g_n) \times 0,2 = 0,7g_n + 0,2 - 0,2g_n = 0,5g_n + 0,2$.

5.a On pose $v_n = g_n - 0,4$. Montrer que (v_n) est géométrique, en précisant premier terme et raison.

$v_{n+1} = g_{n+1} - 0,4 = 0,5g_n - 0,2 = 0,5(v_n + 0,4) - 0,2 = 0,5v_n : (v_n)$ est géométrique de raison 0,5, de premier terme $v_1 = 0,5 - 0,4 = 0,1$.

5.b Montrer que, pour tout n non nul, $g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$.

$v_n = v_1 \times 0,5^{n-1} = 0,1 \times 0,5^{n-1}$, donc $g_n = v_n + 0,4 = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$.

6. Étudier les variations de la suite (g_n) .

$g_{n+1} - g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1}(0,5 - 1) = -0,1 \times 0,5^{n-1} < 0$: la suite (g_n) est strictement décroissante.

7. Donner la limite de la suite (g_n) et interpréter.

Comme $-1 < 0,5 < 1$, $0,5^{n-1} \rightarrow 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = 0,4$. Sur le long terme, Léa gagne environ **40 %** de ses parties.

8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leq 0,001$.

$$0,1 \times 0,5^{n-1} \leq 0,001 \iff 0,5^{n-1} \leq 0,01 \iff (n-1) \ln(0,5) \leq \ln(0,01).$$

$n-1 \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \approx 6,64$ (le sens change car $\ln(0,5) < 0$), donc $n \geq 7,64$: le plus petit entier est $n = 8$.

9. Compléter la fonction Python ‘seuil(e)’ (initialisée avec $g=0.5$, $n=1$) pour qu’elle renvoie le plus petit rang à partir duquel $g_n \leq 0,4 + e$.

Ligne 4 : ‘while $g > 0.4 + e$:’ ; ligne 6 : ‘ $n = n + 1$ ’.

Bac Terminale 2024 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)**1. Un sac contient 8 jetons numérotés de 1 à 8 ; on pioche trois fois avec remise et on note la liste ordonnée des numéros. Déterminer le nombre de tirages possibles.**

Chaque pioche offre 8 possibilités, avec remise : il y a $8^3 = \mathbf{512}$ tirages possibles.

2.a Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.

Sans répétition, on a 8 choix pour le premier numéro, 7 pour le deuxième, 6 pour le troisième : $8 \times 7 \times 6 = \mathbf{336}$ tirages.

2.b En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition.

$512 - 336 = \mathbf{176}$ tirages avec au moins une répétition (complémentaire des tirages sans répétition).

3. On note X_1 le numéro du premier jeton pioché. Établir la loi de probabilité de X_1 .

Les jetons étant indiscernables, la loi est équirépartie : $P(X_1 = k) = \frac{1}{8}$ pour chaque k de 1 à 8.

4. Déterminer l’espérance de X_1 .

$$E(X_1) = \frac{1 + 2 + \cdots + 8}{8} = \frac{36}{8} = \mathbf{4,5}.$$

5. On pose $S = X_1 + X_2 + X_3$. Déterminer l’espérance de S .

Par linéarité, et les trois variables suivant la même loi : $E(S) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 4,5 = \mathbf{13,5}$.

6. Déterminer $P(S = 24)$.

La somme 24 n'est réalisée que par le tirage $(8; 8; 8)$, une issue sur 512 : $P(S = 24) = \frac{1}{512}$.

7.a Un joueur gagne un lot si $S \geq 22$. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages gagnants.

$S = 24$: uniquement $(8; 8; 8)$, soit 1 tirage. $S = 23$: la somme $7+8+8$, avec 3 positions possibles pour le 7, soit 3 tirages.

$S = 22$: les sommes $6+8+8$ et $7+7+8$, chacune donnant 3 tirages (3 positions du numéro isolé), soit 6 tirages.

Total : $1 + 3 + 6 = 10$ tirages gagnants.

7.b En déduire la probabilité de gagner un lot.

$$P(S \geq 22) = \frac{10}{512} = \frac{5}{256}.$$

Bac Terminale 2024 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A — 1. Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$ sur $[0; +\infty[$. Démontrer que f est croissante sur cet intervalle.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0 \text{ sur } [0; +\infty[: f \text{ est croissante.}$$

Partie A — 2. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}$.

$$\begin{aligned} \text{En multipliant par la quantité conjuguée : } \sqrt{x+1} - x &= \frac{(\sqrt{x+1} - x)(\sqrt{x+1} + x)}{\sqrt{x+1} + x} = \frac{(x+1) - x^2}{\sqrt{x+1} + x} = \\ &= \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}. \end{aligned}$$

Partie A — 3. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ sur $[0; +\infty[$.

Le dénominateur étant strictement positif, $f(x) = x \iff -x^2 + x + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 5$.

Les racines sont $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$: seule la première appartient à $[0; +\infty[$. $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or).

Partie B — 1. Soit (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer par récurrence que, pour tout n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation : $u_1 = \sqrt{6} \approx 2,45$, donc $1 \leq u_1 \leq u_0 = 5$: vrai au rang 0.

Hérédité : si $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$, la croissance de f donne $f(1) = \sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$, et $\sqrt{2} \geq 1$: vrai au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Partie B — 2. En déduire que la suite (u_n) converge.

(u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge.

Partie B — 3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

f étant continue sur $[0 ; +\infty[$, la limite vérifie $f(\ell) = \ell$; d'après la partie A, l'unique solution de cette équation est $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$: c'est la limite de la suite.

Partie B — 4.a Un script Python 'seuil(n)' compte les itérations nécessaires pour que $|u_i - \ell| < 10^{-n}$. Donner la valeur renvoyée par seuil(2).

À la calculatrice, $|u_4 - \ell| \approx 0,02 \geq 10^{-2}$ et $|u_5 - \ell| \approx 0,007 < 10^{-2}$: la fonction renvoie 5.

Partie B — 4.b La valeur renvoyée par seuil(4) est 9. Interpréter.

u_9 est le premier terme de la suite qui approche le nombre d'or ℓ à moins de 10^{-4} près : il faut 9 itérations pour obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 2)

Partie A — 1. La piscine d'Alain contient 50 m^3 d'eau ; il ajoute chaque jour 15 g de chlore. Justifier que cet ajout fait augmenter le taux de 0,3 mg/L.

$$15 \text{ g} = 15\,000 \text{ mg répartis dans } 50\,000 \text{ L} : \frac{15\,000}{50\,000} = 0,3 \text{ mg/L.}$$

Partie A — 2.a Le taux v_n vérifie $v_0 = 0,7$ et $v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3$. Montrer par récurrence que, pour tout n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

Initialisation : $v_1 = 0,92 \times 0,7 + 0,3 = 0,944$, donc $v_0 \leq v_1 \leq 4$: vrai au rang 0.

Hérédité : si $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$, en multipliant par 0,92 puis en ajoutant 0,3 : $v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 3,98 \leq 4$: vrai au rang $n + 1$.

Conclusion : par récurrence, pour tout n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

Partie A — 2.b Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

(v_n) est croissante et majorée par 4 : elle converge.

La fonction de récurrence $x \mapsto 0,92x + 0,3$ étant continue, la limite vérifie $\ell = 0,92\ell + 0,3 \iff 0,08\ell = 0,3 \iff \ell = 3,75$.

Partie A — 3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation (entre 1 et 3 mg/L) ?

La suite converge vers 3,75 : à partir d'un certain rang, le taux dépasse strictement 3 mg/L. **Le taux ne sera pas conforme** à long terme.

Partie A — 4. Compléter l'algorithme Python 'alerte_chlore(s)' qui renvoie le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

'while u <= s :', puis 'n = n + 1' et 'u = 0.92*u + 0.3'.

Partie A — 5. Quelle valeur renvoie 'alerte_chlore(3)' ? Interpréter.

$v_{16} \approx 2,95 \leq 3$ et $v_{17} \approx 3,01 > 3$: la fonction renvoie **17**. Avec ce protocole, le taux de chlore dépassera 3 mg/L au bout de 17 jours.

Partie B — 1. Un modèle continu vérifie (E) : $y' = -0,08y + \frac{q}{50}$. Justifier que f est de la forme $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$.

Les solutions de $y' = ay + b$ sont $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$; ici $a = -0,08$ et $b = \frac{q}{50}$, donc $-\frac{b}{a} = \frac{q}{50 \times 0,08} = \frac{q}{4}$:
 $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$.

Partie B — 2.a Exprimer, en fonction de q , la limite de f en $+\infty$.

$$e^{-0,08x} \rightarrow 0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{q}{4}.$$

Partie B — 2.b Sachant que le taux initial est 0,7 mg/L et que l'on veut une stabilisation à 2 mg/L, déterminer C et q.

Stabilisation à 2 : $\frac{q}{4} = 2 \iff q = 8$ (grammes de chlore par jour).

$f(0) = 0,7 \iff C + 2 = 0,7 \iff C = -1,3$: la fonction est $f(x) = -1,3e^{-0,08x} + 2$.

Bac Terminale 2023 — Asie (jour 2)

1. On considère la liste L des termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 7 et de raison 3, du type $L = [7, 10, \dots, 2023]$. Déterminer le nombre de termes de cette liste.

Le terme de rang n (en indexant à partir de 1) de cette suite arithmétique s'écrit $7 + 3(n - 1)$. On cherche n tel que $7 + 3(n - 1) = 2023$.

$$3(n - 1) = 2016 \iff n - 1 = 672 \iff n = 673.$$

Donc, la réponse est **673 termes**.

2. On choisit au hasard un nombre de cette liste. Déterminer la probabilité de tirer un nombre pair.

Un terme de la liste s'écrit $7 + 3(n - 1) = 3n + 4$, pour n entier de 1 à 673. Ce nombre est pair si et seulement si $3n + 4$ est pair, c'est-à-dire si et seulement si $3n$ est pair, donc si et seulement si n est pair (3 étant impair).

Parmi les entiers n de 1 à 673 (673 valeurs), les entiers pairs sont 2, 4, ..., 672, soit 336 valeurs.

Donc, la réponse est $P(\text{nombre pair}) = \frac{336}{673}$.

3. On note A l'évènement « obtenir un multiple de 4 » et B l'évènement « obtenir un nombre dont le chiffre des unités est 6 », sachant que $P(A) = \frac{168}{673}$ et $P(A \cap B) = \frac{34}{673}$ (valeurs obtenues par dénombrement direct dans la liste). Donner la probabilité d'obtenir un multiple de 4 se terminant par 6.

Un nombre qui est à la fois un multiple de 4 et qui se termine par 6 est exactement un élément de $A \cap B$. Donc, la réponse est $P(A \cap B) = \frac{34}{673}$ (donnée directement par l'énoncé, qui correspond bien à un dénombrement des multiples de 4 de la liste se terminant par 6).

