

Variables aléatoires — Tous les corrigés

LOGIMATHS

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 1)

A.1.a Donner $P(C)$.

L'énoncé indique directement que 75 % des familles réservent une cabine : $P(C) = \mathbf{0,75}$.

A.1.b Reproduire l'arbre et compléter les quatre pointillés.

- Sur la première branche : $P(V) = 0,3$
- Sur la deuxième branche : $P(\bar{V}) = 0,7$
- Sur les branches issues de V : $P_V(C) = 0,8$ et $P_V(\bar{C}) = 0,2$

A.2 Calculer la probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine.

$$P(V \cap C) = P(V) \times P_V(C) = 0,3 \times 0,8 = \mathbf{0,24}.$$

A.3 Une famille a réservé une cabine. Déterminer la probabilité qu'elle réserve un emplacement pour un véhicule.

$$\text{On cherche } P_C(V) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)}.$$

$$P_C(V) = \frac{0,24}{0,75} = \mathbf{0,32}.$$

A.4 Déterminer la probabilité qu'une famille n'ayant pas réservé de véhicule réserve tout de même une cabine, arrondie à 10^{-2} . Interpréter le résultat.

$$\text{D'après la formule des probabilités totales, } P(C) = P(V) \times P_V(C) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(C).$$

$$0,75 = 0,24 + 0,7 \times P_{\bar{V}}(C)$$

$$P_{\bar{V}}(C) = \frac{0,75 - 0,24}{0,7} = \frac{0,51}{0,7} \approx \mathbf{0,73}.$$

Interprétation : parmi les familles qui ne réservent pas d'emplacement pour un véhicule, environ 73 % réservent tout de même une cabine.

B.1 Justifier que $E(X) = 96$ et que $V(X) = 3114$.

$$E(X) = 0 \times 0,19 + 70 \times 0,06 + 100 \times 0,51 + 170 \times 0,24 = 4,2 + 51 + 40,8 = \mathbf{96}.$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,19 + 70^2 \times 0,06 + 100^2 \times 0,51 + 170^2 \times 0,24 = 294 + 5\,100 + 6\,936 = 12\,330.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 12\,330 - 96^2 = 12\,330 - 9\,216 = \mathbf{3\,114}.$$

B.2.a Justifier que $Z = 0,6(X + Y)$.

Une remise de 40 % revient à ne payer que 60 % du montant total des suppléments et des extras, soit $X + Y$: donc $Z = 0,6(X + Y)$.

B.2.b En déduire que $E(Z) = 120$ et que $V(Z) = 1728$.

$$E(Z) = 0,6 \times (E(X) + E(Y)) = 0,6 \times (96 + 104) = 0,6 \times 200 = 120.$$

$$X \text{ et } Y \text{ étant indépendantes, } V(Z) = 0,6^2 \times (V(X) + V(Y)) = 0,36 \times (3\,114 + 1\,686) = 0,36 \times 4\,800 = 1\,728.$$

B.3.a Montrer que $E(M_n) = 120$ et que $V(M_n) = 1728/n$.

Les variables $Z_1, \dots, Z_n$ suivent toutes la même loi que Z , donc $E(M_n) = \frac{n \times E(Z)}{n} = E(Z) = 120$.

$$\text{Les variables étant indépendantes, } V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times n \times V(Z) = \frac{V(Z)}{n} = \frac{1\,728}{n}.$$

B.3.b Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(114 < M_n < 126) \geq 0,85$. Interpréter.

L'évènement $114 < M_n < 126$ équivaut à $|M_n - 120| < 6$, dont le contraire est $|M_n - 120| \geq 6$.

$$\text{D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, } P(|M_n - 120| \geq 6) \leq \frac{V(M_n)}{6^2} = \frac{1\,728}{36n} = \frac{48}{n}.$$

On veut $P(114 < M_n < 126) \geq 0,85$, soit $P(|M_n - 120| \geq 6) \leq 0,15$: il suffit donc que $\frac{48}{n} \leq 0,15$.

$$n \geq \frac{48}{0,15} = 320.$$

Le plus petit entier qui convient est $n = 320$: un échantillon d'au moins 320 familles garantit, via cette inégalité, que le prix moyen payé a au moins 85 % de chances d'être compris entre 114 € et 126 €.

Bac Terminale 2026 — Métropole (jour 2)

1. Affirmation 1 : Si la personne choisie est une femme, la probabilité qu'elle joue de la Pop est de 0,832 ($P(\text{Pop})=0,52$; parmi les joueurs de Pop, 32 % de femmes ; 20 % de femmes au total).

On note O l'évènement « la personne joue de la Pop » et F l'évènement « la personne est une femme ». On a $P(O) = 0,52$, $P_O(F) = 0,32$, $P(F) = 0,2$, et on cherche $P_F(O)$.

$$P_F(O) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)} = \frac{P(O) \times P_O(F)}{P(F)} = \frac{0,52 \times 0,32}{0,2} = \frac{0,1664}{0,2} = 0,832.$$

L'affirmation 1 est VRAIE.

2. Affirmation 2 : En arrondissant au dixième, $P(X \leq 340) \approx 0,4$ (X = nombre de musiciens professionnels dans un échantillon de 5 000 personnes, taux 6,2 %).

Le choix d'un échantillon de $n = 5\,000$ personnes, assimilable à un tirage avec remise, avec une probabilité de succès $p = 0,062$ à chaque tirage, fait suivre à X la loi binomiale $\mathcal{B}(5\,000; 0,062)$.

À la calculatrice, on obtient $P(X \leq 340) \approx 0,96$, et non 0,4.

L'affirmation 2 est FAUSSE.

3. Affirmation 3 : D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il y a plus de 95 % de chances que X soit strictement compris entre 230 et 390.

Pour la loi binomiale $\mathcal{B}(5\,000; 0,062)$: $E(X) = np = 5\,000 \times 0,062 = 310$ et $V(X) = np(1 - p) = 5\,000 \times 0,062 \times 0,938 = 290,78$.

L'évènement $230 < X < 390$ équivaut à $|X - 310| < 80$, c'est-à-dire au contraire de $|X - 310| \geq 80$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X - 310| \geq 80) \leq \frac{V(X)}{80^2} = \frac{290,78}{6\,400} \approx 0,045$.

Donc $P(230 < X < 390) \geq 1 - 0,045 = 0,955$, soit plus de 95 %.

L'affirmation 3 est VRAIE.

4. Affirmation 4 : On peut former 120 équipes différentes (2 musiciens professionnels parmi 4, et 3 non-professionnels parmi 6).

Le nombre de façons de choisir 2 musiciens professionnels parmi 4 (sans ordre) est $\binom{4}{2} = 6$.

Le nombre de façons de choisir 3 non-professionnels parmi 6 (sans ordre) est $\binom{6}{3} = 20$.

Chaque choix de 2 professionnels peut être associé à chaque choix de 3 non-professionnels : $6 \times 20 = 120$ équipes différentes.

L'affirmation 4 est VRAIE.

Bac Terminale 2026 — Antilles et Guyane (jour 2)

A.1 Recopier et compléter l'arbre pondéré.

$P(A_1) = 0,96$ et $P(\overline{A_1}) = 1 - 0,96 = 0,04$.

D'après l'énoncé : $P_{A_1}(A_2) = 0,94$, $P_{A_1}(\overline{A_2}) = 0,06$, $P_{\overline{A_1}}(A_2) = 0,35$, $P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) = 0,65$.

A.2 Montrer que $P(A_2) = 0,9164$.

A_1 et $\overline{A_1}$ formant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2)$$

$$P(A_2) = 0,96 \times 0,94 + 0,04 \times 0,35 = \mathbf{0,9164}.$$

A.3 Calculer $P_{A_2}(\overline{A_1})$ et interpréter.

$$P_{A_2}(\overline{A_1}) = \frac{P(\overline{A_1} \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0,04 \times 0,35}{0,9164} \approx \mathbf{0,0153} \text{ (arrondi à } 10^{-4}\text{)}.$$

Sachant que le message reçu par le deuxième relai est sans erreur, il y a environ 1,53 % de chances que le message reçu par le premier relai comportait des erreurs.

B.1.a Déterminer la probabilité que 4 tests soient positifs.

$$P(X = 4) = \binom{50}{4} \times 0,04^4 \times 0,96^{46} \approx \mathbf{0,09} \text{ (arrondi au centième)}.$$

B.1.b Donner la probabilité qu'au moins un test soit positif.

À la calculatrice, $P(X \geq 1) \approx \mathbf{0,87}$ (arrondi au centième).

B.1.c Calculer l'espérance et la variance de X.

X suit la loi binomiale $(50; 0,04)$, donc $E(X) = 50 \times 0,04 = \mathbf{2}$ et $V(X) = 50 \times 0,04 \times 0,96 = \mathbf{1,92}$.

B.2.a Vérifier que $E(M) = 2$ et montrer que $V(M) = 0,0768$.

M est la moyenne de 25 variables indépendantes de même loi que X : $E(M) = E(X) = \mathbf{2}$.

$$V(M) = \frac{V(X)}{25} = \frac{1,92}{25} = \mathbf{0,0768}.$$

B.2.b À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $P(M < 7) > 0,99$.

$$P(M < 7) = P(-3 < M < 7) = P(-5 < M - 2 < 5) = 1 - P(|M - 2| \geq 5).$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour $t = 5$: $P(|M - 2| \geq 5) \leq \frac{V(M)}{5^2} = \frac{0,0768}{25} = 0,003072$.

Donc $P(M < 7) \geq 1 - 0,003072 = 0,996928$, qui est bien **supérieur à 0,99**.

C.1 Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} \leq p_n$.

Initialisation : $p_2 = 0,59 \times p_1 + 0,35 = 0,59 \times 0,96 + 0,35 = 0,9164 \leq 0,96 = p_1$: vraie au rang 1.

Hérédité : supposons $p_{n+1} \leq p_n$ pour un n donné. Comme $0,59 > 0$: $0,59p_{n+1} \leq 0,59p_n$, donc $0,59p_{n+1} + 0,35 \leq 0,59p_n + 0,35$, soit $p_{n+2} \leq p_{n+1}$: vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_{n+1} \leq p_n$.

C.2 Montrer que la suite (p_n) est convergente.

La suite (p_n) est décroissante (question C.1) et minorée par 0 (une probabilité est toujours positive) : elle est donc convergente.

C.3 Déterminer la valeur exacte de sa limite.

Notons $f(x) = 0,59x + 0,35$, fonction continue telle que $p_{n+1} = f(p_n)$. D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

$$0,59\ell + 0,35 = \ell \Leftrightarrow 0,35 = 0,41\ell \Leftrightarrow \ell = \frac{35}{41}.$$

La suite (p_n) converge donc vers $\frac{35}{41}$.

Bac Première 2026 — Amérique du Nord (SPE)**A.1 Recopier et compléter l'arbre pondéré (urne à 1 boule rouge, 9 vertes, tirage avec remise).**

$P(R_1) = \frac{1}{10}$, $P(\overline{R}_1) = \frac{9}{10}$; $P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{10}$, $P_{R_1}(\overline{R}_2) = \frac{9}{10}$; $P_{\overline{R}_1}(R_2) = \frac{1}{10}$, $P_{\overline{R}_1}(\overline{R}_2) = \frac{9}{10}$ (tirage avec remise : les probabilités sont les mêmes au 2^e tirage).

A.2.a Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

Le joueur paie 1 € puis reçoit 3 € (deux rouges), 1 € (deux vertes) ou 0 € (sinon) : le gain algébrique prend donc les valeurs $X = 2$ (3–1), $X = 0$ (1–1) et $X = -1$ (0–1).

A.2.b Montrer que $P(X = -1) = \frac{18}{100}$.

$\{X = -1\}$ correspond à une boule rouge et une boule verte (dans un ordre ou l'autre) : $\{X = -1\} = (R_1 \cap \overline{R}_2) \cup (\overline{R}_1 \cap R_2)$, réunion d'événements disjoints.

$$P(X = -1) = P(R_1 \cap \overline{R}_2) + P(\overline{R}_1 \cap R_2) = \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{100} + \frac{9}{100} = \frac{18}{100}.$$

A.2.c Recopier et compléter le tableau de la loi de probabilité de X.

$$P(X = 2) = P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \text{ et } P(X = 0) = P(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2) = \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{81}{100}.$$

$$x_k : -1 ; 0 ; 2 \quad P(X = x_k) : \frac{18}{100} ; \frac{81}{100} ; \frac{1}{100} \text{ (vérification : } \frac{18}{100} + \frac{81}{100} + \frac{1}{100} = 1).$$

A.2.d Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

$$E(X) = (-1) \times \frac{18}{100} + 0 \times \frac{81}{100} + 2 \times \frac{1}{100} = \frac{-18 + 0 + 2}{100} = \frac{-16}{100} = -0,16.$$

Sur un grand nombre de parties, le joueur perd en moyenne 0,16 € (16 centimes) par partie : **le jeu est défavorable au joueur.**

B.1 Démontrer que $E(Y) = (4n^2 - 20n)/100$ (urne à n boules rouges, $10 - n$ vertes).

Comme en partie A, Y prend les valeurs $-1, 0, 2$: $P(Y = 2) = \left(\frac{n}{10}\right)^2 = \frac{n^2}{100}$.

$P(Y = -1) = 2 \times \frac{n}{10} \times \frac{10 - n}{10} = \frac{2n(10 - n)}{100}$ (on ne calcule pas $P(Y = 0)$, sans effet sur l'espérance).

$$E(Y) = 2 \times \frac{n^2}{100} - 1 \times \frac{2n(10 - n)}{100} = \frac{2n^2 - 20n + 2n^2}{100} = \frac{4n^2 - 20n}{100}.$$

B.2 Pour combien de boules rouges le jeu est-il équitable ?

Le jeu est équitable lorsque $E(Y) = 0$: $\frac{4n^2 - 20n}{100} = 0 \iff 4n(n - 5) = 0 \iff n = 0$ ou $n = 5$.

$n = 0$ correspond à une urne sans boule rouge (plus vraiment un jeu de hasard) : la situation pertinente est donc $n = 5$ **boules rouges** (et 5 vertes), pour laquelle le jeu est équitable.

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 1)

Partie A — 1. Les connexions se répartissent : 25 % via A, 15 % via B, le reste via C ; 90 % des connexions via A sont stables, 80 % via B, 85 % via C. Compléter l'arbre pondéré.

Le reste des connexions transite via C, soit $1 - 0,25 - 0,15 = 0,6$, donc $P(C) = 0,6$.

Sur la première branche : $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,15$, $P(C) = 0,6$.

Sur les branches suivantes : $P_A(S) = 0,9$ et $P_A(\bar{S}) = 0,1$; $P_B(S) = 0,8$ et $P_B(\bar{S}) = 0,2$; $P_C(S) = 0,85$ et $P_C(\bar{S}) = 0,15$.

Partie A — 2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à 0,12.

$$P(S \cap B) = P(B) \times P_B(S) = 0,15 \times 0,8 = 0,12.$$

Partie A — 3. Calculer $P(C \cap \bar{S})$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

$$P(C \cap \bar{S}) = P(C) \times P_C(\bar{S}) = 0,6 \times 0,15 = 0,09.$$

Cela signifie que 9 % des connexions de l'entreprise transitent via le serveur C et sont instables.

Partie A — 4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0,855$.

Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) + P(C) \times P_C(S) = 0,25 \times 0,9 + 0,15 \times 0,8 + 0,6 \times 0,85 = 0,225 + 0,12 + 0,51 = 0,855.$$

Partie A — 5. Sachant que la connexion est stable, calculer la probabilité qu'elle ait eu lieu via le serveur B (arrondie au millièmme).

$$P_S(B) = \frac{P(S \cap B)}{P(S)} = \frac{0,12}{0,855} \approx \mathbf{0,140} \text{ (au millièmme).}$$

Partie B — 1.a On étudie un échantillon de 50 connexions choisies au hasard (assimilable à un tirage avec remise). On admet que le nombre X de connexions instables suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

Chaque connexion est une épreuve à deux issues : « instable », de probabilité $p = P(\overline{S}) = 1 - 0,855 = 0,145$, répétée $n = 50$ fois de façon indépendante.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$.

Partie B — 1.b Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables (arrondie au millièmme).

À la calculatrice, $P(X \leq 8) \approx \mathbf{0,704}$ (au millièmme).

Partie B — 2.a On constitue un échantillon de n connexions ; X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $0,145$. Donner l'expression, en fonction de n , de la probabilité p_n qu'au moins une connexion soit instable.

« Au moins une connexion instable » est l'évènement contraire de « aucune connexion instable », c'est-à-dire $\{X_n = 0\}$.

$$P(X_n = 0) = \binom{n}{0} \times 0,145^0 \times 0,855^n = 0,855^n, \text{ donc } p_n = 1 - 0,855^n.$$

Partie B — 2.b Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $p_n \geq 0,99$.

$$p_n \geq 0,99 \iff 1 - 0,855^n \geq 0,99 \iff 0,855^n \leq 0,01.$$

En passant au logarithme népérien (croissant) : $n \ln(0,855) \leq \ln(0,01)$, et comme $\ln(0,855) < 0$, cela équivaut à $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)}$.

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)} \approx 29,4$, donc c'est à partir de $n = \mathbf{30}$ que $p_n \geq 0,99$.

Partie B — 3.a On note $F_n = X_n/n$ la fréquence de connexions instables dans un échantillon de n connexions. Calculer l'espérance $E(F_n)$, sachant que $V(F_n) = 0,123975/n$.

$$E(X_n) = np = 0,145n, \text{ et par linéarité de l'espérance, } E(F_n) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n} \times 0,145n = \mathbf{0,145}.$$

Partie B — 3.b Vérifier que $P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq 12,5/n$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à F_n avec une précision $t = 0,1$:

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq t) \leq \frac{V(F_n)}{t^2}, \text{ donc } P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{0,123975/n}{0,01} = \frac{12,3975}{n}.$$

Comme $12,3975 < 12,5$, on a bien $P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,5}{n}$.