4. Sachant de plus que $P(\bar{A} \cap B) = \frac{505}{673} \times \frac{33}{505}$, calculer $P_B(A)$.

D'abord $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{34}{673} + \frac{505}{673} \times \frac{33}{505} = \frac{34}{673} + \frac{33}{673} = \frac{67}{673}$ (le facteur $\frac{505}{673}$ se simplifie avec le 505 du numérateur).

Par définition de la probabilité conditionnelle : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{34}{673}}{\frac{67}{673}} = \frac{34}{67}$.

Donc, la réponse est $P_B(A) = \frac{34}{67}$.

5. On choisit successivement et au hasard 10 nombres de la liste (un même nombre pouvant être choisi plusieurs fois). Déterminer la probabilité qu'aucun des 10 nombres tirés ne soit un multiple de 4.

La probabilité de ne pas tirer un multiple de 4 en un seul tirage vaut $P(\bar{A}) = 1 - \frac{168}{673} = \frac{505}{673}$.

Les 10 tirages sont indépendants et identiques (tirage avec remise) : la probabilité qu'aucun des 10 ne soit un multiple de 4 est donc $\left(\frac{505}{673}\right)^{10}$.

Donc, la réponse est $P \approx \mathbf{0,057}$ (au millième).

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}$. Quel est son comportement : diverge vers $+\infty$, converge vers $\frac{2}{5}$, converge vers 0, ou converge vers $\frac{1}{3}$?

En factorisant numérateur et dénominateur par 5^n : $u_n = \frac{5^n \left(\frac{1}{5^n} + \left(\frac{2}{5} \right)^n \right)}{5^n \left(\frac{3}{5^n} + 1 \right)} = \frac{\left(\frac{2}{5} \right)^n + \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{3}{5^n}}$.

Les suites géométriques de raisons $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{5}$, toutes deux strictement comprises entre -1 et 1 , convergent vers 0 : par limite de somme puis de quotient, u_n converge vers $\frac{0+0}{1+0} = 0$.

Réponse : la suite converge vers 0.

2. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$. Quelle est l'expression de $f'(x)$?

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$f'(x) = 2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x = x(2 \ln(x) + 1).$$

Réponse : $f'(x) = x(2 \ln(x) + 1)$.

3. Une fonction h , continue sur $\mathbb{R}$, admet le tableau de variations suivant : h décroît de $+\infty$ (en $-\infty$) jusqu'à $-\infty$... en réalité h croît de $-\infty$ vers $+\infty$, en s'annulant en $x = 1$. On note H la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Que peut-on affirmer : H positive sur $] -\infty ; 0]$, H croissante sur $] -\infty ; 1]$, H négative sur $] -\infty ; 1]$, ou H croissante sur $\mathbb{R}$?

h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 1, donc $h(x) < 0$ pour tout $x < 1$.

H étant une primitive de h , on a $H' = h$: ainsi $H'(x) < 0$ sur $] -\infty ; 1[$, donc H est strictement décroissante sur cet intervalle.

Pour tout $x \leq 0$, x et 0 appartiennent à $] -\infty ; 1[$ où H décroît, donc $x \leq 0 \implies H(x) \geq H(0)$.

Or $H(0) = 0$ par définition de H , donc $H(x) \geq 0$ sur $] -\infty ; 0]$.

Réponse : H est positive sur $] -\infty ; 0]$.

4. Soit $a < b$ deux réels et f une fonction définie, continue et strictement croissante sur $[a ; b]$, qui s'annule en un réel α . Parmi quatre fonctions Python proposées (méthode de dichotomie), laquelle donne bien une valeur approchée de α à 0,001 près ?

Le programme correct doit recalculer le milieu $m = \frac{a+b}{2}$ à chaque tour de boucle (et non une seule fois avant la boucle), avec un test d'arrêt `\og tant que l'écart dépasse 0,001 \fg` correctement écrit.

Comme f est strictement croissante sur $[a ; b]$ et s'annule en α , on a $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Si

$f(m) < 0$, alors α se trouve entre m et b : il faut donc remplacer a par m (et garder b) pour l'itération suivante ; sinon, on remplace b par m .

Seule la version qui recalcule m à l'intérieur de la boucle, avec la condition 'while abs(b-a) >= 0.001', et l'affectation 'a = m' quand $f(m) < 0$, respecte ce principe.

Réponse : le programme qui recalcule m dans la boucle et affecte $a = m$ lorsque $f(m) < 0$.

5. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont 7 bleues et 3 vertes. On effectue trois tirages successifs avec remise. Quelle expression donne la probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes ?

Chaque tirage est une épreuve à deux issues (\og verte \fg ou pas), de probabilité de succès $p = \frac{3}{10}$, répétée $n = 3$ fois de façon identique et indépendante (tirages avec remise).

En notant X le nombre de boules vertes obtenues, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3 ; \frac{3}{10}\right)$.

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^1 = \binom{3}{2} \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{3}{10}\right)^2.$$

Réponse : $\binom{3}{2} \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{3}{10}\right)^2$.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

Partie A — 1. Une entreprise loue des trottinettes électriques et contrôle leur état chaque lundi. On admet que si une trottinette est en bon état un lundi donné, la probabilité qu'elle le soit encore le lundi suivant est 0,9 ; si elle est en mauvais état, la probabilité qu'elle passe en bon état la semaine suivante est 0,4. On note B_n l'événement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et $p_n = P(B_n)$, avec $p_0 = 1$. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.

Comme la trottinette est en bon état à l'instant 0 ($p_0 = 1$), on a directement $p_1 = P_{B_0}(B_1) = 0,9$.

En construisant l'arbre pondéré sur les deux premières semaines (issues B_1 ou $\overline{B_1}$, puis B_2 ou $\overline{B_2}$ à chaque fois), la formule des probabilités totales donne : $p_2 = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(B_2) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = 0,81 + 0,04 = 0,85$.

On obtient bien $p_1 = 0,9$ et $p_2 = 0,85$.

Partie A — 2. Reproduire et compléter l'arbre pondéré traduisant le passage de la semaine n à la semaine $n + 1$.

L'arbre a pour première branche B_n avec probabilité p_n (puis B_{n+1} avec probabilité 0,9 et $\overline{B_{n+1}}$ avec probabilité 0,1), et pour seconde branche $\overline{B_n}$ avec probabilité $1 - p_n$ (puis B_{n+1} avec probabilité 0,4 et $\overline{B_{n+1}}$ avec probabilité 0,6).

Partie A — 3. En déduire que, pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

Les événements B_n et $\overline{B_n}$ forment une partition de l'univers, donc la formule des probabilités totales donne : $p_{n+1} = P(B_n) \times 0,9 + P(\overline{B_n}) \times 0,4 = 0,9p_n + 0,4(1 - p_n) = 0,9p_n + 0,4 - 0,4p_n$.

Donc, la réponse est $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

Partie A — 4.a Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,8$.

Initialisation : $p_0 = 1 \geq 0,8$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que pour un entier naturel n donné, $p_n \geq 0,8$. Alors, en multipliant par $0,5 > 0$: $0,5p_n \geq 0,4$, puis en ajoutant $0,4$: $0,5p_n + 0,4 \geq 0,8$, c'est-à-dire $p_{n+1} \geq 0,8$. La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : par principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,8$.

Partie A — 4.b Quelle communication l'entreprise peut-elle envisager à partir de ce résultat ?

En interprétant p_n comme la proportion de trottinettes en bon état, l'entreprise peut communiquer sur le fait qu'au moins 80 % de son parc reste en permanence en bon état, quelle que soit la semaine considérée.

Partie A — 5.a On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = p_n - 0,8$. Montrer que (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = (0,5p_n + 0,4) - 0,8 = 0,5p_n - 0,4 = 0,5(p_n - 0,8) = 0,5 u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0,5$, de premier terme $u_0 = p_0 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$.

Partie A — 5.b En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n .

D'après la forme explicite d'une suite géométrique : $u_n = u_0 \times q^n = 0,2 \times 0,5^n$ pour tout entier naturel n . Comme $p_n = u_n + 0,8$, on obtient $p_n = 0,2 \times 0,5^n + 0,8$.

Partie A — 5.c En déduire la limite de la suite (p_n) .

La raison $0,5$ est strictement comprise entre -1 et 1 , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0 + 0,8 = 0,8$.

Partie B — 1. On modélise désormais l'état des trottinettes du parc par une probabilité de bon état égale à 0,8, indépendamment d'une trottinette à l'autre. On note X le nombre de trottinettes en bon état dans un lot de 15, ce prélèvement pouvant être assimilé à un tirage avec remise. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

On répète 15 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve à deux issues (« la trottinette est en bon état », de probabilité 0,8) : X compte le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(15 ; 0,8)$.

Partie B — 2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes du lot soient toutes en bon état.

$$P(X = 15) = 0,8^{15} \approx \mathbf{0,0352} \text{ (arrondi au dix-millième).}$$

Partie B — 3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes du lot soient en bon état.

$$\text{À la calculatrice, } P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx \mathbf{0,9389} \text{ (arrondi au dix-millième).}$$

Partie B — 4. On admet que $E(X) = 12$. Interpréter ce résultat.

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$, on a $E(X) = np = 15 \times 0,8 = 12$. Cela signifie qu'en moyenne, sur un grand nombre de lots de 15 trottinettes prélevées dans le parc, 12 d'entre elles sont en bon état.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 1)

Partie A — 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$. Que vaut u_2 ? a) $\frac{11}{4}$ b) $\frac{13}{2}$ c) 3,5 d) 2,7

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2} \times 0 + 1 = \frac{1}{2} \times 3 + 1 = \frac{5}{2}.$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4} + \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{11}{4}.$$

Donc, la réponse est **a**.

Partie A — 2. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - n$. La suite (v_n) est : a) arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ b) géométrique de raison $\frac{1}{2}$ c) constante d) ni arithmétique ni géométrique

$$\text{Pour tout } n : v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1 - n - 1 = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(u_n - n) = \frac{1}{2}v_n.$$

La relation $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ montre que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Donc, la réponse est **b**.

Partie A — 3. Un script Python incomplet doit renvoyer u_n à partir de $U = u_0 = 3$, avec une boucle ‘for i in range(n) :’ (où i varie de 0 à $n - 1$). Quelle instruction compléter à l’intérieur de la boucle ? a) $U = U/2 + (i+1)/2 + 1$ b) $U = U/2 + n/2 + 1$ c) $U = U/2 + (i-1)/2 + 1$ d) $U = U/2 + i/2 + 1$

Au premier passage dans la boucle, $i = 0$ et le script doit calculer u_1 à partir de u_0 , c’est-à-dire appliquer la relation avec l’indice 0 : $U \leftarrow \frac{U}{2} + \frac{0}{2} + 1$, donc l’instruction doit utiliser i (l’indice courant), pas $i + 1$ ni n .

Seule la formule $U = U/2 + i/2 + 1$ reproduit exactement $u_{i+1} = \frac{1}{2}u_i + \frac{1}{2}i + 1$ à chaque tour.

Donc, la réponse est **d**.

Partie B — 1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $n \leq u_n \leq n + 3$.

- Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 3$, et on a bien $0 \leq 3 \leq 0 + 3$. La propriété est vraie au rang 0.
- Hérédité : supposons que pour un entier n donné, $n \leq u_n \leq n + 3$ (hypothèse de récurrence).
- En multipliant par $\frac{1}{2} > 0$: $\frac{n}{2} \leq \frac{u_n}{2} \leq \frac{n}{2} + \frac{3}{2}$.
- En ajoutant $\frac{n}{2} + 1$ à chaque membre : $n + 1 \leq \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2} + 1 \leq n + \frac{5}{2}$, c’est-à-dire $n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + \frac{5}{2}$.
- Comme $\frac{5}{2} \leq 3$, on obtient $n + 1 \leq u_{n+1} \leq (n + 1) + 3$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.
- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d’après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

Partie B — 2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

D’après la question précédente, $u_n \geq n$ pour tout n , et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$. Par comparaison, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Partie B — 3. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$.

Pour tout entier $n \geq 1$, l’encadrement $n \leq u_n \leq n + 3$ donne, en divisant par $n > 0$: $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{3}{n}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right) = 1$, et la limite de la suite constante égale à 1 est bien sûr 1.

D’après le théorème des gendarmes, la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 2)

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}$. Calculer u_1 .

$$u_1 = \frac{6 \times 8 + 2}{8 + 5} = \frac{50}{13}.$$

2.a Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}$ (de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n). Montrer que f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, puis en déduire que $f(x) > 2$ pour tout réel $x > 2$.

Le dénominateur $x + 5$ ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$ (il vaut au moins 5), donc f y est dérivable, avec $f'(x) = \frac{6(x+5) - (6x+2)}{(x+5)^2} = \frac{28}{(x+5)^2}$.

Ce quotient est strictement positif sur $[0 ; +\infty[$, donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

Par ailleurs $f(2) = \frac{6 \times 2 + 2}{2 + 5} = \frac{14}{7} = 2$. La stricte croissance de f donne alors : pour tout $x > 2$, $f(x) > f(2) = 2$.

2.b Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 2$.

Initialisation : $u_0 = 8 > 2$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons $u_n > 2$ pour un entier n fixé. D'après la question précédente, $f(u_n) > 2$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 2$ puisque $u_{n+1} = f(u_n)$.

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire, donc par récurrence, $u_n > 2$ pour tout entier naturel n .

3. On admet que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}$. Montrer que (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle converge.

Comme $u_n > 2$ pour tout n (question 2.b), on a $u_n + 1 > 3 > 0$ et $u_n + 5 > 7 > 0$: le dénominateur et le second facteur du numérateur sont strictement positifs.

Le signe de $u_{n+1} - u_n$ est donc celui de $2 - u_n$, qui est strictement négatif puisque $u_n > 2$. Ainsi $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n : la suite (u_n) est strictement décroissante.

Étant décroissante et minorée par 2, la suite (u_n) converge, vers une limite ℓ vérifiant $\ell \geq 2$.

4.a On pose $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$ pour tout entier naturel n . Calculer v_0 .

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \frac{8 - 2}{8 + 1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

4.b Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

En remplaçant u_{n+1} par son expression : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{6u_n+2}{u_n+5} - 2}{\frac{6u_n+2}{u_n+5} + 1}$.

En réduisant chaque étage au même dénominateur $u_n + 5$: $v_{n+1} = \frac{(6u_n + 2) - 2(u_n + 5)}{(6u_n + 2) + (u_n + 5)} = \frac{4u_n - 8}{7u_n + 7} = \frac{4(u_n - 2)}{7(u_n + 1)} = \frac{4}{7} v_n$.

La relation $v_{n+1} = \frac{4}{7} v_n$, valable pour tout entier naturel n , montre que (v_n) est géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

4.c Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n) , puis en déduire celle de (u_n) .

Comme (v_n) est géométrique de raison $\frac{4}{7}$ et de premier terme $v_0 = \frac{2}{3}$, on a $v_n = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{7}\right)^n$ pour tout n .

Or $-1 < \frac{4}{7} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$, et par produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

De $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$ et $u_n + 1 > 3$, on tire $u_n - 2 = v_n(u_n + 1)$, quantité qui tend vers 0. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$: la limite ℓ de (u_n) vaut **2**.

5. On considère la fonction Python ‘seuil(A)’ ci-dessous, où A est un réel strictement supérieur à 2, qui simule la suite (u_n) jusqu’à ce que le terme calculé descende à A ou en dessous, et renvoie le rang atteint.

- ‘def seuil(A) :’
- ‘ n = 0’
- ‘ u = 8’
- ‘ while u > A :’
- ‘ u = (6*u + 2) / (u + 5)’
- ‘ n = n + 1’
- ‘ return n’

5. Donner, sans justification, la valeur renvoyée par ‘seuil(2.001)’, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l’exercice.

En simulant la suite terme à terme, on obtient $u_{13} \approx 2,00139$ (encore supérieur à 2,001) puis $u_{14} \approx 2,00079$ (passé sous 2,001) : la fonction renvoie donc **14**.

Cela signifie que u_{14} est le premier terme de la suite strictement inférieur à 2,001.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 2)

Partie A — 1. Des biologistes suivent une population d'insectes qui compte 100 000 individus au départ. En laboratoire, sans prédateur, cette population augmente de 60 % chaque mois. On modélise le nombre d'insectes, en millions, au bout de n mois par une suite (u_n) avec $u_0 = 0,1$. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.

Augmenter de 60 % chaque mois revient à multiplier l'effectif par $1 + \frac{60}{100} = 1,6$ d'un mois sur l'autre : la suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 1,6$ et de premier terme $u_0 = 0,1$.

Or le terme général d'une suite géométrique est $u_n = u_0 \times q^n$. Donc, la réponse est $u_n = 0,1 \times 1,6^n$ pour tout entier naturel n .

Partie A — 2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Comme $1,6 > 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,6^n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1 \times 1,6^n = +\infty$.

Partie A — 3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.

$$u_n > 0,4 \iff 0,1 \times 1,6^n > 0,4 \iff 1,6^n > 4.$$

En passant au logarithme népérien, qui est strictement croissant : $1,6^n > 4 \iff n \ln(1,6) > \ln(4) \iff n > \frac{\ln(4)}{\ln(1,6)}$ (l'inégalité garde son sens car $\ln(1,6) > 0$).

Or $\frac{\ln(4)}{\ln(1,6)} \approx 2,946$. Donc, la réponse est $n = 3$.

Partie A — 4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel (qui impose de ne pas dépasser 400 000 insectes) sera-t-il préservé ?

Comme $u_3 > 0,4$, le nombre d'insectes dépasse 400 000 dès le 3e mois selon ce modèle : l'équilibre du milieu naturel n'est donc pas préservé.

Partie B — 1. Un second modèle, tenant compte des contraintes du milieu, définit une suite (v_n) par $v_0 = 0,1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2$ (nombre d'insectes en millions). Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.

$v_1 = 1,6 \times v_0 - 1,6 \times v_0^2 = 1,6 \times 0,1 - 1,6 \times 0,01 = 0,16 - 0,016 = 0,144$. Donc, la réponse est 144 000 insectes.

Partie B — 2.a On considère la fonction f définie sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$.

Résoudre l'équation $f(x) = x$.

$$f(x) = x \iff 1,6x - 1,6x^2 = x \iff 0,6x - 1,6x^2 = 0 \iff x(0,6 - 1,6x) = 0.$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul, donc $x = 0$ ou $0,6 - 1,6x = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{0,6}{1,6} = \frac{3}{8}$.

Ces deux valeurs appartiennent bien à $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$. Donc, la réponse est : l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions, 0 et $\frac{3}{8}$.

Partie B — 2.b Montrer que f est croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

$$f'(x) = 1,6 - 1,6 \times 2x = 1,6(1 - 2x).$$

Pour $x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, on a $x \leq \frac{1}{2}$, donc $2x \leq 1$ et donc $1 - 2x \geq 0$, d'où $f'(x) \geq 0$.

Donc, la réponse est : f est croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

Partie B — 3.a Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

Initialisation : $v_0 = 0,1$ et $v_1 = 0,144$ (question précédente), donc $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq \frac{1}{2}$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ pour un entier n donné. Comme f est croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ (question 2.b), on peut appliquer f aux trois membres de l'encadrement : $f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\text{Or } f(0) = 0, f(v_n) = v_{n+1}, f(v_{n+1}) = v_{n+2} \text{ et } f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,6 \times \frac{1}{2} - 1,6 \times \frac{1}{4} = 0,8 - 0,4 = 0,4.$$

On obtient donc $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 0,4$, et comme $0,4 \leq \frac{1}{2}$, cela entraîne $0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq \frac{1}{2}$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

Partie B — 3.b Montrer que la suite (v_n) est convergente.

D'après la question précédente, pour tout n , $v_n \leq v_{n+1}$: la suite (v_n) est croissante.

Toujours d'après la question précédente, pour tout n , $v_n \leq \frac{1}{2}$: la suite (v_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

Une suite croissante et majorée converge, d'après le théorème de la convergence monotone. Donc, la réponse est : (v_n) converge.

Partie B — 3.c On note ℓ la limite de (v_n) , solution de $f(x) = x$. Déterminer la valeur de ℓ et conclure sur la préservation de l'équilibre du milieu naturel.

La suite (v_n) est croissante de limite ℓ , donc tous ses termes sont inférieurs ou égaux à ℓ ; en particulier $v_1 \leq \ell$, soit $0,144 \leq \ell$, donc $\ell \neq 0$.

Comme ℓ est solution de $f(x) = x$, elle vaut donc nécessairement $\frac{3}{8}$ (l'autre solution possible étant 0, exclue). Donc $\ell = \frac{3}{8} = 0,375$.

Pour tout n , $v_n \leq \ell = 0,375$, donc le nombre d'insectes restera toujours inférieur à 375 000, valeur qui ne dépasse jamais le seuil de 400 000. Donc, la réponse est : selon ce second modèle, l'équilibre du milieu naturel sera préservé.

Partie B — 4.a On donne la fonction Python ci-dessous, qui simule l'évolution de (v_n) à partir de $v_0 = 0,1$ tant que $v < a$.

• def seuil(a) :	• v = 0.1
• n = 0	•
• while v < a :	•
• v = 1.6*v - 1.6*v*v	•
• n = n + 1	•
• return n	•

Partie B — 4.b Qu'observe-t-on si l'on exécute 'seuil(0.4)' ?

La fonction 'seuil(a)' renvoie le premier rang n à partir duquel $v_n \geq a$. Or on a montré que $v_n \leq 0,375$ pour tout n : il n'existe donc aucun rang n pour lequel $v_n \geq 0,4$. Donc, la réponse est : le programme ne s'arrête jamais (boucle infinie).