Partie B — 3.c Un responsable étudie un échantillon de 1 000 connexions et constate $F_{1000} = 0,3$. Doit-il soupçonner un dysfonctionnement des serveurs ?

$|0,3 - 0,145| = 0,155 \geq 0,1$: cette observation réalise l'évènement $\{|F_{1000} - 0,145| \geq 0,1\}$.

D'après la question précédente, cet évènement a une probabilité inférieure ou égale à $\frac{12,5}{1\,000} = 0,0125$ sous un fonctionnement normal : un tel écart est donc très peu probable si les serveurs fonctionnent normalement.

Le responsable a raison de soupçonner un dysfonctionnement.

Bac Terminale 2025 — Amérique du Nord (jour 2)

Partie A — 1. Victor réussit un panier à trois points avec une probabilité de 0,32. Il tente 15 lancers indépendants. On note N le nombre de paniers marqués. On admet que N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

L'épreuve est répétée 15 fois de façon indépendante, avec une probabilité de succès de 0,32 à chaque lancer : N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(15 ; 0,32)$.

Partie A — 2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers.

$$P(N = 4) = \binom{15}{4} \times 0,32^4 \times 0,68^{11} \approx \mathbf{0,206} \text{ (au millième).}$$

Partie A — 3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers.

À la calculatrice, $P(N \leq 6) \approx \mathbf{0,828}$.

Partie A — 4. Déterminer l'espérance de N .

$E(N) = n \times p = 15 \times 0,32 = 4,8$: en moyenne, sur une série de 15 lancers, Victor marque 4,8 paniers.

Partie A — 5.a On note T le nombre de points marqués. Exprimer T en fonction de N .

Chaque panier réussi rapporte 3 points : $T = 3N$.

Partie A — 5.b En déduire l'espérance de T et interpréter cette valeur.

Par linéarité de l'espérance, $E(T) = E(3N) = 3E(N) = 3 \times 4,8 = 14,4$: en moyenne, Victor marque 14,4 points par série de 15 lancers à trois points.

Partie A — 5.c Calculer $P(12 \leq T \leq 18)$.

$$P(12 \leq T \leq 18) = P(12 \leq 3N \leq 18) = P(4 \leq N \leq 6).$$

$$P(4 \leq N \leq 6) = P(N = 4) + P(N = 5) + P(N = 6) \approx 0,206 + 0,213 + 0,167 \approx \mathbf{0,586}.$$

Partie B — 1.a On note X les points marqués par Victor lors d'un match, avec $E(X) = 22$ et $V(X) = 65$. Victor joue $n = 50$ matchs indépendants suivant la même loi que X ; on pose $M_{50} = (X_1 + \dots + X_{50})/50$. Que représente M_{50} ?

M_{50} représente la moyenne empirique, sur 50 matchs, du nombre de points marqués par Victor.

Partie B — 1.b Déterminer l'espérance et la variance de M_{50} .

Chaque X_i suit la même loi que X , donc $E(M_{50}) = E(X) = 22$.

$$\text{Les } X_i \text{ étant indépendantes : } V(M_{50}) = \frac{1}{50} V(X) = \frac{65}{50} = 1,3.$$

Partie B — 1.c Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $a > 0$: $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.

$$\text{Ici : } P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{V(M_{50})}{3^2} = \frac{1,3}{9} = \frac{13}{90}.$$

Partie B — 1.d En déduire que la probabilité de l'évènement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à 0,85.

L'évènement « $19 < M_{50} < 25$ » équivaut à $|M_{50} - 22| < 3$, donc $P(|M_{50} - 22| < 3) = 1 - P(|M_{50} - 22| \geq 3)$.

$$\text{Comme } P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}, \text{ on a } P(19 < M_{50} < 25) \geq 1 - \frac{13}{90} = \frac{77}{90} \approx 0,856 > 0,85.$$

Partie B — 2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « il n'existe aucun entier naturel n tel que $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$ ».

D'après la loi faible des grands nombres, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq t) = 0$ pour tout réel $t > 0$, donc en particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - 22| \geq 3) = 0$.

Il existe donc un rang N à partir duquel $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0,01$: **l'affirmation est fausse.**

Autre méthode : l'inégalité de concentration donne $P(|M_n - 22| \geq 3) \leq \frac{65}{9n}$, et $\frac{65}{9n} \leq 0,01 \iff n \geq \frac{6500}{9} \approx 722,2$: dès $n \geq 723$, l'inégalité voulue est vérifiée, ce qui confirme que l'affirmation est

fausse.

Bac Terminale 2025 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. 95 % des jouets réussissent le test de fabrication F ; parmi eux, 98 % réussissent le test de sécurité S . Donner $P(F)$ et $P_F(S)$.

D'après l'énoncé : $P(F) = 0,95$ et $P_F(S) = 0,98$.

Partie A — 2.a Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

L'arbre a pour première branche $P(F) = 0,95$ et $P(\overline{F}) = 0,05$; sur la branche F , $P_F(S) = 0,98$ et $P_F(\overline{S}) = 0,02$; sur la branche $\overline{F}$, les probabilités $P_{\overline{F}}(S)$ et $P_{\overline{F}}(\overline{S})$ restent à déterminer.

Partie A — 2.b 1 % des jouets ne réussissent aucun des deux tests. Montrer que $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = 0,2$.

D'après l'énoncé, $P(\overline{F} \cap \overline{S}) = 0,01$.

$$P_{\overline{F}}(\overline{S}) = \frac{P(\overline{F} \cap \overline{S})}{P(\overline{F})} = \frac{0,01}{0,05} = 0,2.$$

Partie A — 3. Calculer la probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests.

$$P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0,95 \times 0,98 = 0,931, \text{ soit } \mathbf{0,93} \text{ arrondi au centième.}$$

Partie A — 4. Montrer que la probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut **0,97** arrondi au centième.

$\{F, \overline{F}\}$ forme une partition, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(S) = P(F \cap S) + P(\overline{F} \cap S)$.

$$P(\overline{F} \cap S) = P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(S) = 0,05 \times 0,8 = 0,04 \text{ (car } P_{\overline{F}}(S) = 1 - 0,2 = 0,8).$$

$$P(S) = 0,931 + 0,04 = 0,971 \approx \mathbf{0,97}.$$

Partie A — 5. Lorsque le jouet a réussi le test de sécurité, quelle est la probabilité qu'il réussisse le test de fabrication (arrondie au centième) ?

$$P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{0,931}{0,971} \approx \mathbf{0,96}.$$

Partie B — 1. On note S_n le nombre de jouets sur n réussissant le test de fabrication, suivant la loi binomiale de paramètres n et **0,95**. Exprimer $E(S_n)$ et $V(S_n)$ en fonction de n .

$$E(S_n) = np = 0,95n \text{ et } V(S_n) = np(1 - p) = n \times 0,95 \times 0,05 = 0,0475n.$$

Partie B — 2.a Pour $n = 150$, déterminer une valeur approchée de $P(S_{150} = 145)$ à 10^{-3} près et interpréter.

À la calculatrice : $P(S_{150} = 145) \approx \mathbf{0,109}$.

Cela signifie que, dans environ 10,9 % des cas, exactement 145 des 150 jouets du lot réussissent le test de fabrication.

Partie B — 2.b Déterminer la probabilité qu'au moins 94 % des jouets du lot réussissent le test de fabrication (arrondie à 10^{-3}).

94 % de 150 jouets correspond à 141 jouets : la probabilité cherchée est $P(S_{150} \geq 141)$.

À la calculatrice, $P(S_{150} \geq 141) \approx \mathbf{0,781}$.

Partie B — 3.a On pose $F_n = S_n/n$. Montrer que $E(F_n) = 0,95$ et $V(F_n) = 0,0475/n$.

$$E(F_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E(S_n)}{n} = \frac{0,95n}{n} = 0,95.$$

$$V(F_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{0,0475n}{n^2} = \frac{0,0475}{n}.$$

Partie B — 3.b On note I l'évènement « la proportion de jouets réussissant le test de fabrication est strictement comprise entre 93 % et 97 % ». Déterminer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, une taille de lot n à partir de laquelle $P(I) \geq 0,96$.

L'évènement I s'écrit $|F_n - 0,95| < 0,02$, donc $P(I) = 1 - P(|F_n - 0,95| \geq 0,02)$.

D'après Bienaymé-Tchebychev, avec $t = 0,02$: $P(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \leq \frac{V(F_n)}{0,02^2} = \frac{0,0475}{0,0004n}$.

On veut $1 - \frac{0,0475}{0,0004n} \geq 0,96 \iff \frac{0,0475}{0,0004n} \leq 0,04 \iff n \geq \frac{0,0475}{0,04 \times 0,0004} = 2\,968,75$.

Il faut donc un lot d'au moins **2 969 jouets** pour garantir $P(I) \geq 0,96$.

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 1)

Partie A — 1. Un contrôle en caisse automatique est total (T) une fois sur dix. Un contrôle total détecte une erreur dans 30 % des cas ; un contrôle partiel n'en détecte pas dans 85 % des cas. Construire un arbre pondéré et déterminer $P(\bar{T} \cap E)$.

L'arbre pondéré donne : $P(T) = 0,1$, $P(\bar{T}) = 0,9$; $P_T(E) = 0,3$, $P_T(\bar{E}) = 0,7$; $P_{\bar{T}}(E) = 0,15$, $P_{\bar{T}}(\bar{E}) = 0,85$.

$$P(\bar{T} \cap E) = P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(E) = 0,9 \times 0,15 = 0,135.$$

Partie A — 2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.

$\{T, \bar{T}\}$ forme une partition, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(T \cap E) + P(\bar{T} \cap E) = 0,1 \times 0,3 + 0,135 = 0,03 + 0,135 = 0,165.$$

Partie A — 3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée (arrondie au centième).

$$P_E(T) = \frac{P(T \cap E)}{P(E)} = \frac{0,1 \times 0,3}{0,165} \approx \mathbf{0,18}.$$

Partie B — 1. Sur une journée, une caisse déclenche 15 contrôles ; la probabilité qu'un contrôle détecte une erreur est $p = 0,165$, indépendamment. X compte le nombre d'erreurs détectées. Préciser la loi et les paramètres de X .

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,165$.

Partie B — 2. Déterminer la probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées (arrondie au centième).

$$P(X = 5) = \binom{15}{5} \times 0,165^5 \times 0,835^{10} \approx \mathbf{0,06}.$$

Partie B — 3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée (arrondie au centième).

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,835^{15} \approx \mathbf{0,93}.$$

Partie B — 4. Déterminer le nombre de contrôles à déclencher chaque jour pour que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée dépasse 99 %.

Avec n contrôles, on veut $1 - 0,835^n \geq 0,99 \iff 0,835^n \leq 0,01$.

En passant au logarithme népérien : $n \ln(0,835) \leq \ln(0,01)$, et comme $\ln(0,835) < 0$: $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \approx 25,5$.

Il faut donc déclencher au moins **26 contrôles** par jour.

Partie C — 1. Trois caisses déclenchent chacune 20 contrôles ; X_1, X_2, X_3 (nombre d'erreurs par caisse) suivent chacune la loi binomiale de paramètres 20 et 0,165. Déterminer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

$$E(X_1) = np = 20 \times 0,165 = 3,3 \text{ et } V(X_1) = np(1 - p) = 20 \times 0,165 \times 0,835 = 2,7555.$$

Partie C — 2. On pose $S = X_1 + X_2 + X_3$. Justifier que $E(S) = 9,9$ et $V(S) = 8,2665$, puis montrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que $P(6 < S < 14) > 0,48$.

Par linéarité de l'espérance : $E(S) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 3,3 = 9,9$.

Les X_i étant indépendantes, par additivité de la variance : $V(S) = 3 \times V(X_1) = 3 \times 2,7555 = 8,2665$.

L'évènement « $6 < S < 14$ » (avec $E(S) \approx 10$) équivaut à $|S - 10| < 4$, donc $P(|S - 10| < 4) = 1 - P(|S - 10| \geq 4)$.

D'après Bienaymé-Tchebychev, avec $t = 4$: $P(|S - 10| \geq 4) \leq \frac{V(S)}{4^2} = \frac{8,2665}{16}$.

Donc $P(|S - 10| < 4) \geq 1 - \frac{8,2665}{16} \approx 0,483 > 0,48$.

Bac Terminale 2025 — Centres étrangers G1 (jour 2)

Partie A — 1. Le codage base64 utilise 64 caractères. Déterminer le nombre de séquences possibles de 4 caractères (avec répétition, ordre compté).

Chaque caractère a 64 possibilités, indépendamment des autres : $64^4 = 16\,777\,216$ séquences.

Partie A — 2. Déterminer le nombre de séquences si les 4 caractères sont différents deux à deux.

Il s'agit d'un arrangement de 4 caractères parmi 64 : $64 \times 63 \times 62 \times 61 = 15\,249\,024$ séquences.

Partie A — 3.a Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule.

En excluant le caractère A, il reste 63 possibilités par position : $63^4 = 15\,752\,961$ séquences.

Partie A — 3.b En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.

Par passage au complémentaire : $64^4 - 63^4 = 16\,777\,216 - 15\,752\,961 = 1\,024\,255$ séquences.

Partie A — 3.c Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.

Le A occupe l'une des 4 positions, les 3 autres étant différentes de A : $4 \times 63^3 = 1\,000\,188$ séquences.

Partie A — 3.d Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Il y a $\binom{4}{2}$ façons de choisir les positions des deux A, les 2 autres caractères (différents de A) ayant chacun 63 possibilités : $\binom{4}{2} \times 63^2 = \mathbf{23\,814}$ séquences.

Partie B — 1. On transmet une séquence de 250 caractères, chacun ayant une probabilité 0,01 d'être mal transmis, indépendamment. X compte le nombre de caractères mal transmis. Donner la loi et les paramètres de X.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0,01$.

Partie B — 2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis (valeur exacte puis approchée à 10^{-3}).

$$P(X = 0) = \binom{250}{0} \times 0,01^0 \times 0,99^{250} = 0,99^{250} \approx \mathbf{0,081}.$$

Partie B — 3. Que penser de l'affirmation « la probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable » ?

À la calculatrice, $P(X > 16) = P(X \geq 17) \approx 1,04 \times 10^{-9}$: cette probabilité est effectivement négligeable, l'affirmation est vraie.

Partie C — On transmet 4 séquences de 250 caractères ; X_1, X_2, X_3, X_4 (indépendantes, même loi que X) comptent les caractères mal transmis de chaque séquence. On pose $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. Déterminer, en justifiant, $E(S)$ et $V(S)$.

Par linéarité de l'espérance : $E(S) = 4 \times E(X) = 4 \times np = 4 \times 250 \times 0,01 = 10$.

Les X_i étant indépendantes, par additivité de la variance : $V(S) = 4 \times V(X) = 4 \times np(1 - p) = 4 \times 250 \times 0,01 \times 0,99 = 9,9$.

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 1)

1. Dans la population française, 45 % sont du groupe A (85 % rhésus+), 10 % du groupe B (84 % rhésus+), 3 % du groupe AB (82 % rhésus+), le reste du groupe O. Compléter l'arbre pondéré.

Le reste correspond au groupe O : $1 - 0,45 - 0,10 - 0,03 = 0,42$. L'arbre a pour première branche $P(A) = 0,45$, $P(B) = 0,10$, $P(AB) = 0,03$, $P(O) = 0,42$, puis sur chaque branche $P_A(R) = 0,85$, $P_B(R) = 0,84$, $P_{AB}(R) = 0,82$ (les probabilités $P_O(R)$ ne sont pas encore connues à ce stade).

2. Montrer que $P(B \cap R) = 0,084$ et interpréter.

$$P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0,10 \times 0,84 = 0,084.$$

Cela signifie que 8,4 % de la population française est à la fois de groupe sanguin B et de rhésus positif.

3. On précise que $P(R) = 0,8397$. Montrer que $P_O(R) = 0,83$.

Les événements A, B, AB, O forment une partition, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(AB \cap R) + P(O \cap R), \text{ soit } P(O \cap R) = 0,8397 - 0,45 \times 0,85 - 0,084 - 0,03 \times 0,82 = 0,3486.$$

$$P_O(R) = \frac{P(O \cap R)}{P(O)} = \frac{0,3486}{0,42} = 0,83.$$

4. Un donneur universel est de groupe O et de rhésus négatif. Montrer que la probabilité qu'un individu soit donneur universel est 0,0714.

$$\text{On cherche } P(O \cap \bar{R}) = P(O) \times P_O(\bar{R}) = P(O) \times (1 - P_O(R)).$$

$$P(O \cap \bar{R}) = 0,42 \times (1 - 0,83) = 0,42 \times 0,17 = 0,0714.$$

5.a Sur un échantillon de 100 personnes (tirage avec remise), X compte le nombre de donneurs universels. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

L'épreuve « être donneur universel », de probabilité $p = 0,0714$, est répétée 100 fois de façon indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise) : X suit la **loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0714$** .

5.b Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans l'échantillon.

$$\text{À la calculatrice, } P(X \leq 7) \approx \mathbf{0,577}.$$

5.c Montrer que $E(X) = 7,14$ et $V(X) \approx 6,63$ (à 10^{-2} près).

$$E(X) = np = 100 \times 0,0714 = 7,14 \text{ et } V(X) = np(1 - p) = 100 \times 0,0714 \times 0,9286 \approx 6,63.$$

6. On organise une collecte dans N villes ; $X_1, \dots, X_N$ (indépendantes, même loi que X) comptent les donneurs universels par ville, avec $E=7,14$ et $V=6,63$. On pose $M_N = (X_1 + \dots + X_N)/N$. Que représente M_N ?