Partie B — 4.c Déterminer la valeur renvoyée par 'seuil(0.35)' et interpréter ce résultat.

À la calculatrice, en itérant $v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2$ à partir de $v_0 = 0,1$, on obtient $v_5 \approx 0,338 < 0,35$ et $v_6 \approx 0,358 \geq 0,35$.

Donc, la réponse est : 'seuil(0.35)' renvoie **6**, ce qui signifie que c'est au bout du 6e mois que le nombre d'insectes dépasse pour la première fois 350 000, selon ce second modèle.

Bac Terminale 2023 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

1. Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}$. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .

$$u_1 = \frac{-u_0 - 4}{u_0 + 3} = \frac{0 - 4}{0 + 3} = -\frac{4}{3}.$$

$$u_2 = \frac{-u_1 - 4}{u_1 + 3} = \frac{\frac{4}{3} - 4}{-\frac{4}{3} + 3} = \frac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{8}{5}.$$

2. Compléter la fonction Python ‘terme(n)’, écrite de façon incomplète, pour qu’elle renvoie u_n pour tout entier naturel n .

- ‘def terme(n) :’
- ‘ u = 0’
- ‘ for i in range(n) :’
- ‘ u = (-u - 4) / (u + 3)’
- ‘ return u’

3. Soit f définie sur $] - 3 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-x - 4}{x + 3}$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n . Démontrer que f est strictement croissante sur $] - 3 ; +\infty[$.

f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son ensemble de définition $] - 3 ; +\infty[$, avec (formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$) :

$$f'(x) = \frac{-1 \times (x + 3) - (-x - 4) \times 1}{(x + 3)^2} = \frac{-x - 3 + x + 4}{(x + 3)^2} = \frac{1}{(x + 3)^2}.$$

Sur $] - 3 ; +\infty[$, $(x + 3)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$: donc, la réponse est que f est strictement croissante sur $] - 3 ; +\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-2 < u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation. Pour $n = 0$: $u_0 = 0$ et $u_1 = -\frac{4}{3}$, donc $-2 < -\frac{4}{3} \leq 0$, soit $-2 < u_1 \leq u_0$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons que, pour un entier $n \geq 0$, $-2 < u_{n+1} \leq u_n$ (hypothèse de récurrence).

Comme -2 et u_{n+1} , u_n appartiennent à $] - 3 ; +\infty[$ et que f y est strictement croissante (question 3), on peut appliquer f aux trois membres de l’inégalité : $f(-2) < f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$.

Or $f(-2) = \frac{-(-2) - 4}{-2 + 3} = \frac{-2}{1} = -2$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$: on obtient donc $-2 < u_{n+2} \leq u_{n+1}$, ce qui est la propriété au rang $n + 1$.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire à partir de ce rang : d’après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $-2 < u_{n+1} \leq u_n$.

5. En déduire que la suite (u_n) converge.

D'après la question 4, (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leq u_n$) et minorée par -2 : d'après le théorème de la convergence monotone, (u_n) converge.

6.a Soit (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$ pour tout entier naturel n . Donner v_0 .

$$v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{0 + 2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

6.b Démontrer que (v_n) est arithmétique de raison 1.

Comme $u_n > -2$ pour tout n (question 4), $u_n + 2 > 0$ donc v_n est bien défini et strictement positif pour tout n .

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 2} = \frac{1}{\frac{-u_n - 4}{u_n + 3} + 2} = \frac{1}{\frac{-u_n - 4 + 2(u_n + 3)}{u_n + 3}} = \frac{u_n + 3}{u_n + 2}.$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3}{u_n + 2} - \frac{1}{u_n + 2} = \frac{u_n + 2}{u_n + 2} = 1.$$

Donc, la réponse est : (v_n) est arithmétique de raison 1 (et de premier terme $v_0 = 0,5$).

6.c En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2$.

(v_n) étant arithmétique de raison 1 et de premier terme 0,5 : $v_n = 0,5 + n$ pour tout n .

$$\text{De } v_n = \frac{1}{u_n + 2}, \text{ on tire } u_n + 2 = \frac{1}{v_n}, \text{ donc } u_n = \frac{1}{v_n} - 2 = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

Donc, la réponse est : pour tout $n \geq 1$ (et en fait dès $n = 0$), $u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2$.

6.d Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 0,5) = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + 0,5} = 0, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2.$$

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 1)**1.a. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$.**

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

Initialisation : pour $n = 0$, $2 \times 0,9^0 - 3 = 2 - 3 = -1 = u_0$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que pour un entier n fixé, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$. Alors $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3 = 0,9(2 \times 0,9^n - 3) - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 2,7 - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 3$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Donc, la réponse est que, par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

1.b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leq -1$.

Comme $0 < 0,9 < 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < 0,9^n \leq 1$.

En multipliant par 2 (positif) : $0 < 2 \times 0,9^n \leq 2$, puis en retranchant 3 à chaque membre : $-3 < 2 \times 0,9^n - 3 \leq -1$.

Donc, la réponse est que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leq -1$.

1.c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = (0,9u_n - 0,3) - u_n = -0,1u_n - 0,3$.

D'après la question précédente, $-3 < u_n \leq -1$, donc en multipliant par $-0,1$ (négatif, ce qui inverse les inégalités) : $0,1 \leq -0,1u_n < 0,3$.

En retranchant $0,3$ à chaque membre : $-0,2 \leq -0,1u_n - 0,3 < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n .

Donc, la réponse est que la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

1.d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par -3 (question 1.b) : elle converge donc vers une limite réelle. Comme $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ (car $0 < 0,9 < 1$), on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3$.

Donc, la réponse est que la suite (u_n) converge vers -3 .

2.a. On étudie la fonction g définie sur $] -3 ; -1]$ par $g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x$. Justifier les informations données par le tableau de variations de g (limites, sens de variation, valeur en -1).

Pour $x \in] -3 ; -1]$: $-1,5 < 0,5x \leq -0,5$, donc $0 < 0,5x + 1,5 \leq 1$: g est bien définie (et dérivable) sur cet intervalle.

$g'(x) = \frac{0,5}{0,5x + 1,5} - 1 = \frac{0,5 - (0,5x + 1,5)}{0,5x + 1,5} = \frac{-0,5x - 1}{0,5x + 1,5}$. Le dénominateur étant strictement positif, $g'(x)$ a le signe de $-0,5x - 1$, qui s'annule pour $x = -2$, est positif pour $x < -2$ et négatif pour $x > -2$.

Donc g est strictement croissante sur $] -3 ; -2]$ puis strictement décroissante sur $[-2 ; -1]$.

En $x \rightarrow -3$ (par valeurs supérieures), $0,5x + 1,5 \rightarrow 0^+$ donc $\ln(0,5x + 1,5) \rightarrow -\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = -\infty$.

Enfin $g(-1) = \ln(-0,5 + 1,5) - (-1) = \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1$, et $g(-2) = \ln(-1 + 1,5) + 2 = \ln(0,5) + 2 = 2 - \ln(2) \approx 1,307$.

2.b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -3 ; -1]$, et donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} .

Sur $] -3 ; -2]$, g est continue et strictement croissante, de limite $-\infty$ en -3 jusqu'à $g(-2) = 2 - \ln(2) \approx 1,307 > 0$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

Sur $[-2 ; -1]$, g est décroissante avec $g(-2) \approx 1,307 > 0$ et $g(-1) = 1 > 0$: g ne s'annule pas sur cet intervalle.

Donc, la réponse est que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -3 ; -1]$, et à la calculatrice on obtient l'encadrement $-2,889 < \alpha < -2,888$.

3.a. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \ln(0,5u_n + 1,5)$. En utilisant la formule de la question 1.a, démontrer que (v_n) est arithmétique de raison $\ln(0,9)$.

En remplaçant u_n par son expression $2 \times 0,9^n - 3$: $0,5u_n + 1,5 = 0,5(2 \times 0,9^n - 3) + 1,5 = 0,9^n - 1,5 + 1,5 = 0,9^n$.

Donc $v_n = \ln(0,9^n) = n \ln(0,9)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = (n+1) \ln(0,9) - n \ln(0,9) = \ln(0,9)$, une constante.

Donc, la réponse est que (v_n) est **arithmétique de raison $\ln(0,9)$** (et de premier terme $v_0 = 0$).

3.b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = v_n$ équivaut à $g(u_n) = 0$.

Par définition, $u_n = v_n \iff u_n = \ln(0,5u_n + 1,5) \iff \ln(0,5u_n + 1,5) - u_n = 0 \iff g(u_n) = 0$ (puisque g est précisément définie par $g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x$). Donc, la réponse est que $u_n = v_n \iff g(u_n) = 0$.

3.c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.

Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = \alpha$, c'est-à-dire $2 \times 0,9^k - 3 = \alpha$. Comme $-2,889 < \alpha < -2,888$, cela donnerait $0,111 < 2 \times 0,9^k < 0,112$, soit $0,0555 < 0,9^k < 0,056$.

En appliquant le logarithme népérien (strictement croissant) : $\ln(0,0555) < k \ln(0,9) < \ln(0,056)$. Comme $\ln(0,9) < 0$, diviser inverse les inégalités : $\frac{\ln(0,056)}{\ln(0,9)} < k < \frac{\ln(0,0555)}{\ln(0,9)}$.

Le calcul donne $\frac{\ln(0,056)}{\ln(0,9)} \approx 27,36$ et $\frac{\ln(0,0555)}{\ln(0,9)} \approx 27,44$: il faudrait donc un entier k strictement compris entre 27,36 et 27,44, ce qui est impossible.

Donc, la réponse est qu'il n'existe **aucun rang $k \in \mathbb{N}$** tel que $u_k = \alpha$.

3.d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.

D'après la question 3.b, $u_k = v_k \iff g(u_k) = 0$, ce qui équivaut (par définition de α comme unique solution de $g(x) = 0$ sur $] -3 ; -1]$, intervalle auquel appartient u_k) à $u_k = \alpha$. Or la question 3.c montre qu'aucun rang k ne vérifie $u_k = \alpha$. Donc, la réponse est qu'il n'existe **aucun rang** $k \in \mathbb{N}$ tel que $v_k = u_k$.

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 2)

Partie A — 1. Un athlète doit franchir une haie chaque jour d'entraînement. S'il réussit un jour donné, il réussit à nouveau le lendemain avec une probabilité de 90 % ; s'il échoue un jour donné, il échoue encore le lendemain avec une probabilité de 70 %. On note R_n l'événement « l'athlète franchit la haie à la n -ième séance », $p_n = P(R_n)$, et $p_0 = 0,6$. Reproduire l'arbre pondéré à deux niveaux en complétant les probabilités manquantes.

Sur la branche partant de R_n (de probabilité p_n), les probabilités conditionnelles sont 0,9 vers R_{n+1} et 0,1 vers $\overline{R_{n+1}}$. Sur la branche partant de $\overline{R_n}$ (de probabilité $1 - p_n$), elles sont 0,3 vers R_{n+1} et 0,7 vers $\overline{R_{n+1}}$.