M_N représente le nombre moyen de donneurs universels par collecte, sur les N collectes organisées.

7. Calculer $E(M_N)$.

M_N étant la moyenne empirique de variables de même loi que X : $E(M_N) = E(X) = 7,14$.

8. Montrer que $V(M_N) = 6,63/N$.

$$V(M_N) = \frac{V(X)}{N} = \frac{6,63}{N}.$$

9. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(7 < M_N < 7,28) \geq 0,95$.

L'évènement « $7 < M_N < 7,28$ » équivaut à $|M_N - 7,14| < 0,14$, donc $P(|M_N - 7,14| < 0,14) = 1 - P(|M_N - 7,14| \geq 0,14)$.

On veut $P(|M_N - 7,14| \geq 0,14) \leq 0,05$. D'après Bienaymé-Tchebychev, avec $t = 0,14$: $P(|M_N - 7,14| \geq 0,14) \leq \frac{6,63}{N \times 0,14^2}$.

On veut donc $\frac{6,63}{0,0196 N} \leq 0,05 \iff N \geq \frac{6,63}{0,05 \times 0,0196} \approx 6\,765,3$.

La plus petite valeur qui convient est donc $N = 6\,766$.

Bac Terminale 2025 — Métropole (jour 2)

Partie A — 1. Dans un centre multisports, une personne peut chuter en séance 1 (A, $P(A)=0,6$) puis en séance 2 (B) ; $P_A(B) = 0,3$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,4$. Représenter la situation par un arbre pondéré.

L'arbre a pour première branche $P(A) = 0,6$, $P(\bar{A}) = 0,4$, puis $P_A(B) = 0,3$, $P_A(\bar{B}) = 0,7$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,4$, $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,6$.

Partie A — 2. Calculer $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ et interpréter.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,4 \times 0,6 = 0,24.$$

Cela signifie que 24 % des personnes ne chutent ni lors de la première ni lors de la deuxième séance.

Partie A — 3. Montrer que $P(B) = 0,34$.

$\{A, \bar{A}\}$ forme une partition, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4 = 0,18 + 0,16 = 0,34$.

Partie A — 4. Sachant que la personne n'a pas chuté à la deuxième séance, calculer la probabilité qu'elle n'ait pas chuté à la première.

$$P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,24}{1 - 0,34} = \frac{0,24}{0,66} \approx 0,364.$$

Partie A — 5.a Sur un échantillon de 100 personnes (tirage avec remise), X compte celles n'ayant chuté ni à la première ni à la deuxième séance (probabilité 0,24). Justifier la loi de X et ses paramètres.

L'épreuve « ne pas chuter » (probabilité 0,24) est répétée 100 fois de façon indépendante : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,24$.

Partie A — 5.b Quelle est la probabilité d'avoir au moins 20 personnes sur 100 n'ayant chuté à aucune des deux séances ?

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx 1 - 0,145 \approx 0,855.$$

Partie A — 5.c Calculer $E(X)$ et interpréter.

$E(X) = np = 100 \times 0,24 = 24$: en moyenne, sur 100 personnes, 24 ne chuteront ni lors de la première ni lors de la deuxième séance.

Partie B — 1. T_1 (temps d'attente samedi, $E=40$, écart-type=10) et T_2 (dimanche, $E=60$, écart-type=16) sont indépendantes ; $T = T_1 + T_2$. Déterminer $E(T)$ et interpréter.

Par linéarité de l'espérance : $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 40 + 60 = 100$: il faut attendre en moyenne 100 minutes sur les deux jours.

Partie B — 2. Montrer que $V(T) = 356$.

T_1 et T_2 étant indépendantes : $V(T) = V(T_1) + V(T_2) = \sigma(T_1)^2 + \sigma(T_2)^2 = 10^2 + 16^2 = 100 + 256 = 356$.

Partie B — 3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $P(60 < T < 140) > 0,77$.

L'évènement « $60 < T < 140$ » équivaut à $|T - 100| < 40$ (en centrant sur $E(T) = 100$).

D'après Bienaymé-Tchebychev, avec $t = 40$: $P(|T - 100| \geq 40) \leq \frac{V(T)}{40^2} = \frac{356}{1600}$.

Donc $P(|T - 100| < 40) \geq 1 - \frac{356}{1600} = \frac{1244}{1600} \approx 0,7775 > 0,77$.

Bac Terminale 2024 — Asie (jour 1)

Partie A — 1. Au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient été infectés par la COVID-19. On prélève un individu au hasard ; quelle est la probabilité qu'il ait déjà été infecté (évènement I) ?

Par équiprobabilité, $P(I) = 0,057$.

Partie A — 2.a On prélève 100 personnes (tirage assimilé avec remise) ; X compte les personnes déjà infectées. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

L'épreuve « être déjà infecté » (probabilité 0,057) est répétée 100 fois de façon indépendante : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,057$.

Partie A — 2.b Calculer son espérance et interpréter.

$E(X) = 100 \times 0,057 = 5,7$: en moyenne, un échantillon de 100 adultes contient 5,7 personnes déjà infectées.

Partie A — 2.c Quelle est la probabilité qu'aucune personne de l'échantillon ne soit infectée (à 10^{-4} près) ?

$$P(X = 0) = 0,943^{100} \approx 0,0028.$$

Partie A — 2.d Quelle est la probabilité qu'au moins 2 personnes soient infectées (à 10^{-4} près) ?

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,9801.$$

Partie A — 2.e Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leq n) > 0,9$, et interpréter.

À la calculatrice, $P(X \leq 8) \approx 0,883$ et $P(X \leq 9) \approx 0,941$: le plus petit entier est $n = 9$. Il y a plus de 9 chances sur 10 que l'échantillon contienne au plus 9 personnes déjà infectées.

Partie B — 1. Un test a une sensibilité de 0,8 ($P_I(T)$, test positif sachant infecté) et une spécificité de 0,99 ($P_{\bar{I}}(\bar{T})$). Compléter l'arbre de probabilités.

$$P(I) = 0,057, P(\bar{I}) = 0,943; P_I(T) = 0,8, P_I(\bar{T}) = 0,2; P_{\bar{I}}(T) = 0,01, P_{\bar{I}}(\bar{T}) = 0,99.$$

Partie B — 2. Montrer que $P(T) = 0,05503$.

Par les probabilités totales : $P(T) = P(I \cap T) + P(\bar{I} \cap T) = 0,057 \times 0,8 + 0,943 \times 0,01 = 0,0456 + 0,00943 = 0,05503$.

Partie B — 3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif (à 10^{-4} près) ?

$$P_T(I) = \frac{P(I \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0456}{0,05503} \approx 0,8286.$$

Partie C. Dans un autre pays, avec le même test, la proportion de tests positifs est de 29,44 %. Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard ait été infecté ?

En notant x la proportion d'infectés : $P(T) = 0,8x + 0,01(1 - x) = 0,79x + 0,01$.

$0,79x + 0,01 = 0,2944 \iff 0,79x = 0,2844 \iff x = 0,36$: la probabilité d'avoir été infecté est **0,36** (36 % de la population).

Bac Terminale 2024 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. Un sac contient 8 jetons numérotés de 1 à 8 ; on pioche trois fois avec remise et on note la liste ordonnée des numéros. Déterminer le nombre de tirages possibles.

Chaque pioche offre 8 possibilités, avec remise : il y a $8^3 = \mathbf{512}$ tirages possibles.

2.a Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.

Sans répétition, on a 8 choix pour le premier numéro, 7 pour le deuxième, 6 pour le troisième : $8 \times 7 \times 6 = \mathbf{336}$ tirages.

2.b En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition.

$512 - 336 = \mathbf{176}$ tirages avec au moins une répétition (complémentaire des tirages sans répétition).

3. On note X_1 le numéro du premier jeton pioché. Établir la loi de probabilité de X_1 .

Les jetons étant indiscernables, la loi est équirépartie : $P(X_1 = k) = \frac{1}{8}$ pour chaque k de 1 à 8.

4. Déterminer l'espérance de X_1 .

$$E(X_1) = \frac{1 + 2 + \cdots + 8}{8} = \frac{36}{8} = \mathbf{4,5}.$$

5. On pose $S = X_1 + X_2 + X_3$. Déterminer l'espérance de S .

Par linéarité, et les trois variables suivant la même loi : $E(S) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 4,5 = \mathbf{13,5}$.

6. Déterminer $P(S = 24)$.

La somme 24 n'est réalisée que par le tirage $(8; 8; 8)$, une issue sur 512 : $P(S = 24) = \frac{1}{512}$.

7.a Un joueur gagne un lot si $S \geq 22$. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages gagnants.

$S = 24$: uniquement $(8; 8; 8)$, soit 1 tirage. $S = 23$: la somme $7+8+8$, avec 3 positions possibles pour le 7, soit 3 tirages.

$S = 22$: les sommes $6+8+8$ et $7+7+8$, chacune donnant 3 tirages (3 positions du numéro isolé), soit 6 tirages.

Total : $1 + 3 + 6 = \mathbf{10}$ tirages gagnants.

7.b En déduire la probabilité de gagner un lot.

$$P(S \geq 22) = \frac{10}{512} = \frac{5}{256}.$$

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 1)

1. Les achats d'un téléviseur se font sur internet (60 %), en magasin d'électroménager (30 %) ou en grande surface (10 %), avec des taux de satisfaction de 75 %, 90 % et 80 %. Compléter l'arbre pondéré.

$$P(I) = 0,6, P(M) = 0,3, P(G) = 0,1; P_I(S) = 0,75, P_I(\bar{S}) = 0,25; P_M(S) = 0,9, P_M(\bar{S}) = 0,1; P_G(S) = 0,8, P_G(\bar{S}) = 0,2.$$

2. Calculer la probabilité que le client ait acheté sur internet et soit satisfait.

$$P(I \cap S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45.$$

3. Démontrer que $P(S) = 0,8$.

$$\text{Par les probabilités totales : } P(S) = 0,45 + 0,3 \times 0,9 + 0,1 \times 0,8 = 0,45 + 0,27 + 0,08 = 0,8.$$

4. Un client est satisfait. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté sur internet (à 10^{-3} près) ?

$$P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0,45}{0,8} = \frac{9}{16} \approx \mathbf{0,563}.$$

5.a On contacte 30 clients (tirage assimilé avec remise) ; X compte les satisfaits. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

Chaque client est une épreuve à deux issues (satisfait, probabilité 0,8), répétée 30 fois de façon indépendante : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,8$.

5.b Déterminer la probabilité qu'au moins 25 clients soient satisfaits (à 10^{-3} près).

$$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) \approx 1 - 0,572 = \mathbf{0,428}.$$

6. Déterminer la taille minimale de l'échantillon pour que la probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.

La probabilité que tous soient satisfaits est $0,8^n$: on veut $1 - 0,8^n > 0,99 \iff 0,8^n < 0,01$.

$$n \ln(0,8) < \ln(0,01), \text{ donc } n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,6 : \text{ il faut contacter au moins } \mathbf{21} \text{ clients.}$$

7.a Le temps de livraison est $T = T_1 + T_2$, avec T_1 et T_2 indépendantes, $E(T_1) = 4$, $V(T_1) = 2$, $E(T_2) = 3$, $V(T_2) = 1$. Déterminer $E(T)$ et $V(T)$.

$$E(T) = 4 + 3 = 7; \text{ par indépendance, } V(T) = 2 + 1 = 3.$$

7.b Justifier que la probabilité que le téléviseur arrive entre 5 et 9 jours est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

« $5 \leq T \leq 9$ » contient l'évènement $|T - 7| < 3$ (les valeurs de T étant entières), dont la probabilité vaut $1 - P(|T - 7| \geq 3)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $P(|T - 7| \geq 3) \leq \frac{V(T)}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Donc } P(5 \leq T \leq 9) \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Bac Terminale 2024 — Métropole, La Réunion, Mayotte (jour 2)

1. À l'issue d'un examen, 91,7 % des étudiants ont répondu « oui » à la question « Pensez-vous avoir réussi ? » ; 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non », et 98 % de ceux ayant réussi ont répondu « oui ». Préciser $P(Q)$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q})$.

$P(Q) = 0,917$ (proportion de « oui ») et $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0,65$ (probabilité d'avoir répondu « non » sachant qu'on a échoué).

2.a En notant $x = P(R)$, compléter l'arbre pondéré.

$$P(R) = x, P(\bar{R}) = 1 - x; P_R(Q) = 0,98, P_R(\bar{Q}) = 0,02; P_{\bar{R}}(Q) = 0,35, P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0,65.$$

2.b Montrer que $x = 0,9$.

$$\text{Par les probabilités totales : } P(Q) = 0,98x + 0,35(1 - x) = 0,63x + 0,35.$$

$$0,63x + 0,35 = 0,917 \iff 0,63x = 0,567 \iff x = 0,9.$$

3. L'étudiant interrogé a répondu « oui ». Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen (à 10^{-3} près) ?

$$P_Q(R) = \frac{P(Q \cap R)}{P(Q)} = \frac{0,9 \times 0,98}{0,917} \approx \mathbf{0,962}.$$

4. La note N suit la loi binomiale de paramètres $(20; 0,615)$. À partir de quelle note la directrice doit-elle récompenser pour que 65 % des étudiants le soient ?

À la calculatrice : $P(N \geq 11) \approx 0,797$ et $P(N \geq 12) \approx 0,649$: en récompensant à partir de la note 11, environ 80 % des étudiants sont récompensés, ce qui est le premier seuil garantissant au moins 65 %.

5. Les notes $N_1, \dots, N_{10}$ de dix étudiants sont indépendantes et suivent la même loi binomiale (20 ; 0,615). Calculer $E(S)$ et $V(S)$ pour $S = N_1 + \dots + N_{10}$.

Pour chaque note : $E(N_i) = 20 \times 0,615 = 12,3$ et $V(N_i) = 20 \times 0,615 \times 0,385 = 4,7355$.

$E(S) = 10 \times 12,3 = 123$ et, par indépendance, $V(S) = 10 \times 4,7355 = 47,355$.

6.a On pose $M = \frac{S}{10}$. Que modélise cette variable aléatoire ?

M modélise la **moyenne des notes** obtenues par les dix étudiants choisis au hasard.

6.b Justifier que $E(M) = 12,3$ et $V(M) = 0,47355$.

$$E(M) = \frac{1}{10}E(S) = 12,3 \text{ et } V(M) = \frac{1}{100}V(S) = 0,47355.$$

6.c À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier que la probabilité que la moyenne de dix étudiants soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 %.

L'intervalle $]10,3 ; 14,3[$ est centré sur $E(M) = 12,3$: l'évènement s'écrit $|M - 12,3| < 2$.

Bienaymé-Tchebychev : $P(|M - 12,3| \geq 2) \leq \frac{0,47355}{4} \approx 0,118$, donc $P(|M - 12,3| < 2) \geq 0,88 \geq 0,8$.

L'affirmation est justifiée.

Bac Terminale 2024 — Polynésie française (jour 2)

1. Un sondage indique que 60 % des personnes de plus de 15 ans comptent regarder les Jeux Olympiques et Paralympiques (JOP) 2024 à la télévision, et que parmi elles, 8 sur 9 déclarent pratiquer une activité sportive régulière. On note J l'évènement « la personne compte regarder les JOP » et S « la personne pratique une activité sportive régulière ». Démontrer que $P(J \cap S) = \frac{8}{15}$.

$$P(J \cap S) = P(J) \times P_J(S) = 0,6 \times \frac{8}{9} = \frac{6}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}.$$

2.a Le sondage indique par ailleurs que $P(S) = \frac{2}{3}$. Calculer $P(\bar{J} \cap S)$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $(J, \bar{J})$: $P(S) = P(J \cap S) + P(\bar{J} \cap S)$, donc $P(\bar{J} \cap S) = \frac{2}{3} - \frac{8}{15} = \frac{10}{15} - \frac{8}{15} = \frac{2}{15}$.

2.b En déduire $P_{\bar{J}}(S)$.

$$P(\bar{J}) = 1 - 0,6 = 0,4 = \frac{2}{5}, \text{ donc } P_{\bar{J}}(S) = \frac{P(\bar{J} \cap S)}{P(\bar{J})} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{15} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{3}.$$

3.a On interroge 30 personnes de plus de 15 ans au hasard, assimilé à un tirage avec remise. X compte le nombre de personnes, parmi les 30, déclarant une activité sportive régulière. Préciser la loi de X .

Les 30 tirages sont indépendants et identiques, chacun avec probabilité $P(S) = \frac{2}{3}$ de succès : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = \frac{2}{3}$.

3.b Calculer la probabilité qu'exactly 16 personnes parmi les 30 déclarent une activité sportive régulière (arrondi au millième).

$$P(X = 16) = \binom{30}{16} \left(\frac{2}{3}\right)^{16} \left(\frac{1}{3}\right)^{14} \approx \mathbf{0,046}.$$

3.c On offre une place à 380 € pour chaque personne déclarant une activité sportive régulière, avec un budget de 10 000 €. Quelle est la probabilité que ce budget soit insuffisant (arrondi au millième) ?

Le budget permet d'offrir au plus $\left\lfloor \frac{10\,000}{380} \right\rfloor = \lfloor 26,31 \dots \rfloor = 26$ places.

Le budget est insuffisant si $X \geq 27$, soit $X > 26$. À la calculatrice, $P(X \leq 26) \approx 0,997$, donc $P(X \geq 27) = 1 - P(X \leq 26) \approx \mathbf{0,003}$.

Bac Terminale 2023 — Amérique du Nord (jour 1)

Partie A — 1. Une entreprise classe ses déchets en trois catégories : 69 % sont minéraux non dangereux (M), 28 % sont non minéraux non dangereux (N), le reste est dangereux (D). Par ailleurs, 73 % des déchets M sont recyclables, 49 % des déchets N le sont, et 35 % des déchets dangereux le sont. On prélève un déchet au hasard : compléter l'arbre pondéré donnant les probabilités de M, N, D puis de R (recyclable) sachant chacun d'eux.