Partie A — 2. En s'appuyant sur l'arbre, justifier que pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3$.

Les événements R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers, donc, par la formule des probabilités totales : $p_{n+1} = P(R_n \cap R_{n+1}) + P(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) = p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,3$.

En développant : $p_{n+1} = 0,9p_n + 0,3 - 0,3p_n = 0,6p_n + 0,3$. Donc, la réponse est $p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3$.

Partie A — 3.a On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = p_n - 0,75$. Montrer que (u_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75 = (0,6p_n + 0,3) - 0,75 = 0,6p_n - 0,45$.

Or $p_n = u_n + 0,75$, donc $u_{n+1} = 0,6(u_n + 0,75) - 0,45 = 0,6u_n + 0,45 - 0,45 = 0,6u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0,6$, de premier terme $u_0 = p_0 - 0,75 = 0,6 - 0,75 = -0,15$.

Partie A — 3.b En déduire que, pour tout entier naturel n , $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$.

Comme (u_n) est géométrique de premier terme $-0,15$ et de raison $0,6$, on a $u_n = -0,15 \times 0,6^n$ pour tout n . Comme $p_n = u_n + 0,75$, on obtient $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$. Donc, la réponse est $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$.

Partie A — 3.c En déduire que (p_n) converge et donner sa limite ℓ .

La raison 0,6 vérifie $-1 < 0,6 < 1$, donc $0,6^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par somme de limites, $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$ tend vers $\ell = 0,75$.

Partie A — 3.d Interpréter la valeur de ℓ dans le contexte de l'exercice.

En assimilant la limite d'une probabilité à une proportion sur le long terme, cela signifie qu'après un grand nombre de séances, l'athlète franchit la haie dans environ 75 % des cas.

Partie B — 1. Après beaucoup d'entraînement, l'entraîneur considère que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de 0,75, indépendamment des haies précédentes. On note X le nombre de haies franchies sur un 400 mètres haies comportant 10 haies. Préciser la loi suivie par X et ses paramètres.

On répète 10 fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues (« franchir » avec probabilité 0,75, « ne pas franchir » avec probabilité 0,25) : X compte le nombre de succès. X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,75)$.

Partie B — 2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,75^{10} \times 0,25^0 = 0,75^{10} \approx \mathbf{0,056}.$$

Partie B — 3. Calculer $P(X \geq 9)$ à 10^{-3} près.

$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$. À la calculatrice, $P(X = 9) = \binom{10}{9} \times 0,75^9 \times 0,25 \approx 0,188$, et $P(X = 10) \approx 0,056$, d'où $P(X \geq 9) \approx \mathbf{0,244}$.

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse. Après une première injection de 1 mg, le patient est placé sous perfusion : toutes les 30 minutes, l'organisme élimine 10 % de la quantité présente et reçoit 0,25 mg supplémentaire. Pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité (en mg) au bout de n périodes de 30 minutes, avec $u_0 = 1$. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.

En 30 minutes, 10 % de $u_0 = 1$ mg disparaissent : il reste $0,9 \times 1 = 0,9$ mg, auxquels s'ajoutent 0,25 mg supplémentaires. Donc $u_1 = 0,9 + 0,25 = \mathbf{1,15}$ mg.

Partie A — 2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.

Au bout de n périodes, la quantité présente est u_n . Pendant la période suivante, 10 % de cette quantité disparaît, il en reste donc $0,9u_n$, puis 0,25 mg supplémentaires sont administrés. D'où, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.

Partie A — 3.a Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 5$.

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,15$, donc $u_0 \leq u_1 < 5$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq u_{n+1} < 5$. En multipliant par $0,9 > 0$: $0,9u_n \leq 0,9u_{n+1} < 4,5$. En ajoutant $0,25$ à chaque membre : $0,9u_n + 0,25 \leq 0,9u_{n+1} + 0,25 < 4,75$, soit $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 4,75 < 5$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 5$.

Partie A — 3.b En déduire que la suite (u_n) est convergente.

L'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$ montre que (u_n) est croissante, et l'inégalité $u_{n+1} < 5$ montre qu'elle est majorée par 5. Une suite croissante et majorée étant convergente, **la suite (u_n) converge** vers une limite $\ell \leq 5$.

Partie A — 4.a Le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang est supérieure ou égale à 1,8 mg. Recopier et compléter le script Python suivant afin de déterminer au bout de combien de périodes de 30 minutes le médicament devient réellement efficace : `def efficace() :` / `'u = 1'` / `'n = 0'` / `'while ... :'` / `' u = ...'` / `' n = n + 1'` / `'return n'`.

- La condition de la boucle `'while'` doit rester vraie tant que le médicament n'est pas encore efficace, donc tant que `'u < 1.8'`.
- L'instruction à répéter doit reproduire la relation de récurrence : `'u = 0.9 * u + 0.25'`.
- Le script complété est donc : `'def efficace() :` puis `'u = 1'`, `'n = 0'`, `'while u < 1.8 :'`, `' u = 0.9 * u + 0.25'`, `' n = n + 1'`, puis `'return n'`.

Partie A — 4.b Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

En itérant la relation $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$ à partir de $u_0 = 1$, on obtient $u_7 \approx 1,783 < 1,8$ et $u_8 \approx 1,854 \geq 1,8$.

Le script renvoie donc $n = 8$: le médicament devient réellement efficace au bout de 8 périodes de 30 minutes, soit **4 heures** après le début de la perfusion.

Partie A — 5.a Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 2,5 - u_n$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$$\text{Pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = 2,5 - u_{n+1} = 2,5 - (0,9u_n + 0,25) = 2,25 - 0,9u_n.$$

$$\text{Or } u_n = 2,5 - v_n, \text{ donc } v_{n+1} = 2,25 - 0,9(2,5 - v_n) = 2,25 - 2,25 + 0,9v_n = 0,9v_n.$$

La relation $v_{n+1} = 0,9v_n$ étant vraie pour tout entier naturel n , (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9, de premier terme $v_0 = 2,5 - u_0 = 2,5 - 1 = 1,5$.

Partie A — 5.b Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

(v_n) étant géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = 1,5$, on a, pour tout entier naturel n , $v_n = 1,5 \times 0,9^n$. Comme $u_n = 2,5 - v_n$, on en déduit que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

Partie A — 5.c Le médicament devient toxique lorsque sa quantité dans le sang dépasse 3 mg. D'après ce modèle, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Comme $-1 < 0,9 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2,5 - 1,5 \times 0 = 2,5$.

De plus, pour tout entier naturel n , $0,9^n > 0$, donc $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n < 2,5 < 3$: la quantité de médicament reste toujours strictement inférieure à 2,5 mg.

Donc, la réponse est que le traitement ne présente aucun risque de toxicité pour le patient, la quantité de médicament restant en permanence inférieure à 3 mg.

Partie B — 1. Après une injection initiale de 1 mg, le patient est placé sous perfusion à un débit de 0,5 mg par heure. La quantité de médicament dans le sang, en fonction du temps t (en heures), est modélisée par $f(t) = 2,5 - 1,5e^{-0,2t}$ sur $[0 ; +\infty[$. Le médicament est-il réellement efficace au bout de 3 h 45 min ?

$$3 \text{ h } 45 \text{ min} = 3 + \frac{45}{60} = 3 + 0,75 = 3,75 \text{ heures.}$$

$$f(3,75) = 2,5 - 1,5e^{-0,2 \times 3,75} = 2,5 - 1,5e^{-0,75} \approx 1,791.$$

Comme $1,791 < 1,8$, le médicament n'est pas encore réellement efficace au bout de 3 h 45 min selon ce modèle.

Partie B — 2. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps le médicament devient réellement efficace.

$$\text{On cherche } t \geq 0 \text{ tel que } f(t) \geq 1,8, \text{ soit } 2,5 - 1,5e^{-0,2t} \geq 1,8 \iff 1,5e^{-0,2t} \leq 0,7 \iff e^{-0,2t} \leq \frac{7}{15}.$$

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante, cette inégalité équivaut à $-0,2t \leq \ln\left(\frac{7}{15}\right)$, soit, en divisant par $-0,2 < 0$ (ce qui inverse le sens), $t \geq -5 \ln\left(\frac{7}{15}\right)$.

Or $-5 \ln \left(\frac{7}{15} \right) \approx 3,811$ heures, soit 3 heures et $0,811 \times 60 \approx 48,6$ minutes. Donc, la réponse est que le médicament devient réellement efficace au bout d'environ **3 h 49 min**.

Partie B — 3. Comparer le résultat obtenu avec celui de la question 4.b du modèle discret de la Partie A.

Dans le modèle discret, le médicament devient efficace au bout de 4 heures, alors que dans le modèle continu il le devient au bout d'environ 3 h 49 min, un délai plus court. **Le modèle continu prévoit donc une efficacité un peu plus rapide que le modèle discret.**

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 2)

1.a On étudie le développement d'une bactérie, qui a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et 0,7 de se diviser en deux bactéries filles, ces probabilités étant les mêmes à chaque génération. On note p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie, avec $p_0 = 0,3$ et $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$ pour tout entier naturel n . Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 , et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.

$$p_1 = 0,3 + 0,7 \times p_0^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,3^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,09 = 0,3 + 0,063 = 0,363.$$

$$p_2 = 0,3 + 0,7 \times p_1^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,363^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,131769 = 0,3 + 0,0922383 = 0,3922383.$$

Donc, la réponse est $p_1 = 0,363$ et $p_2 = 0,3922383$: p_1 est la probabilité d'obtenir au plus une descendance (c'est-à-dire de mourir sans descendance, ou de se diviser puis que les deux bactéries filles meurent sans descendance), et p_2 celle d'obtenir au plus deux descendances.

1.b Sachant que $p_{10} \approx 0,42802018$ (valeur fournie par une feuille de calcul), quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?

L'évènement « obtenir au moins 11 descendances » est l'évènement contraire de « obtenir au plus 10 descendances », de probabilité p_{10} .

La probabilité cherchée vaut donc $1 - p_{10} \approx 1 - 0,42802018 \approx 0,57198$.

Donc, la réponse est environ 0,572 (à 10^{-3} près).

1.c En observant que les valeurs successives de p_n (fournies par une feuille de calcul) augmentent progressivement de 0,3 vers une valeur proche de 0,4285, formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n) .

Au vu de ces valeurs, la suite (p_n) semble croissante, et semble converger vers une limite proche de 0,4285 (les derniers termes calculés se rapprochant de plus en plus les uns des autres autour de cette valeur).

2.a Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n , $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

Initialisation : on a $p_0 = 0,3$ et $p_1 = 0,363$ (question 1.a), donc $0 \leq 0,3 \leq 0,363 \leq 0,5$, c'est-à-dire $0 \leq p_0 \leq p_1 \leq 0,5$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

La fonction carré étant croissante sur $[0 ; +\infty[$, on en déduit $0 \leq p_n^2 \leq p_{n+1}^2 \leq 0,5^2$, puis en multipliant chaque membre par $0,7 > 0$: $0 \leq 0,7p_n^2 \leq 0,7p_{n+1}^2 \leq 0,7 \times 0,25$.