Les proportions de l'énoncé s'interprètent comme des probabilités, puisque le déchet est prélevé au hasard.

Comme M, N et D partagent les déchets restants, on a $P(D) = 1 - 0,69 - 0,28 = 0,03$.

L'arbre porte donc, sur la première branche : $P(M) = 0,69$, $P(N) = 0,28$, $P(D) = 0,03$.

Puis sur les branches secondaires : $P_M(R) = 0,73$ et $P_M(\bar{R}) = 0,27$; $P_N(R) = 0,49$ et $P_N(\bar{R}) = 0,51$; $P_D(R) = 0,35$ et $P_D(\bar{R}) = 0,65$.

Partie A — 2. Justifier que la probabilité qu'un déchet soit à la fois dangereux et recyclable vaut 0,0105.

L'évènement « le déchet est dangereux et recyclable » est $D \cap R$, donc $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,03 \times 0,35 = \mathbf{0,0105}$.

Partie A — 3. Calculer $P(M \cap \overline{R})$ et interpréter le résultat.

$$P(M \cap \overline{R}) = P(M) \times P_M(\overline{R}) = 0,69 \times 0,27 = \mathbf{0,1863}.$$

Cela signifie que 18,63 % de l'ensemble des déchets produits par l'entreprise sont à la fois minéraux et non recyclables.

Partie A — 4. Démontrer que $P(R) = 0,6514$.

Les évènements M , N et D forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(M \cap R) + P(N \cap R) + P(D \cap R) = 0,69 \times 0,73 + 0,28 \times 0,49 + 0,03 \times 0,35.$$

$$P(R) = 0,5037 + 0,1372 + 0,0105 = \mathbf{0,6514}, \text{ ce qui est bien la valeur annoncée.}$$

Partie A — 5. Sachant que le déchet prélevé est recyclable, déterminer la probabilité qu'il soit non minéral et non dangereux (arrondie au dix-millième).

$$P_R(N) = \frac{P(N \cap R)}{P(R)} = \frac{0,28 \times 0,49}{0,6514} = \frac{0,1372}{0,6514} \approx \mathbf{0,2106}.$$

Partie B — 1.a On prélève avec remise un échantillon de 20 déchets ; X compte le nombre de déchets recyclables (on rappelle $P(R) = 0,6514$). Préciser la loi suivie par X et ses paramètres.

Le tirage avec remise correspond à la répétition de 20 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « le déchet est recyclable » de probabilité $p = 0,6514$: X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0,6514)$.

Partie B — 1.b Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables (arrondie au dix-millième).

$$P(X = 14) = \binom{20}{14} \times 0,6514^{14} \times 0,3486^6 \approx \mathbf{0,1723}.$$

Partie B — 2.a On prélève désormais n déchets (n entier naturel non nul). Exprimer en fonction de n la probabilité p_n qu'aucun déchet de l'échantillon ne soit recyclable.

En notant X_n le nombre de déchets recyclables parmi les n prélevés, X_n suit la loi $\mathcal{B}(n ; 0,6514)$, donc $p_n = P(X_n = 0) = \binom{n}{0} \times 0,6514^0 \times 0,3486^n = 0,3486^n$.

Partie B — 2.b Déterminer à partir de quel entier naturel n la probabilité qu'au moins un déchet de l'échantillon soit recyclable dépasse ou égale 0,9999.

L'évènement « au moins un déchet est recyclable » est le contraire de celui de probabilité p_n , donc on doit résoudre $1 - p_n \geq 0,9999$, c'est-à-dire $p_n \leq 0,0001$.

$0,3486^n \leq 0,0001 \iff n \ln(0,3486) \leq \ln(0,0001)$, et comme $\ln(0,3486) < 0$, l'inégalité s'inverse en divisant : $n \geq \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,3486)}$.

Or $\frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,3486)} \approx 8,74$, donc, comme n est un entier, c'est à partir de $n = 9$ que la probabilité qu'au moins un déchet soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}$. Quel est son comportement : diverge vers $+\infty$, converge vers $\frac{2}{5}$, converge vers 0, ou converge vers $\frac{1}{3}$?

En factorisant numérateur et dénominateur par 5^n : $u_n = \frac{5^n \left(\frac{1}{5^n} + \left(\frac{2}{5} \right)^n \right)}{5^n \left(\frac{3}{5^n} + 1 \right)} = \frac{\left(\frac{2}{5} \right)^n + \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{3}{5^n}}$.

Les suites géométriques de raisons $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{5}$, toutes deux strictement comprises entre -1 et 1 , convergent vers 0 : par limite de somme puis de quotient, u_n converge vers $\frac{0+0}{1+0} = 0$.

Réponse : la suite converge vers 0.

2. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$. Quelle est l'expression de $f'(x)$?

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$f'(x) = 2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x = x(2 \ln(x) + 1).$$

Réponse : $f'(x) = x(2 \ln(x) + 1)$.

3. Une fonction h , continue sur $\mathbb{R}$, admet le tableau de variations suivant : h décroît de $+\infty$ (en $-\infty$) jusqu'à $-\infty$... en réalité h croît de $-\infty$ vers $+\infty$, en s'annulant en $x = 1$. On note H la primitive de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Que peut-on affirmer : H positive sur $] -\infty ; 0]$, H croissante sur $] -\infty ; 1]$, H négative sur $] -\infty ; 1]$, ou H croissante sur $\mathbb{R}$?

h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 1, donc $h(x) < 0$ pour tout $x < 1$.

H étant une primitive de h , on a $H' = h$: ainsi $H'(x) < 0$ sur $] -\infty ; 1[$, donc H est strictement décroissante sur cet intervalle.

Pour tout $x \leq 0$, x et 0 appartiennent à $] -\infty ; 1[$ où H décroît, donc $x \leq 0 \implies H(x) \geq H(0)$.
Or $H(0) = 0$ par définition de H , donc $H(x) \geq 0$ sur $] -\infty ; 0]$.

Réponse : H est positive sur $] -\infty ; 0]$.

4. Soit $a < b$ deux réels et f une fonction définie, continue et strictement croissante sur $[a ; b]$, qui s'annule en un réel α . Parmi quatre fonctions Python proposées (méthode de dichotomie), laquelle donne bien une valeur approchée de α à 0,001 près ?

Le programme correct doit recalculer le milieu $m = \frac{a+b}{2}$ à chaque tour de boucle (et non une seule fois avant la boucle), avec un test d'arrêt `\og tant que l'écart dépasse 0,001 \fg` correctement écrit.

Comme f est strictement croissante sur $[a ; b]$ et s'annule en α , on a $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Si $f(m) < 0$, alors α se trouve entre m et b : il faut donc remplacer a par m (et garder b) pour l'itération suivante ; sinon, on remplace b par m .

Seule la version qui recalcule m à l'intérieur de la boucle, avec la condition `'while abs(b-a) >= 0.001'`, et l'affectation `'a = m'` quand $f(m) < 0$, respecte ce principe.

Réponse : le programme qui recalcule m dans la boucle et affecte $a = m$ lorsque $f(m) < 0$.

5. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont 7 bleues et 3 vertes. On effectue trois tirages successifs avec remise. Quelle expression donne la probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes ?

Chaque tirage est une épreuve à deux issues (`\og verte \fg` ou pas), de probabilité de succès $p = \frac{3}{10}$, répétée $n = 3$ fois de façon identique et indépendante (tirages avec remise).

En notant X le nombre de boules vertes obtenues, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3 ; \frac{3}{10}\right)$.

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^1 = \binom{3}{2} \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{3}{10}\right)^2.$$

Réponse : $\binom{3}{2} \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{3}{10}\right)^2.$

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

Partie A — 1. Une entreprise loue des trottinettes électriques et contrôle leur état chaque lundi. On admet que si une trottinette est en bon état un lundi donné, la probabilité qu'elle le soit encore le lundi suivant est 0,9 ; si elle est en mauvais état, la probabilité qu'elle passe en bon état la semaine suivante est 0,4. On note B_n l'événement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et $p_n = P(B_n)$, avec $p_0 = 1$. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.

Comme la trottinette est en bon état à l'instant 0 ($p_0 = 1$), on a directement $p_1 = P_{B_0}(B_1) = 0,9$.

En construisant l'arbre pondéré sur les deux premières semaines (issues B_1 ou $\overline{B_1}$, puis B_2 ou $\overline{B_2}$ à chaque fois), la formule des probabilités totales donne : $p_2 = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(B_2) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = 0,81 + 0,04 = 0,85$.

On obtient bien $p_1 = 0,9$ et $p_2 = 0,85$.

Partie A — 2. Reproduire et compléter l'arbre pondéré traduisant le passage de la semaine n à la semaine $n + 1$.

L'arbre a pour première branche B_n avec probabilité p_n (puis B_{n+1} avec probabilité 0,9 et $\overline{B_{n+1}}$ avec probabilité 0,1), et pour seconde branche $\overline{B_n}$ avec probabilité $1 - p_n$ (puis B_{n+1} avec probabilité 0,4 et $\overline{B_{n+1}}$ avec probabilité 0,6).

Partie A — 3. En déduire que, pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

Les événements B_n et $\overline{B_n}$ forment une partition de l'univers, donc la formule des probabilités totales donne : $p_{n+1} = P(B_n) \times 0,9 + P(\overline{B_n}) \times 0,4 = 0,9p_n + 0,4(1 - p_n) = 0,9p_n + 0,4 - 0,4p_n$.

Donc, la réponse est $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

Partie A — 4.a Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,8$.

Initialisation : $p_0 = 1 \geq 0,8$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que pour un entier naturel n donné, $p_n \geq 0,8$. Alors, en multipliant par $0,5 > 0$: $0,5p_n \geq 0,4$, puis en ajoutant 0,4 : $0,5p_n + 0,4 \geq 0,8$, c'est-à-dire $p_{n+1} \geq 0,8$. La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : par principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $p_n \geq 0,8$.

Partie A — 4.b Quelle communication l'entreprise peut-elle envisager à partir de ce résultat ?

En interprétant p_n comme la proportion de trottinettes en bon état, l'entreprise peut communiquer sur le fait qu'au moins 80 % de son parc reste en permanence en bon état, quelle que soit la semaine considérée.

Partie A — 5.a On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = p_n - 0,8$. Montrer que (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = (0,5p_n + 0,4) - 0,8 = 0,5p_n - 0,4 = 0,5(p_n - 0,8) = 0,5u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0,5$, de premier terme $u_0 = p_0 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$.

Partie A — 5.b En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n .

D'après la forme explicite d'une suite géométrique : $u_n = u_0 \times q^n = 0,2 \times 0,5^n$ pour tout entier naturel n . Comme $p_n = u_n + 0,8$, on obtient $p_n = 0,2 \times 0,5^n + 0,8$.

Partie A — 5.c En déduire la limite de la suite (p_n) .

La raison 0,5 est strictement comprise entre -1 et 1 , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0 + 0,8 = 0,8$.

Partie B — 1. On modélise désormais l'état des trottinettes du parc par une probabilité de bon état égale à 0,8, indépendamment d'une trottinette à l'autre. On note X le nombre de trottinettes en bon état dans un lot de 15, ce prélèvement pouvant être assimilé à un tirage avec remise. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

On répète 15 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve à deux issues (« la trottinette est en bon état », de probabilité 0,8) : X compte le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(15 ; 0,8)$.

Partie B — 2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes du lot soient toutes en bon état.

$$P(X = 15) = 0,8^{15} \approx \mathbf{0,0352} \text{ (arrondi au dix-millième).}$$

Partie B — 3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes du lot soient en bon état.

$$\text{À la calculatrice, } P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx \mathbf{0,9389} \text{ (arrondi au dix-millième).}$$

Partie B — 4. On admet que $E(X) = 12$. Interpréter ce résultat.

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$, on a $E(X) = np = 15 \times 0,8 = 12$. Cela signifie qu'en moyenne, sur un grand nombre de lots de 15 trottinettes prélevées dans le parc, 12 d'entre elles sont en bon état.

Bac Terminale 2023 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Une chaîne de télévision hésite à programmer un jeu réunissant quatre candidats en deux phases : une phase de qualification où chaque candidat est qualifié avec une probabilité de 0,6 indépendamment des autres, puis une phase finale qui n'a lieu que si au moins deux candidats sont qualifiés, et dont la durée (en minutes) dépend du nombre de qualifiés selon le tableau : 0 qualifié $\rightarrow$ 0 min, 1 $\rightarrow$ 0 min, 2 $\rightarrow$ 5 min, 3 $\rightarrow$ 9 min, 4 $\rightarrow$ 11 min. Le jeu n'est retenu que si la phase finale a lieu dans au moins 80 % des cas ET si sa durée moyenne ne dépasse pas 6 minutes. Le jeu peut-il être retenu ?

Condition 1. Chaque candidat est qualifié ou non de façon indépendante avec la même probabilité 0,6 : en notant X le nombre de candidats qualifiés parmi les quatre, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0,6)$.

La phase finale a lieu dès que $X \geq 2$. À la calculatrice, $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0,0256 - 0,1536 \approx 0,821$.

Comme $0,821 \geq 0,8$, la condition 1 est vérifiée.

Condition 2. Notons T la variable aléatoire égale à la durée de la phase finale ; elle prend les valeurs 0, 5, 9 et 11.

$$P(T = 11) = P(X = 4) = 0,6^4 \approx 0,1296; P(T = 9) = P(X = 3) = \binom{4}{3} \times 0,6^3 \times 0,4 \approx 0,3456;$$

$$P(T = 5) = P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,6^2 \times 0,4^2 \approx 0,3456; P(T = 0) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0,0256 + 0,1536 = 0,1792.$$

L'espérance de T vaut $E(T) = 0 \times 0,1792 + 5 \times 0,3456 + 9 \times 0,3456 + 11 \times 0,1296 = 1,728 + 3,1104 + 1,4256 = 6,264$ minutes.

Comme $6,264 > 6$, la durée moyenne dépasse 6 minutes : la condition 2 n'est **pas** vérifiée.

Donc, la réponse est : la condition 1 est remplie mais pas la condition 2, donc **le jeu ne peut pas être retenu** en l'état.

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 1)

Partie A — 1. Un télévendeur relance une personne au premier appel : la probabilité qu'elle ne décroche pas vaut 0,6, et si elle décroche, la probabilité qu'elle achète vaut 0,3. Si elle n'a pas décroché, on tente un second appel : la probabilité qu'elle ne décroche toujours pas vaut 0,3, et si elle décroche cette fois, la probabilité d'achat vaut 0,2. On note D_1 , D_2 et A les événements « décroche au 1er appel », « décroche au 2e appel » et « achète le produit ». Compléter l'arbre pondéré.

L'arbre comporte deux niveaux : sur la première branche, $P(D_1) = 0,4$ et $P(\overline{D_1}) = 0,6$, avec $P_{D_1}(A) = 0,3$ et $P_{D_1}(\overline{A}) = 0,7$; sur la seconde branche (issue de $\overline{D_1}$), $P_{\overline{D_1}}(D_2) = 0,7$ et $P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) = 0,3$, avec $P_{\overline{D_1} \cap D_2}(A) = 0,2$ et $P_{\overline{D_1} \cap D_2}(\overline{A}) = 0,8$.

Partie A — 2. En utilisant l'arbre, montrer que $P(A) = 0,204$.

D'après la formule des probabilités totales, l'achat se produit soit dès le premier appel, soit après le second : $P(A) = P(D_1 \cap A) + P(\overline{D_1} \cap D_2 \cap A) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \times 0,2 = 0,12 + 0,084 = \mathbf{0,204}$.

Partie A — 3. Sachant que la personne a acheté le produit, quelle est la probabilité qu'elle ait décroché dès le premier appel ?

$$\text{Il s'agit de calculer } P_A(D_1) = \frac{P(D_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{0,4 \times 0,3}{0,204} = \frac{0,12}{0,204} \approx \mathbf{0,588}.$$

Partie B — 1.a On prélève un échantillon aléatoire de 30 personnes ; X compte le nombre d'entre elles qui achètent le produit (on admet l'indépendance des situations). Donner, sans justification, la loi suivie par X et ses paramètres.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,204$.

Partie B — 1.b Déterminer, au millième près, la probabilité que 6 personnes exactement de l'échantillon achètent le produit.

$$P(X = 6) = \binom{30}{6} \times 0,204^6 \times (1 - 0,204)^{30-6} \approx \mathbf{0,179}.$$

Partie B — 1.c Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

$E(X) = np = 30 \times 0,204 = \mathbf{6,12}$. Cela signifie que, sur un grand nombre d'échantillons de 30 personnes contactées, le nombre d'acheteurs est en moyenne de 6,12 par échantillon.

Partie B — 2. Pour un échantillon de n personnes, déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins une personne achète le produit soit supérieure ou égale à 0,99.

Notons toujours X le nombre d'acheteurs parmi les n personnes, de loi binomiale de paramètres n et $p = 0,204$. On veut le plus petit n tel que $P(X \geq 1) \geq 0,99$, c'est-à-dire $1 - P(X = 0) \geq 0,99$, soit $P(X = 0) \leq 0,01$.

$$\text{Or } P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,204^0 \times (1 - 0,204)^n = 0,796^n. \text{ L'inéquation devient } 0,796^n \leq 0,01.$$

En passant au logarithme népérien (croissant) : $n \ln(0,796) \leq \ln(0,01)$, puis, comme $\ln(0,796) < 0$, on divise en changeant le sens de l'inégalité : $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)} \approx 20,18$.

Le plus petit entier convenable est donc $n = 21$ (on vérifie que $n = 20$ donne $P(X \geq 1) \approx 0,9896 < 0,99$, tandis que $n = 21$ donne $P(X \geq 1) \approx 0,9917 \geq 0,99$).

Bac Terminale 2023 — La Réunion (jour 2)

Partie A — 1. Un vendeur de matelas propose deux modèles : RESSORTS et MOUSSE, chaque client n'achetant qu'un seul matelas. On sait que 20 % des clients choisissent un matelas RESSORTS, que 90 % d'entre eux sont satisfaits, et que 82 % de l'ensemble des clients sont satisfaits. On note R l'évènement « le client a acheté un matelas RESSORTS » et S « le client est satisfait ». Compléter l'arbre pondéré décrivant la situation.

L'arbre comporte deux branches initiales $P(R) = 0,2$ et $P(\bar{R}) = 0,8$, puis sur la branche R : $P_R(S) = 0,9$ et $P_R(\bar{S}) = 0,1$; sur la branche $\bar{R}$: $P_{\bar{R}}(S) = x$ et $P_{\bar{R}}(\bar{S}) = 1 - x$, où x désigne la probabilité d'être satisfait sachant que le matelas n'est pas de type RESSORTS.

Partie A — 2. Montrer que $x = 0,8$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée à l'évènement S : $P(S) = P(R \cap S) + P(\bar{R} \cap S)$.

Or $P(R \cap S) = P(R) \times P_R(S) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$ et $P(\bar{R} \cap S) = P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(S) = 0,8x$.

Comme $P(S) = 0,82$, on obtient l'équation $0,18 + 0,8x = 0,82$, soit $0,8x = 0,64$, d'où $x = 0,8$.

Partie A — 3. Un client s'avère satisfait de son achat. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS (résultat arrondi au centième) ?

Il s'agit de calculer $P_S(R) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{0,18}{0,82} = \frac{9}{41} \approx 0,22$.

Partie B — 1.a On interroge 5 clients au hasard et X compte le nombre de clients satisfaits parmi eux. On admet que X suit une loi binomiale : donner ses paramètres.

Chaque client interrogé est soumis à une épreuve à deux issues (satisfait ou non, avec probabilité 0,82 de succès), les 5 tirages étant indépendants : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,82$.

Partie B — 1.b Déterminer la probabilité qu'au maximum trois des cinq clients soient satisfaits (résultat arrondi au millièm).

À la calculatrice : $P(X \leq 3) \approx 0,222$.

Partie B — 2.a Soit n un entier naturel non nul. On interroge maintenant n clients, ce choix étant assimilable à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits. Montrer que $p_n = 0,82^n$.

Chaque client est satisfait de façon indépendante avec la probabilité 0,82. La probabilité que les n clients le soient tous est donc le produit de n facteurs égaux à 0,82, c'est-à-dire $p_n = 0,82^n$.

Partie B — 2.b Déterminer les entiers naturels n tels que $p_n < 0,01$, puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

On résout dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0,82^n < 0,01$. En passant au logarithme népérien (croissant) : $n \ln(0,82) < \ln(0,01)$.

Comme $\ln(0,82) < 0$, l'inégalité change de sens en divisant : $n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,82)} \approx 23,2$.

Le plus petit entier convenable est donc $n = 24$: dès que l'on interroge au moins 24 clients, la probabilité qu'ils soient tous satisfaits devient inférieure à 1 %.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 1)

1. Un technicien contrôle des machines identiques. On sait que 20 % des machines sont sous garantie (événement G), que 0,2 % sont à la fois défectueuses et sous garantie, et que 8,2 % sont défectueuses (événement D). Quelle est la probabilité $p_G(D)$ que la machine soit défectueuse sachant qu'elle est sous garantie ?

On a $p(G) = 0,2$ et $p(G \cap D) = 0,002$, donc $p_G(D) = \frac{p(G \cap D)}{p(G)} = \frac{0,002}{0,2} = 0,01$. Donc, la réponse est **b. 0,01**.

2. Quelle est la probabilité $p(\overline{G} \cap D)$ que la machine soit défectueuse et non sous garantie ?

D'après la formule des probabilités totales appliquée à D : $p(D) = p(G \cap D) + p(\overline{G} \cap D)$, donc $p(\overline{G} \cap D) = p(D) - p(G \cap D) = 0,082 - 0,002 = 0,08$. Donc, la réponse est **b. 0,08**.

3. Sachant que la machine est défectueuse, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'elle soit sous garantie ?

On cherche $p_D(G) = \frac{p(G \cap D)}{p(D)} = \frac{0,002}{0,082} \approx 0,0244$. Donc, la réponse est **b. 0,024**.

4. On choisit au hasard et de façon indépendante $n = 50$ machines ; X compte le nombre de machines défectueuses parmi elles et suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,082$. Quelle est la valeur, arrondie au millièm, de $p(X > 2)$?

À la calculatrice, $p(X \leq 2) \approx 0,2114$, donc $p(X > 2) = 1 - p(X \leq 2) \approx 1 - 0,2114 \approx 0,789$. Donc, la réponse est **b. 0,789**.

5. Pour un lot de taille n , on cherche la plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité que toutes les machines fonctionnent correctement reste supérieure à 0,4.

Toutes les machines fonctionnent correctement lorsque $X = 0$, avec $p(X = 0) = (1 - 0,082)^n = 0,918^n$ (aucune machine défectueuse parmi les n).

On résout $0,918^n > 0,4$. Par croissance de la fonction $\ln$: $n \ln(0,918) > \ln(0,4)$, et comme $\ln(0,918) < 0$, cela équivaut à $n < \frac{\ln(0,4)}{\ln(0,918)}$.

Or $\frac{\ln(0,4)}{\ln(0,918)} \approx 10,71$, donc le plus grand entier n vérifiant l'inégalité est $n = 10$. Donc, la réponse est **c. 10**.

Bac Terminale 2023 — Métropole, Mayotte, Antilles Guyane (jour 2)

1. Dans un jeu vidéo en ligne, chaque joueur choisit un monde A ou un monde B avant de jouer une partie. On sait que $P(A) = \frac{2}{5}$, que la probabilité de gagner sachant que le joueur a choisi le monde A est $P_A(G) = \frac{7}{10}$, et que la probabilité de gagner la partie (tous mondes confondus) est $P(G) = \frac{12}{25}$. Quelle est la probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie ?

$$P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}. \text{ Donc, la réponse est c.}$$

2. Quelle est la probabilité $P_B(G)$ de gagner sachant que le joueur a choisi le monde B ?

$$\text{Les évènements A et B étant complémentaires, } P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{D'après la formule des probabilités totales, } P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G), \text{ donc } P(B \cap G) = P(G) - P(A \cap G) = \frac{12}{25} - \frac{7}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Donc } P_B(G) = \frac{P(B \cap G)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{3}. \text{ Donc, la réponse est b.}$$

3. Un joueur enchaîne 10 parties, assimilées à des tirages indépendants avec remise, avec une probabilité de gain de $\frac{12}{25}$ à chaque partie. Quelle est la probabilité, arrondie au millièm, qu'il gagne exactement 6 parties ?

$$\text{Le nombre } X \text{ de parties gagnées sur les 10 suit la loi binomiale de paramètres } n = 10 \text{ et } p = \frac{12}{25}.$$

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} \times \left(\frac{12}{25}\right)^6 \times \left(\frac{13}{25}\right)^4 \approx 0,188 \text{ (calculatrice). Donc, la réponse est c.}$$

4. Pour un entier naturel n , la probabilité arrondie au millièm que le joueur gagne au plus n parties vaut 0,207. Quelle est la valeur de n ?

$$\text{En testant les valeurs à la calculatrice avec la loi de } X \text{ ci-dessus, on trouve } P(X \leq 3) \approx 0,207. \text{ Donc, la réponse est b } (n = 3).$$

5. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les 10 ?

L'évènement contraire de « gagner au moins une partie » est « ne gagner aucune partie », c'est-à-dire $X = 0$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \left(\frac{12}{25}\right)^0 \left(\frac{13}{25}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}. \text{ Donc, la réponse est d.}$$

Bac Terminale 2023 — Polynésie française (jour 2)

Partie A — 1. Un athlète doit franchir une haie chaque jour d'entraînement. S'il réussit un jour donné, il réussit à nouveau le lendemain avec une probabilité de 90 % ; s'il échoue un jour donné, il échoue encore le lendemain avec une probabilité de 70 %. On note R_n l'événement « l'athlète franchit la haie à la n -ième séance », $p_n = P(R_n)$, et $p_0 = 0,6$. Reproduire l'arbre pondéré à deux niveaux en complétant les probabilités manquantes.

Sur la branche partant de R_n (de probabilité p_n), les probabilités conditionnelles sont 0,9 vers R_{n+1} et 0,1 vers $\overline{R_{n+1}}$. Sur la branche partant de $\overline{R_n}$ (de probabilité $1 - p_n$), elles sont 0,3 vers R_{n+1} et 0,7 vers $\overline{R_{n+1}}$.

Partie A — 2. En s'appuyant sur l'arbre, justifier que pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3$.

Les événements R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers, donc, par la formule des probabilités totales : $p_{n+1} = P(R_n \cap R_{n+1}) + P(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) = p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,3$.

En développant : $p_{n+1} = 0,9p_n + 0,3 - 0,3p_n = 0,6p_n + 0,3$. Donc, la réponse est $p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3$.

Partie A — 3.a On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = p_n - 0,75$. Montrer que (u_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75 = (0,6p_n + 0,3) - 0,75 = 0,6p_n - 0,45$.

Or $p_n = u_n + 0,75$, donc $u_{n+1} = 0,6(u_n + 0,75) - 0,45 = 0,6u_n + 0,45 - 0,45 = 0,6u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0,6$, de premier terme $u_0 = p_0 - 0,75 = 0,6 - 0,75 = -0,15$.

Partie A — 3.b En déduire que, pour tout entier naturel n , $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$.

Comme (u_n) est géométrique de premier terme $-0,15$ et de raison $0,6$, on a $u_n = -0,15 \times 0,6^n$ pour tout n . Comme $p_n = u_n + 0,75$, on obtient $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$. Donc, la réponse est $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$.

Partie A — 3.c En déduire que (p_n) converge et donner sa limite ℓ .

La raison $0,6$ vérifie $-1 < 0,6 < 1$, donc $0,6^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par somme de limites, $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$ tend vers $\ell = 0,75$.

Partie A — 3.d Interpréter la valeur de ℓ dans le contexte de l'exercice.

En assimilant la limite d'une probabilité à une proportion sur le long terme, cela signifie qu'après un grand nombre de séances, l'athlète franchit la haie dans environ 75 % des cas.

Partie B — 1. Après beaucoup d'entraînement, l'entraîneur considère que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de 0,75, indépendamment des haies précédentes. On note X le nombre de haies franchies sur un 400 mètres haies comportant 10 haies. Préciser la loi suivie par X et ses paramètres.

On répète 10 fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues (« franchir » avec probabilité 0,75, « ne pas franchir » avec probabilité 0,25) : X compte le nombre de succès. X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,75)$.

Partie B — 2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,75^{10} \times 0,25^0 = 0,75^{10} \approx \mathbf{0,056}.$$

Partie B — 3. Calculer $P(X \geq 9)$ à 10^{-3} près.

$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$. À la calculatrice, $P(X = 9) = \binom{10}{9} \times 0,75^9 \times 0,25 \approx 0,188$, et $P(X = 10) \approx 0,056$, d'où $P(X \geq 9) \approx \mathbf{0,244}$.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 1)

Partie A — 1.a Chaque jour travaillé, Paul rejoint la gare à vélo avec probabilité $\frac{2}{3}$, sinon en voiture. À vélo, il rate son train avec probabilité $\frac{1}{50}$; en voiture, avec probabilité $\frac{1}{10}$. On note V l'évènement « Paul prend son vélo » et R l'évènement « Paul rate son train ». Représenter la situation par un arbre pondéré.

L'arbre part de la racine avec les branches V (probabilité $\frac{2}{3}$) et $\bar{V}$ (probabilité $\frac{1}{3}$) ; sous V , les branches R ($\frac{1}{50}$) et $\bar{R}$ ($\frac{49}{50}$) ; sous $\bar{V}$, les branches R ($\frac{1}{10}$) et $\bar{R}$ ($\frac{9}{10}$).

Partie A — 1.b Montrer que la probabilité que Paul rate son train vaut $\frac{7}{150}$.

D'après la formule des probabilités totales : $P(R) = P(V) \times P_V(R) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{150} + \frac{5}{150} = \frac{7}{150}$.

Partie A — 1.c Sachant que Paul a raté son train, déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo.

$$P_R(V) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{50}}{\frac{7}{150}} = \frac{\frac{2}{150}}{\frac{7}{150}} = \frac{2}{7}.$$

Partie A — 2.a Sur un mois, Paul se rend 20 fois à la gare selon les mêmes modalités, les choix des différents jours étant indépendants. X compte le nombre de jours où il prend son vélo. Déterminer la loi suivie par X et ses paramètres.

La répétition de 20 épreuves identiques et indépendantes à deux issues (vélo ou non, avec probabilité $\frac{2}{3}$ de prendre le vélo) est un schéma de Bernoulli répété : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{3}$, notée $X \sim \mathcal{B}\left(20 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 2.b Calculer la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur les 20 (arrondi au millième).

$$P(X = 10) = \binom{20}{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \approx \mathbf{0,054} \text{ (à la calculatrice).}$$

Partie A — 2.c Calculer la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur les 20 (arrondi au millième).

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx \mathbf{0,962} \text{ (à la calculatrice).}$$

Partie A — 2.d En moyenne, sur une période de 20 jours, combien de fois Paul prend-il son vélo pour rejoindre la gare (arrondi à l'entier) ?

L'espérance de X vaut $E(X) = np = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} \approx 13,33$. En moyenne, Paul prend donc son vélo environ **13** jours sur 20.

Partie A — 3. Quand Paul se rend à la gare en voiture, le temps de trajet T (en minutes, arrondi à la minute) suit la loi donnée par le tableau : k de 10 à 18 minutes avec $P(T = k)$ valant respectivement 0,14 ; 0,13 ; 0,13 ; 0,12 ; 0,12 ; 0,11 ; 0,10 ; 0,08 ; 0,07. Déterminer l'espérance de T et l'interpréter.

$$E(T) = 10 \times 0,14 + 11 \times 0,13 + 12 \times 0,13 + 13 \times 0,12 + 14 \times 0,12 + 15 \times 0,11 + 16 \times 0,10 + 17 \times 0,08 + 18 \times 0,07 = 13,5.$$

Donc, sur un grand nombre de trajets en voiture, la durée moyenne du trajet est de **13,5 minutes**, soit 13 minutes et 30 secondes.

Bac Terminale 2022 — Amérique du Nord (jour 2)

1. Le réel $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ est égal à : a. $1 - \frac{1}{2}\ln(3)$; b. $\frac{1}{2}\ln(3)$; c. $3\ln(3) + \frac{1}{2}$; d. $-\frac{1}{2}\ln(3)$.

$$a = \ln(3^2) + \ln(\sqrt{3}) - \ln(3) - \ln(3^2) = 2\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(3) - 2\ln(3) = -\frac{1}{2}\ln(3).$$

Réponse d.

2. On considère l'équation (E) : $\ln(x) + \ln(x-10) = \ln(3) + \ln(7)$, d'inconnue réelle x . a. 3 est solution ; b. $5 - \sqrt{46}$ est solution ; c. (E) admet une unique solution réelle ; d. (E) admet deux solutions réelles.

Le domaine de définition impose $x > 0$ et $x > 10$, donc $x \in]10 ; +\infty[$.

Sur ce domaine, (E) $\iff \ln(x(x-10)) = \ln(21) \iff x(x-10) = 21 \iff x^2 - 10x - 21 = 0$, un trinôme de discriminant $\Delta = 100 + 84 = 184 = 4 \times 46$, donc $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{46}$.

Les racines sont $x_1 = 5 - \sqrt{46}$ et $x_2 = 5 + \sqrt{46}$. Comme $\sqrt{46} > 5$ (car $46 > 25$), $x_1 < 0$ n'appartient pas au domaine, tandis que $x_2 > 10$ appartient au domaine.

L'équation (E) admet donc une unique solution réelle, $5 + \sqrt{46}$. **Réponse c.**

3. Soit f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2(-1 + \ln(x))$. a. $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$; b. f est croissante sur $]0 ; +\infty[$; c. $f'(\sqrt{e})$ est différent de 0 ; d. la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}e$ est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, avec $f'(x) = 2x(-1 + \ln(x)) + x^2 \times \frac{1}{x} = -2x + 2x \ln(x) + x = x(2 \ln(x) - 1)$.

$f'(x) = 0 \iff 2 \ln(x) - 1 = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$: la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$ est donc horizontale, d'équation $y = f(\sqrt{e})$.

$$f(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^2(-1 + \ln(\sqrt{e})) = e \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e.$$

Donc, la tangente au point d'abscisse $\sqrt{e}$ a bien pour équation $y = -\frac{1}{2}e$. **Réponse d.**

4. Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons. La probabilité de tirer exactement 2 jetons jaunes, arrondie au millièm, est : a. 0,683 ; b. 0,346 ; c. 0,230 ; d. 0,165.

Les tirages étant successifs, indépendants et avec remise, la variable X comptant le nombre de jetons jaunes obtenus suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$.

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \approx 0,346. \text{ Réponse b.}$$

5. Dans les mêmes conditions (sac de 20 jetons jaunes, 30 bleus, 5 tirages avec remise), la probabilité de tirer au moins un jeton jaune, arrondie au millièm, est : a. 0,078 ; b. 0,259 ; c. 0,337 ; d. 0,922.

$$X \sim \mathcal{B}\left(5 ; \frac{2}{5}\right). P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^5 \approx 0,922.$$

Réponse d.