En ajoutant $0,3$ à chaque membre : $0,3 \leq 0,3 + 0,7p_n^2 \leq 0,3 + 0,7p_{n+1}^2 \leq 0,3 + 0,175$, c'est-à-dire $0,3 \leq p_{n+1} \leq p_{n+2} \leq 0,475$.

Comme $0 \leq 0,3$ et $0,475 \leq 0,5$, on obtient $0 \leq p_{n+1} \leq p_{n+2} \leq 0,5$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

2.b Justifier que la suite (p_n) est convergente.

D'après la question précédente, la suite (p_n) est croissante (car $p_n \leq p_{n+1}$ pour tout n) et majorée par $0,5$. Donc, la réponse est que, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (p_n) est convergente.

3.a On note L la limite de la suite (p_n) . Justifier que L est solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.

Comme (p_n) converge vers L , la suite (p_{n+1}) converge aussi vers L (suite extraite en décalant les indices).

En passant à la limite dans la relation de récurrence $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$ (la fonction carré étant continue), on obtient $L = 0,3 + 0,7L^2$, soit $0,7L^2 - L + 0,3 = 0$.

Donc, la réponse est que L est bien solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.

3.b Déterminer la limite de la suite (p_n) .

Le discriminant de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$ vaut $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 0,7 \times 0,3 = 1 - 0,84 = 0,16 = 0,4^2 > 0$: l'équation admet donc deux solutions distinctes.

$$x_1 = \frac{1 + 0,4}{2 \times 0,7} = \frac{1,4}{1,4} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{1 - 0,4}{2 \times 0,7} = \frac{0,6}{1,4} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}.$$

D'après la question 2.a, la suite (p_n) est majorée par $0,5$, donc sa limite L vérifie $L \leq 0,5$: la solution $x_1 = 1$ est donc à exclure.

Donc, la réponse est $L = \frac{3}{7}$ (soit environ $0,4286$, cohérent avec la conjecture de la question 1.c).

4. La fonction Python ci-dessous doit renvoyer, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite (p_n) : ‘def suite(n) :’ puis, en corps de fonction, une ligne d’initialisation de ‘p’, une ligne ‘s=[p]’, une boucle ‘for i in range(...)’ contenant une ligne de mise à jour de ‘p’ et une ligne ‘s.append(p)’, puis ‘return(s)’. Recopier cette fonction en complétant les lignes d’initialisation, de boucle et de mise à jour.

- def suite(n) :
- p = 0.3
- s = [p]
- for i in range(n - 1) :
- p = 0.3 + 0.7 * p2
- s.append(p)
- return(s)

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Peut-on affirmer qu’elle diverge vers $+\infty$, qu’elle diverge vers $-\infty$, qu’elle n’a pas de limite, ou qu’elle converge ?

Pour tout entier naturel n , on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. Comme $n+1 \geq 1 > 0$, en divisant par $n+1$:

$$-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n+1}\right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc, d’après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La suite (u_n) admet donc une limite finie : **elle converge**.

2. On considère deux suites (v_n) et (w_n) liées par $w_n = e^{-2v_n} + 2$. Soit a un réel strictement positif, avec $v_0 = \ln(a)$. Que vaut w_0 : $\frac{1}{a^2} + 2$, $\frac{1}{a^2 + 2}$, $-2a + 2$, ou $\frac{1}{-2a} + 2$?

On remplace v_0 par $\ln(a)$ dans l’expression de w_0 : $w_0 = e^{-2v_0} + 2 = e^{-2\ln(a)} + 2$.

Or $e^{-2\ln(a)} = e^{\ln(a^{-2})} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ (car $a > 0$), donc $w_0 = \frac{1}{a^2} + 2$.

Donc, la réponse est $w_0 = \frac{1}{a^2} + 2$.

3. On sait que la suite (v_n) de la question précédente est croissante. Peut-on affirmer que (w_n) est décroissante et majorée par 3, décroissante et minorée par 2, croissante et majorée par 3, ou croissante et minorée par 2 ?

Comme (v_n) est croissante, pour tout entier naturel n : $v_n \leq v_{n+1}$, donc $-2v_n \geq -2v_{n+1}$ (multiplication par -2 , qui renverse le sens de l'inégalité).

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cette inégalité entraîne $e^{-2v_n} \geq e^{-2v_{n+1}}$, puis, en ajoutant 2 des deux côtés : $e^{-2v_n} + 2 \geq e^{-2v_{n+1}} + 2$, soit $w_n \geq w_{n+1}$.

La suite (w_n) est donc décroissante.

Par ailleurs, pour tout réel β , $e^\beta > 0$, donc $w_n = e^{-2v_n} + 2 > 2$ pour tout entier naturel n : la suite (w_n) est minorée par 2.

Donc, la réponse est : la suite (w_n) est décroissante et minorée par 2.

4. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}$.

Pour tout entier naturel n , laquelle de ces expressions donne a_n : $4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2$, $-\frac{2}{3^n} + 4$,

$4 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$, ou $2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8n}{3}$?

Cherchons le réel ℓ tel que la suite constante égale à ℓ soit solution de la relation de récurrence :

$$\ell = \frac{1}{3}\ell + \frac{8}{3} \iff \frac{2}{3}\ell = \frac{8}{3} \iff \ell = 4.$$

Posons alors, pour tout entier naturel n , $b_n = a_n - 4$. On a $b_{n+1} = a_{n+1} - 4 = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3} - 4 = \frac{1}{3}(b_n + 4) + \frac{8}{3} - 4 = \frac{1}{3}b_n + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} - 4 = \frac{1}{3}b_n + 4 - 4 = \frac{1}{3}b_n$.

La suite (b_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = a_0 - 4 = 2 - 4 = -2$.

Pour tout entier naturel n : $b_n = b_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{2}{3^n}$.

Donc $a_n = b_n + 4 = -\frac{2}{3^n} + 4$.

5. On considère une suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n , $b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right)$. Peut-on affirmer que cette suite est croissante, décroissante, non monotone, ou que son sens de variation dépend de b_0 ?

Pour tout entier naturel n : $b_{n+1} - b_n = \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right)$.

Or, quel que soit le réel b_n , on a $(b_n)^2 \geq 0$, donc $(b_n)^2 + 3 \geq 3$.

Comme $3 > 2$, on en déduit $(b_n)^2 + 3 > 2$, donc $0 < \frac{2}{(b_n)^2 + 3} < 1$.

La fonction logarithme népérien étant strictement négative sur $]0 ; 1[$, on a $\ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right) < 0$, donc $b_{n+1} - b_n < 0$.

Cette inégalité est vraie pour tout entier naturel n , quel que soit le premier terme b_0 : donc, la réponse est que la suite (b_n) est décroissante.

6. On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthogonal. La courbe $\mathcal{C}_g$ admet-elle une asymptote verticale et une asymptote horizontale, une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale, aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale, ou aucune des deux ?

Au voisinage de 0 (avec $x > 0$) : $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0^+$, donc, par quotient de limites, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$: la courbe $\mathcal{C}_g$ admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

Au voisinage de $+\infty$: par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (l'exponentielle l'emporte sur x). La courbe $\mathcal{C}_g$ ne présente donc aucune asymptote horizontale en $+\infty$.

Donc, la réponse est : la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{x^2+1}$, et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Laquelle de ces expressions donne $F(x)$ pour tout réel x : $\frac{1}{2}x^2 e^{x^2+1}$, $(1 + 2x^2) e^{x^2+1}$, e^{x^2+1} , ou $\frac{1}{2}e^{x^2+1}$?

Posons $u(x) = x^2 + 1$, de dérivée $u'(x) = 2x$. On peut alors écrire $f(x) = x e^{x^2+1} = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{u(x)} = \frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$.

Or une primitive de $u' e^u$ est e^u , donc une primitive de $\frac{1}{2} u' e^u$ est $\frac{1}{2} e^u$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} e^{x^2+1}$.

Vérification directe : si $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2+1}$, alors $F'(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2+1} = x e^{x^2+1} = f(x)$, ce qui confirme le résultat.

Donc, la réponse est $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2+1}$.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 1)

Dans un pays, 7 % de la population est atteinte d'une certaine maladie. Un test de dépistage a été mis au point : chez les personnes malades, le test est négatif dans 20 % des cas ; chez les personnes saines, le test est positif dans 1 % des cas. On choisit une personne au hasard dans la population et on la teste. On note M l'évènement « la personne est malade » et T l'évènement « le test est positif ». 1. Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$ (un arbre pondéré peut aider).

On construit un arbre pondéré à deux niveaux. Le premier niveau distingue M (probabilité $P(M) = 0,07$) et $\overline{M}$ (probabilité $P(\overline{M}) = 1 - 0,07 = 0,93$).

Chez les malades, le test est négatif dans 20 % des cas, donc positif dans les 80 % restants : $P_M(T) = 0,8$ et $P_M(\overline{T}) = 0,2$.

Chez les personnes saines, le test est positif dans 1 % des cas : $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,99$.

D'après la définition des probabilités conditionnelles sur une branche de l'arbre : $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = \mathbf{0,056}$.

2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie soit positif vaut 0,0653.

Les évènements M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers (chaque personne est soit malade, soit saine). D'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$.

On calcule la seconde branche : $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093$.

D'où $P(T) = 0,056 + 0,0093 = \mathbf{0,0653}$, ce qui est le résultat annoncé.

3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?

$P_M(T)$ est la probabilité que le test soit positif sachant que la personne est malade : c'est une caractéristique technique du test, fixée à l'avance et connue avant tout dépistage.

$P_T(M)$ est la probabilité que la personne soit réellement malade sachant que son test est positif : c'est l'information qui intéresse un patient ou un médecin une fois le résultat du test obtenu.

Donc, la réponse est que, dans un contexte de dépistage, il est plus pertinent de connaître $P_T(M)$, qui répond directement à la question « ce test positif signifie-t-il vraiment que je suis malade ? ».

4. On considère que la personne choisie a eu un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? (arrondir au centième)

D'après la définition de la probabilité conditionnelle : $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,056}{0,0653}$.

Donc, la réponse est $P_T(M) \approx \mathbf{0,86}$ au centième près.

5.a On choisit, avec remise, 10 personnes au hasard dans la population, et X compte parmi elles le nombre de tests positifs. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .

Le tirage avec remise assure l'indépendance des 10 tirages, chacun ayant deux issues possibles (test positif ou non) avec la même probabilité de succès $p = P(T) = 0,0653$ à chaque tirage. Donc, la réponse est que X suit la **loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,0653$** .

5.b Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif (arrondir au centième).

D'après la formule de la loi binomiale : $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^8$.

Donc, la réponse est $P(X = 2) \approx 0,11$ au centième près.