6. Toujours dans les mêmes conditions, si on répète l'expérience un très grand nombre de fois, le nombre moyen de jetons jaunes obtenus est égal à : a. 0,4 ; b. 1,2 ; c. 2 ; d. 2,5.

L'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$ vaut $E(X) = np$. Ici, $E(X) = 5 \times \frac{2}{5} = 2$.

Réponse c.

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 1)

1.a Lors d'une kermesse, une roue comporte quatre cases blanches et huit cases rouges, et un sac contient cinq jetons numérotés de 1 à 5. On tourne la roue : si la case est blanche, on tire un seul jeton du sac ; si elle est rouge, on tire successivement et sans remise deux jetons. Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair. On note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R « la case obtenue est rouge » et G « le joueur gagne la partie ». Donner la valeur de $P_B(G)$.

Si la case est blanche, on tire un seul jeton parmi les 5 ; il y a 3 numéros impairs (1, 3, 5). Donc $P_B(G) = \frac{3}{5} = 0,6$.

1.b On admet que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à 0,3. Construire l'arbre de probabilités complet de l'expérience.

La roue comporte $4 + 8 = 12$ cases : $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et $P(R) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Sur la branche B , un seul jeton est tiré : $P_B(G) = 0,6$ donc $P_B(\overline{G}) = 0,4$.

Sur la branche R , deux jetons sont tirés successivement sans remise : $P_R(G) = 0,3$ (valeur admise) donc $P_R(\overline{G}) = 0,7$.

L'arbre pondéré comporte donc, à la racine, les branches B (poids $\frac{1}{3}$) et R (poids $\frac{2}{3}$), puis sur chacune les branches G et $\overline{G}$ avec les poids ci-dessus.

2.a Montrer que $P(G) = 0,4$.

D'après la formule des probabilités totales, $P(G) = P(B \cap G) + P(R \cap G) = P(B) \times P_B(G) + P(R) \times P_R(G) = \frac{1}{3} \times 0,6 + \frac{2}{3} \times 0,3 = 0,2 + 0,2 = 0,4$.

2.b Un joueur gagne la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?

On cherche $P_G(B) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$.

3. Les évènements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.

$$P(B) \times P(G) = \frac{1}{3} \times 0,4 = \frac{2}{15} \approx 0,133.$$

$$P(B \cap G) = \frac{1}{3} \times 0,6 = 0,2.$$

Comme $P(B) \times P(G) \neq P(B \cap G)$, les évènements B et G ne sont pas indépendants.

4.a Un même joueur fait dix parties indépendantes, les jetons étant remis dans le sac après chaque partie. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

On répète 10 fois, de façon identique et indépendante, l'épreuve de Bernoulli « gagner une partie » de probabilité de succès $P(G) = 0,4$. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,4)$.

4.b Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,4^3 \times 0,6^7 \approx \mathbf{0,215}.$$

4.c Calculer $P(X \geq 4)$ arrondie à 10^{-3} près, et interpréter ce résultat.

À la calculatrice, $P(X \leq 3) \approx 0,382$, donc $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx \mathbf{0,618}$.

Sur dix parties jouées, le joueur a donc plus de 6 chances sur 10 d'en gagner au moins quatre.

5.a Un joueur fait n parties (indépendantes) et on note p_n la probabilité de l'évènement « le joueur gagne au moins une partie ». Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$.

L'évènement contraire de « gagner au moins une partie sur n » est « ne gagner aucune partie », de probabilité $(1 - 0,4)^n = 0,6^n$ par indépendance des parties. Donc $p_n = 1 - 0,6^n$.

5.b Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99.

On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0,6^n \geq 0,99$, soit $0,6^n \leq 0,01$.

Comme $0 < 0,6 < 1$, la fonction logarithme népérien est strictement croissante, donc $0,6^n \leq 0,01 \iff n \ln(0,6) \leq \ln(0,01) \iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)}$ (l'inégalité change de sens car $\ln(0,6) < 0$).

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,6)} \approx 9,02$. Donc, la réponse est $n = 10$: il faut jouer au moins 10 parties pour gagner au moins une partie avec une probabilité d'au moins 99 %.

Bac Terminale 2022 — Asie (jour 2)

Partie 1 — 1. Julien doit prendre l'avion et a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport. S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'arriver à temps ; sinon, il ne peut plus arriver à temps. On note B l'évènement « Julien réussit à prendre son bus », de probabilité $P(B) = 0,2$, et V l'évènement « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ». Donner la valeur de $P_B(V)$.

S'il réussit à prendre son bus, Julien est certain d'être à l'heure à l'aéroport pour son vol. Donc, la réponse est $P_B(V) = 1$.

Partie 1 — 2. S'il manque son bus, Julien prend une compagnie de voitures privées, avec une probabilité 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport. Représenter la situation par un arbre pondéré.

On représente un arbre à deux niveaux : le premier niveau donne les branches B (probabilité 0,2) et $\bar{B}$ (probabilité $1 - 0,2 = 0,8$).

Depuis B partent les branches V (probabilité 1, puisque $P_B(V) = 1$) et $\bar{V}$ (probabilité 0).

Depuis $\bar{B}$ partent les branches V (probabilité 0,5) et $\bar{V}$ (probabilité 0,5).

Partie 1 — 3. Montrer que $P(V) = 0,6$.

D'après la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'évènements $\{B, \bar{B}\}$:
 $P(V) = P(B \cap V) + P(\bar{B} \cap V) = P(B) \times P_B(V) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(V)$.

$$P(V) = 0,2 \times 1 + 0,8 \times 0,5 = 0,2 + 0,4 = 0,6.$$

Donc, la réponse est $P(V) = 0,6$.

Partie 1 — 4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ?

$$\text{On cherche } P_V(B) = \frac{P(V \cap B)}{P(V)} = \frac{P(B \cap V)}{P(V)} = \frac{0,2 \times 1}{0,6} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}.$$

Donc, la réponse est $P_V(B) = \frac{1}{3}$.

Partie 2 — 1. Une compagnie aérienne pratique le surbooking : chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement, indépendamment des autres. Pour un vol de 200 places où 206 billets ont été vendus, on note X la variable aléatoire comptant le nombre de passagers se présentant à l'embarquement. Justifier que X suit une loi binomiale, en précisant ses paramètres.

On répète 206 fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues : « le passager se présente » (probabilité $1 - 0,05 = 0,95$) ou « le passager ne se présente pas » (probabilité 0,05). X compte le

nombre de succès.

Donc, la réponse est que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 206$ et $p = 0,95$.

Partie 2 — 2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?

L'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p vaut $n \times p$, donc $E(X) = 206 \times 0,95 = 195,7$.

Donc, la réponse est qu'en moyenne, environ 196 passagers se présentent à l'embarquement.

Partie 2 — 3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement, arrondie à 10^{-3} près.

$$P(X = 201) = \binom{206}{201} \times 0,95^{201} \times 0,05^5.$$

Donc, la réponse est $P(X = 201) \approx 0,031$ (à 10^{-3} près).

Partie 2 — 4. Calculer $P(X \leq 200)$, arrondi à 10^{-3} près, puis interpréter ce résultat.

La calculatrice donne $P(X \leq 200) \approx 0,948$ (à 10^{-3} près).

Donc, la réponse est qu'il y a environ 94,8 % de chances qu'au plus 200 passagers se présentent, c'est-à-dire que tous les passagers présents puissent embarquer : il est donc très probable que l'avion ne soit pas en surcapacité.

Partie 2 — 5.a Chaque billet coûte 250 €. Si plus de 200 passagers se présentent, la compagnie doit rembourser le billet et payer une pénalité de 600 € à chaque passager lésé. On note Y le nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ; sa loi de probabilité est donnée par $P(Y=0) = 0,94775$, $P(Y=1) = 0,03063$, $P(Y=2) = 0,01441$, $P(Y=3) = 0,00539$, $P(Y=4) = 0,00151$, $P(Y=5) = 0,00028$. Compléter la loi de probabilité en calculant $P(Y = 6)$.

Y ne peut prendre que les valeurs 0 à 6 (au maximum $206 - 200 = 6$ passagers surnuméraires), et la somme de toutes les probabilités d'une loi vaut 1.

$$P(Y = 6) = 1 - (P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) + P(Y=5)).$$

$$P(Y = 6) = 1 - (0,94775 + 0,03063 + 0,01441 + 0,00539 + 0,00151 + 0,00028) = 1 - 0,99997 = 0,00003.$$

Donc, la réponse est $P(Y = 6) = 0,00003$.

Partie 2 — 5.b Justifier que $C = 51\,500 - 850Y$, où C est le chiffre d'affaires de la compagnie sur ce vol.

La compagnie encaisse d'abord la vente des 206 billets, soit $206 \times 250 = 51\,500$ €.

Pour chacun des Y passagers ne pouvant pas embarquer, elle doit rembourser le billet (250 €) et verser une pénalité de 600 €, soit $250 + 600 = 850$ € par passager lésé, donc un total de $850Y$ € à déduire.

Donc, la réponse est $C = 51\,500 - 850Y$.

Partie 2 — 5.c Donner la loi de probabilité de C sous forme d'un tableau, puis calculer l'espérance de C à l'euro près.

D'après la relation $C = 51\,500 - 850Y$ et la loi de Y , on obtient les valeurs suivantes : $c_0 = 51\,500$, $c_1 = 50\,650$, $c_2 = 49\,800$, $c_3 = 48\,950$, $c_4 = 48\,100$, $c_5 = 47\,250$, $c_6 = 46\,400$ (chacune avec la même probabilité que la valeur y_i correspondante de Y).

Par linéarité de l'espérance, $E(C) = 51\,500 - 850 \times E(Y)$, ou directement $E(C) = \sum_i c_i \times P(Y=y_i)$.

$E(C) \approx 51\,500 \times 0,94775 + 50\,650 \times 0,03063 + 49\,800 \times 0,01441 + 48\,950 \times 0,00539 + 48\,100 \times 0,00151 + 47\,250 \times 0,00028 + 46\,400 \times 0,00003 \approx 51\,429,25$.

Donc, la réponse est $E(C) \approx 51\,429$ € (à l'euro près).

Partie 2 — 5.d Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

En vendant exactement 200 billets (sans risque de pénalité), la compagnie réalise un chiffre d'affaires de $200 \times 250 = 50\,000$ €.

En pratiquant le surbooking à 206 billets, elle peut espérer un chiffre d'affaires moyen de 51 429 € (question précédente), soit 1 429 € de plus.

Donc, la réponse est que le surbooking est en moyenne plus avantageux pour la compagnie que la vente de 200 billets seulement.

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 1)

Partie A — 1. Lors de la fabrication d'une paire de lunettes, la paire de verres subit deux traitements T1 et T2. On prélève au hasard une paire de verres dans la production et on note A l'évènement « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 » et B l'évènement « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 ». On donne $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,2$, et la probabilité qu'une paire ne présente aucun des deux défauts est 0,75. Recopier et compléter le tableau à double entrée des probabilités (lignes $B/\overline{B}$, colonnes $A/\overline{A}$).

On sait que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,75$, donc, comme la ligne « Total » vaut 1, $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,2 = 0,8$ et $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,1 = 0,9$.

Dans la ligne $\bar{B}$, la case $A \cap \bar{B}$ vaut donc $P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,8 - 0,75 = 0,05$.

Dans la colonne A , le total vaut $P(A) = 0,1$, donc la case $A \cap B$ vaut $0,1 - 0,05 = 0,05$.

Dans la ligne B , la case $\bar{A} \cap B$ vaut $P(B) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,05 = 0,15$; on vérifie que la colonne $\bar{A}$ totalise bien $0,15 + 0,75 = 0,9 = P(\bar{A})$.

Le tableau complété est donc : ligne B : 0,05 (A), 0,15 ($\bar{A}$), 0,2 (total) ; ligne $\bar{B}$: 0,05 (A), 0,75 ($\bar{A}$), 0,8 (total) ; ligne Total : 0,1, 0,9, 1.

Partie A — 2.a Déterminer, en justifiant, la probabilité qu'une paire de verres prélevée au hasard présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.

L'évènement « la paire présente un défaut pour au moins un des deux traitements » est l'évènement $A \cup B$, contraire de l'évènement « la paire ne présente aucun des deux défauts », c'est-à-dire $\bar{A} \cap \bar{B}$.

Donc $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,75 = 0,25$.

Partie A — 2.b Donner la probabilité qu'une paire de verres prélevée au hasard présente deux défauts, un pour chaque traitement T1 et T2.

D'après le tableau de la question 1, la probabilité que la paire présente les deux défauts à la fois est directement lue dans la case $A \cap B$: $P(A \cap B) = 0,05$.

Partie A — 2.c Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

Si A et B étaient indépendants, on aurait $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or $P(A) \times P(B) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$, alors que $P(A \cap B) = 0,05$ (question précédente).

Comme $0,02 \neq 0,05$, les évènements A et B ne sont donc pas indépendants.

Partie A — 3. Calculer la probabilité qu'une paire de verres prélevée au hasard présente un défaut pour un seul des deux traitements.

Présenter un défaut pour un seul des deux traitements correspond à l'évènement $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$, réunion de deux évènements incompatibles.

D'après le tableau de la question 1, $P(A \cap \bar{B}) = 0,05$ et $P(\bar{A} \cap B) = 0,15$.

Donc, la probabilité cherchée vaut $0,05 + 0,15 = 0,2$.

Partie A — 4. Calculer la probabilité qu'une paire de verres prélevée au hasard présente un défaut pour le traitement T2, sachant qu'elle présente un défaut pour le traitement T1.

Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$$P_A(B) = \frac{0,05}{0,1} = 0,5.$$

Partie B — 1. On prélève au hasard un échantillon de 50 paires de verres, assimilé à un tirage avec remise vu la taille de la production. X est la variable aléatoire comptant, dans un tel échantillon, le nombre de paires présentant un défaut pour le traitement T1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

Le prélèvement est assimilé à la répétition de 50 tirages indépendants et identiques, chacun ayant deux issues : la paire présente le défaut T1 (probabilité $P(A) = 0,1$) ou non.

X compte le nombre de succès (le défaut T1) parmi ces 50 répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli : X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$, notée $X \sim \mathcal{B}(50 ; 0,1)$.

Partie B — 2. Donner l'expression permettant de calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, exactement 10 paires de verres présentant ce défaut. Effectuer ce calcul et arrondir le résultat à 10^{-3} .

$$P(X = 10) = \binom{50}{10} \times 0,1^{10} \times 0,9^{40}.$$

La calculatrice donne $P(X = 10) \approx \mathbf{0,015}$ au millième près.

Partie B — 3. En moyenne, combien de paires de verres présentant ce défaut peut-on trouver dans un échantillon de 50 paires ?

Le nombre moyen de paires présentant le défaut correspond à l'espérance de X , qui vaut $E(X) = n \times p = 50 \times 0,1 = 5$.

Donc, en moyenne, on trouve **5** paires de verres présentant ce défaut dans un échantillon de 50 paires.

Bac Terminale 2022 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1.a Une urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs, tous indiscernables au toucher. On tire au hasard, successivement et avec remise, deux jetons de cette urne. Un joueur perd 9 € si les deux jetons tirés sont blancs, perd 1 € si les deux jetons tirés sont noirs, et gagne 5 € si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

Notons B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et N l'évènement « le jeton tiré est noir ». Comme l'urne contient 3 jetons blancs et 2 jetons noirs sur 5 au total, $p(B) = \frac{3}{5}$ et $p(N) = \frac{2}{5}$.

Les tirages étant effectués avec remise, les probabilités sont les mêmes au premier et au second tirage : l'arbre pondéré comporte, à la première branche, B (probabilité $\frac{3}{5}$) ou N (probabilité $\frac{2}{5}$); puis, sous chacune de ces deux branches, à nouveau B (probabilité $\frac{3}{5}$) ou N (probabilité $\frac{2}{5}$) au second tirage, ces deux tirages étant indépendants du fait de la remise.

1.b Calculer la probabilité de perdre 9 € sur une partie.

Perdre 9 € correspond à tirer deux jetons blancs. Notons X la variable aléatoire donnant le gain du joueur sur une partie ; comme les deux tirages sont indépendants (tirages avec remise) : $p(X = -9) = p(B) \times p(B) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Donc, la probabilité de perdre 9 € sur une partie est égale à $\frac{9}{25}$ (soit **0,36**).

2.a On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et N jetons noirs, avec $N \geq 2$ (le nombre exact de jetons noirs n'étant pas connu). Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie. Déterminer la loi de probabilité de X .

L'urne contient à présent $N+3$ jetons au total, dont 3 blancs et N noirs. Sur un tirage, $p(B) = \frac{3}{N+3}$ et $p(N) = \frac{N}{N+3}$. La variable X prend les valeurs -9 , -1 et 5 .

Pour perdre 9 € (deux jetons blancs, tirages indépendants) : $p(X = -9) = \left(\frac{3}{N+3}\right)^2 = \frac{9}{(N+3)^2}$.

Pour perdre 1 € (deux jetons noirs) : $p(X = -1) = \left(\frac{N}{N+3}\right)^2 = \frac{N^2}{(N+3)^2}$.

Pour gagner 5 € (un jeton de chaque couleur, dans l'un ou l'autre ordre) : $p(X = 5) = 2 \times \frac{3}{N+3} \times \frac{N}{N+3} = \frac{6N}{(N+3)^2}$.

La loi de probabilité de X est donc donnée par : $p(X = -9) = \frac{9}{(N+3)^2}$, $p(X = -1) = \frac{N^2}{(N+3)^2}$ et $p(X = 5) = \frac{6N}{(N+3)^2}$.

2.b Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle $x : -x^2 + 30x - 81 > 0$.

Le trinôme $-x^2 + 30x - 81$ a pour discriminant $\Delta = 30^2 - 4 \times (-1) \times (-81) = 900 - 324 = 576 = 24^2$.