6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif soit supérieure à 99 %.

Soit n le nombre de personnes testées et Y la variable aléatoire qui compte, parmi elles, le nombre de tests positifs. Le tirage avec remise assure que Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,0653$.

L'évènement contraire de « au moins un test positif » est « aucun test positif », c'est-à-dire $Y = 0$. On cherche donc le plus petit entier n tel que $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) \geq 0,99$.

Or $P(Y = 0) = (1 - 0,0653)^n = 0,9347^n$, donc l'inégalité devient $1 - 0,9347^n \geq 0,99 \iff 0,9347^n \leq 0,01$.

En appliquant le logarithme népérien, strictement croissant, des deux côtés : $n \ln(0,9347) \leq \ln(0,01)$. Comme $\ln(0,9347) < 0$, diviser par ce nombre inverse le sens de l'inégalité : $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9347)}$.

À la calculatrice, $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9347)} \approx 68,19$. Le plus petit entier n vérifiant cette inégalité est donc $n = 69$ (on vérifie qu'avec $n = 68$, $1 - 0,9347^{68} \approx 0,9899 < 0,99$, alors qu'avec $n = 69$, $1 - 0,9347^{69} \approx 0,9905 \geq 0,99$).

Donc, la réponse est qu'il faut tester au minimum **69 personnes**.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 2)

1. Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'évolution de la population est modélisée par la suite (u_n) définie par $u_0 = 40$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,008u_n(200 - u_n)$, où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$. Donner une estimation du nombre d'oiseaux au début de l'année 2022.

L'année 2022 correspond à $2021 + 1$, donc le nombre d'oiseaux recherché est estimé par u_1 .

$$u_1 = 0,008 u_0(200 - u_0) = 0,008 \times 40 \times (200 - 40) = 0,008 \times 40 \times 160 = 51,2.$$

Donc, la réponse est qu'on estime la population à environ 51 oiseaux au début de l'année 2022.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$. Résoudre dans $[0 ; 100]$ l'équation $f(x) = x$.

$$\text{Pour } x \in [0 ; 100] : f(x) = x \iff 0,008x(200 - x) = x \iff 1,6x - 0,008x^2 = x \iff 0,008x^2 - 0,6x = 0.$$

$$\text{En factorisant : } 0,008x^2 - 0,6x = 0 \iff x(0,008x - 0,6) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 0,008x - 0,6 = 0.$$

$$\text{L'équation } 0,008x - 0,6 = 0 \text{ donne } x = \frac{0,6}{0,008} = 75, \text{ valeur bien comprise dans } [0 ; 100].$$

Donc, la réponse est que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions dans $[0 ; 100]$: 0 et 75.

3.a Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0 ; 100]$ et dresser son tableau de variations.

$$\text{Pour tout } x \text{ de } [0 ; 100], \text{ en développant : } f(x) = 0,008x(200 - x) = 1,6x - 0,008x^2 = -0,008x^2 + 1,6x.$$

f est donc une fonction polynôme du second degré, de coefficient dominant $-0,008 < 0$: sa courbe représentative est une parabole tournée vers le bas, dont le sommet a pour abscisse $x_S =$

$$-\frac{1,6}{2 \times (-0,008)} = \frac{1,6}{0,016} = 100.$$

Une telle fonction est strictement croissante sur $]-\infty ; x_S]$ et strictement décroissante sur $[x_S ; +\infty[$. Comme $x_S = 100$ est la borne droite de $[0 ; 100]$, f est donc strictement croissante sur tout l'intervalle $[0 ; 100]$.

On calcule les valeurs aux bornes : $f(0) = 0,008 \times 0 \times 200 = 0$ et $f(100) = 0,008 \times 100 \times 100 = 80$. Le tableau de variations de f sur $[0 ; 100]$ montre donc une croissance stricte de 0 (en $x = 0$) à 80 (en $x = 100$).

3.b En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$.

Pour tout entier naturel n , notons P_n la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$ ».

Initialisation. On a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51,2$ (question 1), donc $0 \leq 40 \leq 51,2 \leq 100$: la propriété P_0 est vraie.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que P_n est vraie, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$. Les trois nombres 0 , u_n , u_{n+1} et 100 appartiennent à $[0 ; 100]$, et f est croissante sur cet intervalle (question 3.a), donc l'inégalité est conservée par f : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(100)$.

Or $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ (par définition de la suite) et $f(100) = 80$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 80$. Comme $80 \leq 100$, on en déduit $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 100$: la propriété P_{n+1} est vraie.

Conclusion. La propriété P_0 est vraie, et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$.

3.c En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est donc croissante.

De plus, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 100$: la suite (u_n) est donc majorée par 100.

Une suite croissante et majorée converge, donc, la réponse est que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ .

3.d Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

La suite (u_n) converge vers ℓ et est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est continue sur $[0 ; 100]$ (car f est une fonction polynôme) et où l'intervalle $[0 ; 100]$ contient tous les termes de la suite ainsi que sa limite ℓ (d'après la question 3.b).

D'après le théorème du point fixe, ℓ est donc solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[0 ; 100]$, dont on a montré (question 2) qu'elle admet exactement deux solutions : 0 et 75.

Par ailleurs, la suite (u_n) est croissante à partir de $u_0 = 40$ (question 3.b), donc $\ell \geq 40$. Cela exclut la solution 0, donc $\ell = 75$.

Donc, la réponse est que la suite converge vers $\ell = 75$. Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que, selon ce modèle, la population d'oiseaux de la colonie se stabilise à long terme autour de 75 individus.

4. On considère l'algorithme Python suivant, où 'p' est un réel donné.

- | | |
|-----------------------------|--|
| • def seuil(p) : | • # fonction qui cherche l'année où le seuil p est dépassé |
| • n = 0 | • # compteur d'années écoulées depuis 2021 |
| • u = 40 | • # valeur initiale u ₀ |
| • while u < p : | • # tant que le seuil n'est pas atteint |
| • n = n + 1 | • # on avance d'une année |
| • u = 0.008 * u * (200 - u) | • # on applique la relation de récurrence |
| • return (n + 2021) | • # on renvoie l'année correspondante |

4. (suite) L'exécution de 'seuil(100)' ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi, à l'aide de la question 3.

La fonction 'seuil(p)' calcule successivement les termes de la suite (u_n) en partant de $u_0 = 40$, et s'arrête dès qu'un terme atteint ou dépasse la valeur 'p', en renvoyant alors l'année correspondante.

Or, d'après la question 3, la suite (u_n) est croissante et converge vers $\ell = 75$: tous ses termes restent donc strictement inférieurs à 75, et a fortiori strictement inférieurs à 100.

Ainsi, pour 'p = 100', la condition 'u < p' (c'est-à-dire $u_n < 100$) reste vraie pour toutes les valeurs successives de n : la boucle 'while' ne s'arrête donc jamais, et la fonction tourne indéfiniment sans jamais renvoyer de résultat.

Bac Terminale 2021 — Métropole, Mayotte, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

Partie I — Cécile sort des gâteaux du congélateur, où ils étaient à -19°C , pour les poser sur une terrasse à 25°C . Au bout de 10 minutes, ils sont à $1,3^\circ\text{C}$. En supposant que la température augmente à vitesse constante (même hausse chaque minute), quelle serait la température des gâteaux au bout de 25 minutes ? Ce modèle est-il pertinent ?

En 10 minutes, la température a augmenté de $1,3 - (-19) = 20,3^\circ\text{C}$, soit une hausse constante supposée de $\frac{20,3}{10} = 2,03^\circ\text{C}$ par minute.

Au bout de 25 minutes, la hausse totale serait de $25 \times 2,03 = 50,75^\circ\text{C}$, donc une température de $-19 + 50,75 = 31,75^\circ\text{C}$.

Or la température de la terrasse est de 25°C : les gâteaux ne peuvent pas dépasser cette température ambiante. Donc, **ce modèle n'est pas pertinent**.

Partie II — On note T_n la température des gâteaux, en degré Celsius, n minutes après leur sortie du congélateur, avec $T_0 = -19$. On admet la relation $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$ pour tout entier naturel n . 1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$.

En développant : $T_{n+1} - T_n = -0,06 T_n + 0,06 \times 25 = -0,06 T_n + 1,5$.

D'où $T_{n+1} = T_n - 0,06 T_n + 1,5 = 0,94 T_n + 1,5$.

2. Calculer T_1 et T_2 (arrondir au dixième).

Avec $n = 0$: $T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = -17,86 + 1,5 = -16,36$, soit $T_1 \approx -16,4$.

Avec $n = 1$: $T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5 = -15,3784 + 1,5 = -13,8784$, soit $T_2 \approx -13,9$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $T_n \leq 25$. Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'énoncé ?

Initialisation. $T_0 = -19 \leq 25$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons que, pour un entier n , $T_n \leq 25$. En multipliant par $0,94 > 0$: $0,94 T_n \leq 0,94 \times 25 = 23,5$.

En ajoutant 1,5 aux deux membres : $0,94 T_n + 1,5 \leq 25$, soit $T_{n+1} \leq 25$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $T_n \leq 25$.

Ce résultat était prévisible : la température des gâteaux ne peut pas dépasser la température ambiante de la terrasse, qui est justement de 25°C .

4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n) .

D'après la relation de récurrence, $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$.

D'après la question précédente, $T_n \leq 25$ pour tout n , donc $T_n - 25 \leq 0$, donc $-0,06 \times (T_n - 25) \geq 0$.

Ainsi $T_{n+1} - T_n \geq 0$ pour tout n : la suite (T_n) est **croissante**.

5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.

La suite (T_n) est croissante (question précédente) et majorée par 25 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite ℓ vérifiant $\ell \leq 25$.

6.a On pose, pour tout entier naturel n , $U_n = T_n - 25$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0,94 T_n + 1,5 - 25 = 0,94 T_n - 23,5$.

Or $0,94 \times (T_n - 25) = 0,94 T_n - 23,5$, donc $U_{n+1} = 0,94 \times (T_n - 25) = 0,94 U_n$.

La suite (U_n) est donc **géométrique de raison** 0,94, de premier terme $U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44$.

6.b En déduire que, pour tout entier naturel n , $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$.

Comme (U_n) est géométrique de raison 0,94 et de premier terme -44 : $U_n = -44 \times 0,94^n$ pour tout n .

Or $U_n = T_n - 25$, donc $T_n = U_n + 25 = -44 \times 0,94^n + 25$.

6.c En déduire la limite de la suite (T_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Comme $0 < 0,94 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$, donc par somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 25$.

Cela signifie que la température des gâteaux se rapproche indéfiniment de la température ambiante de la terrasse, 25°C , sans jamais la dépasser, ce qui est cohérent avec la situation physique.

7.a Le fabricant conseille de consommer les gâteaux une demi-heure après leur sortie du congélateur. Quelle température ont-ils alors atteinte (arrondir à l'entier le plus proche) ?