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-30 - 24}{2 \times (-1)} = \frac{-54}{-2} = 27$ et $x_2 = \frac{-30 + 24}{2 \times (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$.

Le coefficient dominant du trinôme étant $-1 < 0$, celui-ci est positif entre ses racines et négatif à l'extérieur : donc, $-x^2 + 30x - 81 > 0 \iff x \in]3 ; 27[$.

2.c En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.

Le jeu est favorable au joueur si, et seulement si, l'espérance de gain $E(X)$ est strictement positive.

$$\begin{aligned} \text{D'après la loi de probabilité établie à la question 2.a : } E(X) &= (-9) \times \frac{9}{(N+3)^2} + (-1) \times \frac{N^2}{(N+3)^2} + \\ &5 \times \frac{6N}{(N+3)^2} = \frac{-81 - N^2 + 30N}{(N+3)^2} = \frac{-N^2 + 30N - 81}{(N+3)^2}. \end{aligned}$$

Comme $(N+3)^2 > 0$, $E(X)$ est du signe de son numérateur $-N^2 + 30N - 81$. D'après la question précédente, ce numérateur est strictement positif si, et seulement si, $N \in]3 ; 27[$.

Or N est un entier naturel (un nombre de jetons), donc $E(X) > 0$ si, et seulement si, N est un entier vérifiant $4 \leq N \leq 26$.

Donc, le jeu est favorable au joueur lorsque l'urne contient entre 4 et 26 jetons noirs (bornes incluses).

2.d Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?

Le gain moyen est maximal lorsque la fonction g , définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(N) = \frac{-N^2 + 30N - 81}{(N+3)^2}$ (qui correspond à $E(X)$ vue comme fonction de N), atteint son maximum, c'est-à-dire lorsque $g'(N) = 0$ en changeant de signe.

La fonction g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. En utilisant la formule de dérivation d'un quotient : $g'(N) = \frac{(-2N+30)(N+3)^2 - (N+3)^{2'} \times (-N^2 + 30N - 81)}{(N+3)^4}$ avec $(N+3)^{2'} = 2(N+3)$.

En simplifiant par $(N+3)$ au numérateur et au dénominateur : $g'(N) = \frac{(-2N+30)(N+3) - 2(-N^2 + 30N - 81)}{(N+3)^3}$

Développons le numérateur : $(-2N+30)(N+3) = -2N^2 - 6N + 30N + 90 = -2N^2 + 24N + 90$, puis $-2(-N^2 + 30N - 81) = 2N^2 - 60N + 162$. La somme donne : $-2N^2 + 24N + 90 + 2N^2 - 60N + 162 = -36N + 252$.

Donc, $g'(N) = \frac{-36N + 252}{(N+3)^3} = \frac{-36(N-7)}{(N+3)^3}$. Comme $(N+3)^3 > 0$, $g'(N)$ est du signe de $-(N-7)$: positif avant $N = 7$, négatif après.

La fonction g est donc croissante sur $[0 ; 7]$ puis décroissante sur $[7 ; +\infty[$: elle admet un maximum en $N = 7$.

Donc, le joueur doit demander que l'urne contienne **7 jetons noirs** pour que son gain moyen soit maximal.

3. On suppose que l'urne contient désormais 7 jetons noirs et 3 jetons blancs. On observe 10 joueurs qui effectuent chacun une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un joueur gagnant 5 euros ?

Avec $N = 7$ jetons noirs et 3 jetons blancs (10 jetons au total), la probabilité de gagner 5 € sur une partie est, d'après la question 2.a : $p = \frac{6 \times 7}{(7+3)^2} = \frac{42}{100} = \frac{21}{50} = 0,42$.

Notons Y la variable aléatoire donnant le nombre de joueurs (parmi les 10) gagnant 5 €. Les 10 parties sont indépendantes et identiques, chacune ayant deux issues possibles (gagner 5 € ou non) : Y suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,42$, notée $\mathcal{B}(10 ; 0,42)$.

La probabilité d'avoir au moins un joueur gagnant 5 € est $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0)$, avec $p(Y = 0) = (1 - 0,42)^{10} = 0,58^{10}$.

À la calculatrice, $0,58^{10} \approx 0,0043$, donc $p(Y \geq 1) \approx 1 - 0,0043 \approx 0,996$.

Donc, la probabilité qu'au moins un joueur parmi les 10 gagne 5 € est d'environ **0,996** : cet événement est quasiment certain.

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

1. Le directeur d'une grande entreprise a proposé à tous ses salariés un stage de formation à un nouveau logiciel, suivi par 25 % des salariés. Parmi les 52 % de femmes de l'entreprise, 40 % ont suivi le stage. On interroge au hasard un salarié et on note F l'évènement « le salarié interrogé est une femme » et S l'évènement « le salarié interrogé a suivi le stage ». a. Donner la probabilité de l'évènement S .

L'énoncé indique directement que le stage a été suivi par 25 % des salariés interrogés au hasard, donc $P(S) = 0,25$.

1.b Recopier et compléter les branches de l'arbre pondéré associé aux événements F et S .

L'arbre part de la racine avec les branches F (probabilité 0,52) et $\overline{F}$ (probabilité $1 - 0,52 = 0,48$) ; sous F , les branches S (probabilité 0,40, donnée par l'énoncé) et $\overline{S}$ (probabilité $1 - 0,40 = 0,60$) ; sous $\overline{F}$, les branches S et $\overline{S}$ (probabilités encore inconnues à ce stade).

1.c Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage vaut 0,208.

On cherche $P(F \cap S)$. D'après la formule des probabilités composées : $P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0,52 \times 0,40 = 0,208$.

1.d Sachant que la personne interrogée a suivi le stage, quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

On cherche $P_S(F) = \frac{P(S \cap F)}{P(S)} = \frac{0,208}{0,25} = 0,832$. Donc, la probabilité que ce soit une femme sachant qu'elle a suivi le stage vaut **0,832**.

1.e Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés, moins de 10 % ont suivi le stage. Justifier cette affirmation.

D'après la formule des probabilités totales appliquée à S : $P(S) = P(S \cap F) + P(S \cap \bar{F})$, donc $P(S \cap \bar{F}) = P(S) - P(S \cap F) = 0,25 - 0,208 = 0,042$.

On cherche $P_{\bar{F}}(S) = \frac{P(S \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{0,042}{0,48} = 0,0875$.

Comme $0,0875 < 0,1$, l'affirmation du directeur est vérifiée : moins de 10 % des hommes salariés ont suivi le stage.

2.a On note X la variable aléatoire qui, à un échantillon de 20 salariés choisis au hasard, associe le nombre d'entre eux ayant suivi le stage (l'effectif de l'entreprise est assez grand pour assimiler ce choix à un tirage avec remise). Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par X .

Choisir 20 salariés indépendamment, chacun ayant suivi ou non le stage avec la même probabilité $p = P(S) = 0,25$ (tirage assimilé à un tirage avec remise), constitue la répétition de 20 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. X compte le nombre de succès (« a suivi le stage ») : X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$, notée $X \sim \mathcal{B}(20 ; 0,25)$.

2.b Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

$P(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,25^5 \times 0,75^{15} \approx 0,202$ (à la calculatrice). Donc, la probabilité que 5 salariés exactement aient suivi le stage vaut environ **0,202**.

2.c On donne un programme Python qui utilise la fonction 'binomiale(i, n, p)' renvoyant $P(X = i)$ pour $X \sim \mathcal{B}(n ; p)$: 'def proba(k) : ' puis 'P = 0', 'for i in range(0, k+1) : P = P + binomiale(i, 20, 0.25)', 'return P'. Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par 'proba(5)', et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

La boucle 'for i in range(0, k+1)' cumule les probabilités $P(X = i)$ pour i allant de 0 à k inclus. Donc 'proba(5)' calcule $P(X \leq 5) = \sum_{i=0}^5 P(X = i)$. À la calculatrice, $P(X \leq 5) \approx 0,617$. Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'il y a environ **61,7 % de chances qu'au plus 5 salariés, sur un échantillon de 20, aient suivi le stage.**

2.d Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

L'évènement « au moins 6 salariés ont suivi le stage » est l'évènement contraire de « au plus 5 salariés ont suivi le stage ». Donc $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 1 - 0,617 = 0,383$. Donc, la probabilité qu'au moins 6 salariés sur 20 aient suivi le stage vaut environ 0,383.

3. Cette question est indépendante des précédentes. Pour inciter les salariés à se former, l'entreprise a décidé d'augmenter de 5 % le salaire des salariés ayant suivi le stage, et de 2 % celui des salariés ne l'ayant pas suivi. Quel est le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de l'entreprise dans ces conditions ?

Le pourcentage moyen d'augmentation dépend en réalité de la répartition des salaires entre les deux catégories de salariés (ceux ayant suivi le stage et les autres), et pas seulement des proportions de salariés (25 % et 75 %). Illustrons avec deux répartitions différentes de la masse salariale, à effectifs identiques (25 salariés ayant suivi le stage, 75 ne l'ayant pas suivi, sur un échantillon de 100).

Premier cas : les 25 salariés formés touchent 1000 € et les 75 autres touchent 1200 €. La masse salariale totale avant augmentation est $25 \times 1000 + 75 \times 1200 = 115\,000$ €, soit un salaire moyen de 1150 €. Après augmentation, la masse salariale devient $25 \times 1000 \times 1,05 + 75 \times 1200 \times 1,02 = 118\,050$ €, soit un salaire moyen de 1180,50 €. Le coefficient multiplicateur moyen est $\frac{1180,50}{1150} \approx 1,0265$, soit une augmentation moyenne d'environ **2,65 %**.

Deuxième cas : les 25 salariés formés touchent 1200 € et les 75 autres touchent 1000 €. La masse salariale totale avant augmentation est $25 \times 1200 + 75 \times 1000 = 105\,000$ €, soit un salaire moyen de 1050 €. Après augmentation, la masse salariale devient $25 \times 1200 \times 1,05 + 75 \times 1000 \times 1,02 = 108\,000$ €, soit un salaire moyen de 1080 €. Le coefficient multiplicateur moyen est $\frac{1080}{1050} \approx 1,0286$, soit une augmentation moyenne d'environ **2,86 %**.

Les deux répartitions donnent des pourcentages moyens différents (2,65 % contre 2,86 %) alors que les proportions de salariés formés (25 %) et non formés (75 %) sont identiques. Donc, le **pourcentage moyen d'augmentation ne peut pas être déterminé avec les seules données de l'énoncé : il dépend de la répartition des salaires entre les deux groupes.**

Bac Terminale 2022 — Métropole, La Réunion, Antilles Guyane (jour 2)

Partie A — Le coyote est un mammifère sauvage proche du loup vivant en Amérique du Nord. Dans l'Oklahoma, 70 % des coyotes sont porteurs d'une maladie appelée l'ehrlichiose. Un test de dépistage existe : si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas ; s'il n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas. On capture un coyote au hasard et on lui applique le test. On note M l'évènement « le coyote est malade » et T l'évènement « le test est positif ». 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

L'arbre part de la racine avec les branches M (probabilité 0,7) et $\overline{M}$ (probabilité 0,3).

Sous M : les branches T (probabilité 0,97) et $\overline{T}$ (probabilité 0,03).

Sous $\overline{M}$: les branches T (probabilité 0,05) et $\overline{T}$ (probabilité 0,95).

2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et ait un test positif.

D'après l'arbre pondéré, $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,7 \times 0,97 = 0,679$.

3. Démontrer que $P(T) = 0,694$.

D'après la formule des probabilités totales, comme M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers :
 $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$.

Or $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$.

Donc, $P(T) = 0,679 + 0,015 = 0,694$.

4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif. Calculer cette valeur, arrondie au millièm.

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,679}{0,694} \approx 0,978 \text{ (arrondi au millièm)}.$$

5.a Par analogie, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et la calculer, arrondie au millièm.

La valeur prédictive négative du test est la probabilité que le coyote ne soit effectivement pas malade sachant que son test est négatif, c'est-à-dire $P_{\overline{T}}(\overline{M})$.

On calcule $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,694 = 0,306$ et $P(\overline{T} \cap \overline{M}) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,3 \times 0,95 = 0,285$.

$$\text{Donc, } P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{M})}{P(\overline{T})} = \frac{0,285}{0,306} \approx 0,931 \text{ (arrondi au millièm)}.$$

5.b Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter le résultat.

Comme $0,978 > 0,931$, la valeur prédictive positive est supérieure à la valeur prédictive négative : un résultat positif au test permet donc de conclure à la maladie avec un peu plus de certitude (environ 2,2 % d'erreur) qu'un résultat négatif ne permet de conclure à l'absence de maladie (environ 6,9 % d'erreur).

Partie B — On admet désormais que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif vaut 0,694. 1.a On capture cinq coyotes au hasard, ce choix étant assimilé à un tirage avec remise ; X compte, parmi ces cinq coyotes, le nombre de ceux dont le test est positif. Quelle est la loi de X ? Justifier et préciser ses paramètres.

La capture des cinq coyotes correspond à la répétition de cinq épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (par assimilation à un tirage avec remise), chacune de paramètre de succès 0,694 (« le test est positif »). Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,694$, notée $X \sim \mathcal{B}(5 ; 0,694)$.

1.b Calculer la probabilité qu'un seul des cinq coyotes ait un test positif, arrondie au centième.

$$P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,694^1 \times (1 - 0,694)^4 \approx 0,03 \text{ (arrondi au centième).}$$

1.c Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre des cinq coyotes aient un test positif. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier.

Il s'agit de comparer $P(X \geq 4)$ à $\frac{1}{2}$, avec $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$.

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \times 0,694^4 \times 0,306^1 \approx 0,3549 \text{ et } P(X = 5) = \binom{5}{5} \times 0,694^5 \times 0,306^0 \approx 0,1610.$$

Donc, $P(X \geq 4) \approx 0,3549 + 0,1610 = 0,5159$, valeur strictement supérieure à 0,5.

L'affirmation du vétérinaire est donc **vraie**.

2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'au moins un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils en capturer pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ait un test positif soit supérieure à 0,99 ?

On note n le nombre de coyotes capturés et Y la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,694$ comptant le nombre de tests positifs parmi eux. On cherche le plus petit n tel que $P(Y \geq 1) > 0,99$.

Or $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,306^n$ (probabilité de l'évènement contraire, qu'aucun test ne soit positif).

On résout donc dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $1 - 0,306^n > 0,99 \iff 0,306^n < 0,01$.

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$: $\ln(0,306^n) < \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,306) < \ln(0,01)$.

Comme $\ln(0,306) < 0$, l'inégalité change de sens en divisant : $n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,306)} \approx 3,89$.

Donc, les vétérinaires doivent capturer au moins **4 coyotes**.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 2)

Partie 1 — Stéphanie s'entraîne au basket-ball. Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points, et parmi eux 60 % sont réussis; les trois quarts restants sont des tirs à trois points, et parmi eux 35 % sont réussis. Elle réalise un tir; on note D l'évènement « le tir choisi est un tir à deux points » et R l'évènement « le tir est réussi ». 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

L'arbre part de la racine avec les branches D (probabilité 0,25) et $\overline{D}$ (probabilité 0,75). Sur la branche D , les sous-branches sont R (probabilité 0,6) et $\overline{R}$ (probabilité 0,4). Sur la branche $\overline{D}$, les sous-branches sont R (probabilité 0,35) et $\overline{R}$ (probabilité 0,65).

2. Calculer la probabilité $P(\overline{D} \cap R)$.

D'après la lecture de l'arbre : $P(\overline{D} \cap R) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(R) = 0,75 \times 0,35 = \mathbf{0,2625}$.

3. Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir quelconque est égale à 0,4125.

On calcule de même $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,25 \times 0,6 = 0,15$.

Les évènements D et $\overline{D}$ partitionnent l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(R) = P(D \cap R) + P(\overline{D} \cap R) = 0,15 + 0,2625 = \mathbf{0,4125}$, ce qui est le résultat annoncé.

4. Sachant que Stéphanie a réussi son tir, calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points (arrondir au centième).

D'après la définition de la probabilité conditionnelle : $P_R(\overline{D}) = \frac{P(R \cap \overline{D})}{P(R)} = \frac{0,2625}{0,4125}$.

On obtient $P_R(\overline{D}) \approx 0,6364$, soit, arrondi au centième, **0,64**.

Partie 2 — Stéphanie réalise une série de 10 tirs à trois points, supposés indépendants; on rappelle que la probabilité de réussir un tir à trois points vaut 0,35. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de tirs réussis. 1. Justifier que X suit une loi binomiale, et préciser ses paramètres.

Les 10 tirs sont indépendants et chacun n'a que deux issues possibles (réussi ou raté), avec la même probabilité de succès 0,35 à chaque tir : X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$.

2. Calculer l'espérance de X , et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour une loi binomiale, $E(X) = np = 10 \times 0,35 = \mathbf{3,5}$. Cela signifie que, si Stéphanie répète très souvent des séries de 10 tirs à trois points, elle réussira en moyenne 3,5 tirs par série.

3. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus sur cette série de 10 (arrondir au centième).

Rater 4 tirs ou plus sur 10, c'est en réussissant au plus $10 - 4 = 6$: l'évènement demandé correspond donc à $(X \leq 6)$.

À la calculatrice, avec X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$: $P(X \leq 6) \approx$
0,97.

4. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs sur cette série de 10 (arrondir au centième).

Rater au plus 4 tirs sur 10, c'est en réussissant au moins $10 - 4 = 6$: l'évènement demandé correspond donc à $(X \geq 6)$.

À la calculatrice : $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx$ **0,09.**

Partie 3 — Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points indépendants, avec n entier naturel non nul, la probabilité de réussir chaque tir restant égale à 0,35. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité qu'elle réussisse au moins un tir parmi les n soit supérieure ou égale à 0,99.