Avec $n = 30$ minutes : $T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25 \approx 18,1$. Donc, les gâteaux ont atteint une température d'environ **18 °C**.

7.b Cécile aime déguster ces gâteaux encore frais, à 10°C . Donner un encadrement, entre deux entiers consécutifs, du nombre de minutes après lesquelles elle doit les déguster.

À la calculatrice, $T_{17} \approx 9,6$ et $T_{18} \approx 10,6$: la température franchit donc 10°C entre les minutes 17 et 18.

Donc, Cécile doit déguster son gâteau **entre la 17^e et la 18^e minute** après sa sortie du congélateur.

7.c Le programme Python suivant doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geq 10$. Recopier et compléter les lignes manquantes.

- def seuil() :
- n = 0
- T = -19
- while T < 10 :

- $T = 0.94 * T + 1.5$
- $n = n + 1$
- return n

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 1)

1. Une influenceuse compte $u_0 = 1\,000$ abonnés en 2020. Chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés puis en gagne 250 nouveaux. On note u_n le nombre d'abonnés en l'année $(2020 + n)$. Calculer u_1 .

Perdre 10 % revient à multiplier par 0,9. Donc $u_1 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = \mathbf{1\,150}$ abonnés.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

Multiplier par 0,9 traduit la perte de 10 % des abonnés d'une année sur l'autre.

On ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

3. Une fonction Python 'suite(n)' initialise ' $u = 1000$ ', puis répète ' n ' fois ' $u = 0.9*u + 250$ ', avant de renvoyer ' u '. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la valeur renvoyée par l'appel 'suite(10)'.

La fonction calcule u_{10} , c'est-à-dire le nombre d'abonnés estimé en l'année 2030 ; la calculatrice donne $u_{10} \approx \mathbf{1\,977}$ abonnés.

4.a Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

Initialisation : $u_0 = 1\,000 \leq 2\,500$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq 2\,500$. Comme $0,9 > 0$, la multiplication conserve l'ordre : $0,9u_n \leq 0,9 \times 2\,500 = 2\,250$, puis en ajoutant 250 aux deux membres, $0,9u_n + 250 \leq 2\,500$, soit $u_{n+1} \leq 2\,500$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

4.b Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.

Or, d'après la question précédente, $u_n \leq 2\,500$, donc $0,1u_n \leq 250$, soit $-0,1u_n + 250 \geq 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est **croissante**.

4.c Dédire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 500 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

5.a On pose $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n . Montrer que (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1\,500$.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500 = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9(u_n - 2\,500) = 0,9v_n$.

La relation $v_{n+1} = 0,9v_n$, vraie pour tout entier naturel n , montre que (v_n) est géométrique de raison 0,9.

Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

5.b Exprimer v_n en fonction de n , puis montrer que $u_n = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

Comme (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1\,500$, pour tout entier naturel n : $v_n = -1\,500 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 2\,500$, donc $u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

5.c Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Comme $0 < 0,9 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc par produit puis somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\,500$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que le nombre d'abonnés de l'influenceuse **se stabilise autour de 2 500** au fil des années.

6. Écrire un programme qui détermine en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200, puis donner cette année.

- $n = 0$
- $u = 1000$
- tant que $u \leq 2200$:
- $u = 0,9 * u + 250$
- $n = n + 1$
- renvoyer n
- En simulant l'évolution terme à terme, on obtient $u_{15} \approx 2\,191,2 \leq 2\,200$ et $u_{16} \approx 2\,222,0 > 2\,200$: le programme renvoie $n = 16$.
- Donc, la réponse est que le nombre d'abonnés dépasse 2 200 la seizième année suivant 2020, c'est-à-dire en **2036**.

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 2)

1. Une application génère un ticket sur une grille 3×3 où trois cases contiennent chacune un cœur, disposées au hasard. Justifier qu'il existe exactement 84 façons différentes de placer ces trois cœurs sur la grille.

Placer trois cœurs sur la grille revient à choisir 3 cases parmi les 9 de la grille, sans tenir compte de l'ordre : le nombre de façons est donc $\binom{9}{3}$.

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \frac{504}{6} = 84.$$

Il y a bien 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur la grille.

2. Un ticket est gagnant si les trois cœurs sont alignés côte à côte sur une même ligne, une même colonne ou une même diagonale. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant vaut $\frac{2}{21}$.

La grille compte 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales, soit 8 alignements possibles de trois cases : il y a donc 8 grilles gagnantes parmi les 84 grilles possibles (équiprobables).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est $\frac{8}{84} = \frac{2}{21}$ (en simplifiant par 4).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est donc bien égale à $\frac{2}{21}$.

3. À chaque ticket généré, le joueur verse 1 € ; si le ticket est gagnant, la société lui reverse 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Soit X le gain algébrique du joueur pour un ticket. Un ticket gagnant rapporte $5 - 1 = 4$ € (le joueur récupère les 5 € mais a déjà versé 1 €), un ticket perdant coûte 1 €.

$$P(X = 4) = \frac{2}{21} \text{ et } P(X = -1) = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}.$$

$$E(X) = 4 \times \frac{2}{21} + (-1) \times \frac{19}{21} = \frac{8 - 19}{21} = -\frac{11}{21} \approx -0,524.$$

L'espérance de gain est négative : en moyenne, le joueur perd environ 0,52 € par ticket généré. Le jeu est donc défavorable au joueur.

4.a Un joueur génère 20 tickets de façon indépendante. Soit X le nombre de tickets gagnants parmi ces 20 tickets. Donner la loi de probabilité de X .

Chaque génération de ticket est une épreuve à deux issues (gagnant / perdant) de probabilité de succès $p = \frac{2}{21}$, répétée $n = 20$ fois de façon indépendante.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{21}$.

4.b Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 5)$, arrondie à 10^{-3} .

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{2}{21}\right)^5 \times \left(\frac{19}{21}\right)^{15} \approx \mathbf{0,027} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

4.c Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$, arrondie à 10^{-3} , puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$$(X \geq 1) \text{ est l'évènement contraire de } (X = 0), \text{ donc } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^{20} \approx 1 - 0,135 \approx \mathbf{0,865} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

Sur 20 tickets générés, le joueur a donc environ 86,5 % de chances d'obtenir au moins un ticket gagnant.

Bac Terminale 2021 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A — 1.a Une centrale solaire compte 10 560 panneaux au 1er janvier 2020. Chaque année, 2 % des panneaux se détériorent et sont retirés, tandis que 250 panneaux neufs sont installés. On modélise le nombre de panneaux par $u_0 = 10\,560$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux au 1er janvier de l'année $2020 + n$. Justifier ce choix de modélisation.

Retirer 2 % des panneaux revient à multiplier leur nombre par $1 - \frac{2}{100} = 0,98$.

En ajoutant ensuite les 250 panneaux neufs installés chaque année, on obtient bien la relation $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, ce qui justifie la modélisation.

Partie A — 1.b À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux dépassera strictement 12 000.

En saisissant $u_0 = 10\,560$ puis en appliquant successivement $u \mapsto 0,98u + 250$, on obtient $u_1 \approx 10\,599$, puis u_2, u_3 , etc.

On trouve $u_{67} \approx 11\,999$ et $u_{68} \approx 12\,009$.

Donc, le nombre de panneaux dépassera 12 000 au bout de **68 ans**, soit en 2088.

Partie A — 1.c Compléter le programme Python suivant pour qu'il stocke dans la variable **n** le nombre d'années trouvé à la question précédente : 'u = 10560' / 'n = 0' / 'while ... : ' / ' u = ... ' / ' n = ... '

- 'while u <= 12000 :'
- ' u = 0.98*u + 250'
- ' n = n + 1'

Partie A — 2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 12\,500$.

Initialisation : $u_0 = 10\,560 \leq 12\,500$, la propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq 12\,500$. En multipliant par 0,98 (positif) : $0,98u_n \leq 0,98 \times 12\,500 = 12\,250$. En ajoutant 250 aux deux membres : $0,98u_n + 250 \leq 12\,500$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 12\,500$: la propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc par récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 12\,500$.

Partie A — 3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 0,98u_n + 250 - u_n = 250 - 0,02u_n$.

D'après la question précédente, $u_n \leq 12\,500$, donc $0,02u_n \leq 0,02 \times 12\,500 = 250$, c'est-à-dire $250 - 0,02u_n \geq 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$: la suite (u_n) est croissante.

Partie A — 4. En déduire que la suite (u_n) converge (sans calculer sa limite).

La suite (u_n) est croissante et majorée par 12 500 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite ℓ vérifiant $\ell \leq 12\,500$.

Partie A — 5.a On pose $v_n = u_n - 12\,500$ pour tout entier naturel n . Démontrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 12\,500 = 0,98u_n + 250 - 12\,500 = 0,98u_n - 12\,250$.

Or $0,98 \times 12\,500 = 12\,250$, donc $v_{n+1} = 0,98u_n - 0,98 \times 12\,500 = 0,98(u_n - 12\,500) = 0,98v_n$.

Cette relation étant vraie pour tout n , (v_n) est **géométrique de raison** 0,98, de premier terme $v_0 = u_0 - 12\,500 = 10\,560 - 12\,500 = -1\,940$.

Partie A — 5.b Exprimer v_n en fonction de n .

(v_n) étant géométrique de premier terme $-1\,940$ et de raison 0,98, on a pour tout entier naturel n : $v_n = -1\,940 \times 0,98^n$.

Partie A — 5.c En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Comme $v_n = u_n - 12\,500$, on a $u_n = v_n + 12\,500$, soit $u_n = 12\,500 - 1\,940 \times 0,98^n$.

Partie A — 5.d Déterminer la limite de (u_n) et interpréter le résultat.

Comme $0 < 0,98 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,98^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12\,500$.

Dans le contexte du modèle, le nombre de panneaux solaires de la centrale se stabilise autour de **12 500** à long terme.

Partie B — 1. Une modélisation plus fine utilise la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 12\,500 - 500e^{-0,02x+1,4}$, où x est le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020. Étudier le sens de variation de f .

f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout x de cet intervalle : $f'(x) = -500 \times (-0,02)e^{-0,02x+1,4} = 10e^{-0,02x+1,4}$.

La fonction exponentielle étant strictement positive, $f'(x) > 0$ pour tout x : **la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.**

Partie B — 2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,02x + 1,4) = -\infty$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,02x+1,4} = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 12\,500$.

Partie B — 3. À l'aide de ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux dépassera 12 000.

On résout $f(x) > 12\,000 \iff 12\,500 - 500e^{-0,02x+1,4} > 12\,000 \iff 500 > 500e^{-0,02x+1,4} \iff 1 > e^{-0,02x+1,4}$.

Comme $1 = e^0$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante, cela équivaut à $0 > -0,02x + 1,4 \iff 0,02x > 1,4 \iff x > 70$.

Donc, il faut attendre strictement plus de 70 ans, soit **71 ans**, pour que le nombre de panneaux dépasse 12 000 selon ce modèle, ce qui correspond à l'année 2091.