La probabilité de rater un tir donné vaut $1 - 0,35 = 0,65$. Comme les tirs sont indépendants, la probabilité de les rater tous les n vaut $0,65^n$.

La probabilité de réussir au moins un tir parmi les n est donc l'évènement contraire de « tout rater », de probabilité $1 - 0,65^n$.

On cherche le plus petit entier naturel non nul n tel que $1 - 0,65^n \geq 0,99$, c'est-à-dire $0,65^n \leq 0,01$.

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, cette inégalité équivaut à $\ln(0,65^n) \leq \ln(0,01)$, soit $n \ln(0,65) \leq \ln(0,01)$.

Comme $\ln(0,65) < 0$, diviser par $\ln(0,65)$ inverse le sens de l'inégalité : $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,65)}$.

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,65)} \approx 10,69$, donc le plus petit entier naturel qui convient est $n = 11$: Stéphanie doit prévoir une série d'au moins 11 tirs.

Bac Terminale 2022 — Nouvelle-Calédonie (jour 1)

Préambule (QCM). Un système de communication binaire transmet des bits (0 ou 1), avec un risque d'erreur de transmission (un 0 peut être reçu comme un 1 et réciproquement). Pour un bit choisi au hasard, on note E_0 : « le bit envoyé est 0 », E_1 : « le bit envoyé est 1 », R_0 : « le bit reçu est 0 », R_1 : « le bit reçu est 1 ». On donne $P(E_0) = 0,4$, $P_{E_0}(R_1) = 0,01$ et $P_{E_1}(R_0) = 0,02$.

On complète l'arbre pondéré : à la racine, les branches E_0 (probabilité 0,4) et E_1 (probabilité 0,6, car $P(E_1) = 1 - P(E_0)$). Sur la branche E_0 , les sous-branches sont R_0 (probabilité $1 - 0,01 = 0,99$) et R_1 (probabilité 0,01). Sur la branche E_1 , les sous-branches sont R_0 (probabilité 0,02) et R_1 (probabilité $1 - 0,02 = 0,98$).

1. Calculer la probabilité que le bit envoyé soit un 0 et que le bit reçu soit un 0.

D'après la formule des probabilités composées, $P(E_0 \cap R_0) = P(E_0) \times P_{E_0}(R_0) = 0,4 \times 0,99 = 0,396$.

2. Calculer la probabilité $P(R_0)$.

On calcule d'abord $P(E_1 \cap R_0) = P(E_1) \times P_{E_1}(R_0) = 0,6 \times 0,02 = 0,012$.

Les événements E_0 et E_1 forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(R_0) = P(E_0 \cap R_0) + P(E_1 \cap R_0) = 0,396 + 0,012 = 0,408$.

3. Donner une valeur approchée au millièmme de la probabilité $P_{R_1}(E_0)$.

On calcule d'abord $P(R_1) = 1 - P(R_0) = 1 - 0,408 = 0,592$.

On calcule ensuite $P(E_0 \cap R_1) = P(E_0) \times P_{E_0}(R_1) = 0,4 \times 0,01 = 0,004$.

D'après la définition de la probabilité conditionnelle, $P_{R_1}(E_0) = \frac{P(E_0 \cap R_1)}{P(R_1)} = \frac{0,004}{0,592} \approx 0,007$ au millièmme près.

4. Calculer la probabilité de l'évènement « il y a une erreur de transmission ».

Une erreur de transmission survient soit si un 0 est envoyé et reçu comme un 1 (évènement $E_0 \cap R_1$), soit si un 1 est envoyé et reçu comme un 0 (évènement $E_1 \cap R_0$) ; ces deux évènements sont incompatibles.

On a $P(E_0 \cap R_1) = 0,4 \times 0,01 = 0,004$ et $P(E_1 \cap R_0) = 0,6 \times 0,02 = 0,012$.

Donc $P(\text{erreur}) = P(E_0 \cap R_1) + P(E_1 \cap R_0) = 0,004 + 0,012 = 0,016$.

5. On admet que la probabilité qu'un octet (message de 8 bits) soit transmis sans erreur vaut 0,88. On transmet 10 octets de façon indépendante. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'exactly 7 octets soient transmis sans erreur.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'octets transmis sans erreur, parmi les 10 transmis de façon indépendante et avec la même probabilité de succès à chaque fois.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$.

On calcule $P(X = 7) = \binom{10}{7} \times 0,88^7 \times (1 - 0,88)^3 = \binom{10}{7} \times 0,88^7 \times 0,12^3 \approx 0,085$ au millièmme près.

6. On transmet 10 octets de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'au moins 1 octet soit transmis sans erreur.

Avec X la même variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$, l'évènement contraire de « au moins 1 octet transmis sans erreur » est « aucun octet transmis sans erreur », soit $X = 0$.

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0,88^0 \times (1 - 0,88)^{10} = 0,12^{10}.$$

$$\text{Donc } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,12^{10}.$$

7. Soit N un entier naturel et N_0 la plus grande valeur de N pour laquelle la probabilité que les N octets soient tous transmis sans erreur reste supérieure ou égale à 0,1. Déterminer N_0 .

La probabilité que N octets soient tous transmis sans erreur, de façon indépendante, vaut $0,88^N$.

On cherche donc la plus grande valeur entière de N telle que $0,88^N \geq 0,1$.

À la calculatrice, on trouve $0,88^{18} \approx 0,1002 \geq 0,1$, tandis que $0,88^{19} \approx 0,0881 < 0,1$.

Donc $N_0 = 18$.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 1)

1. On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x^2 + x + 1)$. Parmi les quatre propositions, laquelle donne l'expression de $g'(x)$ pour tout x strictement positif : a. $g'(x) = \frac{1}{2x+1}$; b. $g'(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$; c. $g'(x) = \ln(2x+1)$; d. $g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$?

La fonction g est de la forme $\ln(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$, strictement positive sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de termes positifs.

La fonction g est donc dérivable comme composée de fonctions dérivables, de dérivée $g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u'(x) = 2x + 1$, soit $g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Donc, la réponse est **d**.

2. Parmi les quatre fonctions proposées, laquelle est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln(x)$: a. $x \mapsto \ln(x)$; b. $x \mapsto \frac{1}{x}$; c. $x \mapsto x \ln(x) - x$; d. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$?

On dérive chaque candidate pour repérer celle dont la dérivée vaut $\ln(x)$. Pour $h(x) = x \ln(x) - x$, dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables : $h'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

La fonction h est donc bien une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

Donc, la réponse est **c**.

3. On considère la suite (a_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par $a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n}$. Quelle est la limite de la suite (a_n) : a. $-\infty$; b. -1 ; c. 1 ; d. $+\infty$?

$$\text{On met } 3^n \text{ en facteur au numérateur et } 2^n \text{ en facteur au dénominateur : } a_n = \frac{3^n \left(\frac{1}{3^n} - 1 \right)}{2^n \left(\frac{1}{2^n} + 1 \right)} = \left(\frac{3}{2} \right)^n \times \frac{\frac{1}{3^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, le quotient $\frac{\frac{1}{3^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1}$ tend vers $\frac{-1}{1} = -1$.

D'autre part, $\frac{3}{2} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n = +\infty$. Par produit d'une limite infinie par une limite négative, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$.

Donc, la réponse est **a**.

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2 ; 2]$, dont la dérivée f' admet le tableau de variations suivant sur $[-2 ; 2]$: f' vaut 1 en -2 , décroît jusqu'à -2 en 0, puis croît jusqu'à -1 en 2. Que peut-on en déduire sur f : a. f est convexe sur $[-2 ; -1]$; b. f est concave sur $[0 ; 1]$; c. f est convexe sur $[-1 ; 2]$; d. f est concave sur $[-2 ; 0]$?

La convexité de f se lit sur le sens de variation de sa dérivée f' : f est convexe là où f' est croissante, et concave là où f' est décroissante.

D'après le tableau, f' est strictement décroissante sur $[-2 ; 0]$ (elle passe de 1 à -2), donc f y est concave.

Donc, la réponse est **d**.

5. On donne la représentation graphique de la dérivée f' d'une fonction f définie sur $[-2 ; 4]$: la courbe part de $(-2 ; -3)$, monte en s'annulant en $x = -1$, atteint un maximum local proche de 1 en $x = 0$, redescend en s'annulant en $x = 1$ puis en $x = 2$, redevient positive et remonte jusqu'à $(4 ; 3)$. Quelle affirmation sur f est correcte : a. f est décroissante sur $[0 ; 2]$; b. f est décroissante sur $[-1 ; 0]$; c. f admet un maximum en 1 sur $[0 ; 2]$; d. f admet un maximum en 3 sur $[2 ; 4]$?

Le signe de f' donne le sens de variation de f : f croît là où f' est positive, et décroît là où f' est négative.

D'après la lecture graphique, $f'(x)$ est positive juste avant $x = 1$ puis devient négative juste après : f' change de signe en s'annulant en $x = 1$, en passant du positif au négatif.

La fonction f est donc croissante avant $x = 1$ puis décroissante après, sur l'intervalle $[0 ; 2]$: elle y admet donc un maximum atteint en $x = 1$.

Donc, la réponse est **c**.

6. Une action est cotée à 57 euros, et sa valeur augmente de 3 % chaque mois. On cherche un script Python 'seuil()' renvoyant le nombre de mois à attendre pour que la valeur dépasse 200 euros, parmi quatre propositions utilisant une boucle 'while' ou 'for'. Laquelle est correcte ?

- `def seuil() :`
- `m = 0`
- `v = 57`
- `while v < 200 :`
- `m = m + 1`
- `v = v * 1.03`
- `return m`

6. (suite) Justifier le choix de ce script parmi les quatre propositions.

Le script doit répéter l'augmentation mensuelle tant que la valeur de l'action n'a pas encore dépassé 200 euros : la condition de la boucle 'while' doit donc être ' $v < 200$ ', et non ' $v > 200$ ' (qui arrêterait la boucle immédiatement, puisque $57 < 200$).

Chaque passage dans la boucle doit correspondre à un mois écoulé, donc le compteur ' m ' doit être incrémenté de 1 à chaque itération, avant ou après la mise à jour de la valeur ' $v = v * 1.03$ '.

Une boucle 'for' sur un nombre d'itérations fixé à l'avance, ou une simple instruction conditionnelle 'if', ne conviennent pas ici puisque le nombre de mois recherché n'est pas connu à l'avance.

En simulant ce script, on trouve $m = 43$ mois avant que la valeur ne dépasse 200 euros. Donc, la réponse est le script utilisant ' $v < 200$ ' avec incrémentation de ' m ' à chaque tour de boucle.

Bac Terminale 2022 — Polynésie française (jour 2)

Partie 1 — Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. On estime que 20 % des casques portant ce logo sont des contrefaçons, que 2 % des casques authentiques présentent un défaut de conception, et que 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception. Un agent commande au hasard un casque affichant ce logo. On note C l'évènement « le casque est contrefait » et D l'évènement « le casque présente un défaut de conception » (les probabilités sont arrondies à 10^{-3} si besoin). 1. Calculer $P(C \cap D)$.

Puisque le casque est commandé au hasard, on assimile les proportions données aux probabilités des événements correspondants : $P(C) = 0,2$, $P_C(D) = 0,1$ et $P_{\overline{C}}(D) = 0,02$.

On en déduit l'arbre pondéré à deux niveaux : depuis la racine, une branche vers C (probabilité 0,2) puis vers D (probabilité 0,1) ou $\overline{D}$ (probabilité 0,9) ; une branche vers $\overline{C}$ (probabilité 0,8) puis vers D (probabilité 0,02) ou $\overline{D}$ (probabilité 0,98).

Par la formule des probabilités composées : $P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D) = 0,2 \times 0,1 = 0,02$.

Donc, la réponse est $P(C \cap D) = 0,02$.

2. Démontrer que $P(D) = 0,036$.

Les événements C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers (tout casque est soit contrefait, soit authentique), donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(D) = P(C \cap D) + P(\overline{C} \cap D)$.

On a déjà $P(C \cap D) = 0,02$, et $P(\overline{C} \cap D) = P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(D) = 0,8 \times 0,02 = 0,016$.

D'où $P(D) = 0,02 + 0,016 = 0,036$. Donc, la réponse est $P(D) = 0,036$.

3. Le casque commandé présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

On demande de calculer la probabilité conditionnelle $P_D(C)$, définie par $P_D(C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$ (avec $P(D) \neq 0$).

$$P_D(C) = \frac{0,02}{0,036} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \approx 0,556 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Donc, la réponse est $P_D(C) \approx 0,556$.

Partie 2 — On commande n casques portant ce logo, expérience assimilée à un tirage aléatoire avec remise. X désigne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans le lot. 1.a Dans cette question, $n = 35$. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$ avec $n = 35$ et $p = 0,036$.

On répète $n = 35$ fois, de façon identique et indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise), une expérience de Bernoulli : commander un casque, avec pour succès l'événement « le casque présente un défaut », de probabilité $p = P(D) = 0,036$ d'après la question 2 de la partie 1.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès obtenus sur ces 35 répétitions indépendantes.

Donc, la réponse est que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(35 ; 0,036)$.

1.b Calculer la probabilité qu'exactly un casque parmi les 35 commandés présente un défaut de conception.

On veut calculer $P(X = 1)$, avec X suivant la loi $\mathcal{B}(35 ; 0,036)$: $P(X = 1) = \binom{35}{1} \times 0,036^1 \times (1 - 0,036)^{34} = 35 \times 0,036 \times 0,964^{34}$.

À la calculatrice, $P(X = 1) \approx 0,362$ à 10^{-3} près.

Donc, la réponse est $P(X = 1) \approx 0,362$.

1.c Calculer $P(X \leq 1)$.

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$. On calcule $P(X = 0) = \binom{35}{0} \times 0,036^0 \times 0,964^{35} \approx 0,278$, et on a déjà $P(X = 1) \approx 0,362$.

D'où $P(X \leq 1) \approx 0,278 + 0,362 = 0,640$; le calcul direct à la calculatrice donne $P(X \leq 1) \approx 0,639$ à 10^{-3} près (l'écart avec 0,640 vient des arrondis intermédiaires).

Donc, la réponse est $P(X \leq 1) \approx 0,639$.

2. Dans cette question, n n'est pas fixé. Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieure à 0,99 ?

Pour un entier naturel non nul n , on note X_n la variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; 0,036)$ et qui compte le nombre de casques défectueux parmi n casques commandés.

La probabilité qu'au moins un casque présente un défaut est $P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,036^0 \times 0,964^n = 1 - 0,964^n$.

On résout, pour n entier naturel non nul : $P(X_n \geq 1) \geq 0,99 \iff 1 - 0,964^n \geq 0,99 \iff 0,964^n \leq 0,01$.

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, donc $0,964^n \leq 0,01 \iff n \ln(0,964) \leq \ln(0,01)$. Comme $0,964 < 1$, on a $\ln(0,964) < 0$, donc, en divisant par $\ln(0,964)$, le sens de l'inégalité s'inverse : $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)}$.

À la calculatrice, $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \approx 125,6$, donc les entiers naturels solutions sont ceux vérifiant $n \geq 126$.

Donc, la réponse est qu'il faut commander au moins **126 casques**.

Bac Terminale 2021 — Métropole, Mayotte, La Réunion, Antilles Guyane (jour 1)

Partie I — 1. Une chaîne de production fabrique des pièces mécaniques, dont 5 % sont défectueuses. Un test appliqué à une pièce détecte le défaut avec une probabilité de 0,98 sachant la pièce défectueuse, et donne un résultat négatif avec une probabilité de 0,97 sachant la pièce non défectueuse. On note D l'évènement « la pièce est défectueuse » et T l'évènement « le test est positif ». Construire l'arbre pondéré associé à cette expérience.

L'arbre part de deux branches D (probabilité 0,05) et $\overline{D}$ (probabilité 0,95). Depuis D partent T (probabilité 0,98) et $\overline{T}$ (probabilité 0,02). Depuis $\overline{D}$ partent T (probabilité 0,03, car $1 - 0,97$) et $\overline{T}$ (probabilité 0,97).

2.a Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse et présente un test positif.

En suivant la branche D puis T de l'arbre : $P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,05 \times 0,98 = 0,049$.

2.b Démontrer que $P(T) = 0,0775$.

On calcule d'abord $P(\overline{D} \cap T) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,95 \times 0,03 = 0,0285$.

D'après la formule des probabilités totales, appliquée à la partition $\{D ; \overline{D}\}$:

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) = 0,049 + 0,0285 = 0,0775.$$

3. On appelle valeur prédictive positive du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que son test est positif. On considère que le test est efficace si cette valeur dépasse 0,95. Calculer cette valeur prédictive positive et conclure sur l'efficacité du test.

$$\text{La valeur prédictive positive est } P_T(D) = \frac{P(T \cap D)}{P(T)} = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,049}{0,0775} \approx 0,632.$$

Comme $0,632 < 0,95$, ce test **n'est pas efficace** au sens de ce critère.

Partie II — 1. On prélève un échantillon de 20 pièces (tirage assimilé à un tirage avec remise) et on note X le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

Le prélèvement, assimilé à un tirage avec remise, répète 20 fois de façon indépendante l'épreuve de Bernoulli « la pièce est défectueuse », de probabilité de succès $p = 0,05$ constante. Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,05$.

2. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au moins une pièce défectueuse (arrondir au centième).

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,95^{20}.$$

À la calculatrice, $1 - 0,95^{20} \approx 0,642$. Donc, la réponse est **0,64** au centième près.

3. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour une loi binomiale, $E(X) = np = 20 \times 0,05 = 1$.

En moyenne, sur un grand nombre d'échantillons de 20 pièces prélevées, on trouve donc **1 pièce défectueuse par échantillon**.

Bac Terminale 2021 — Amérique du Nord

Partie A — Un laboratoire met au point un test anti-dopage. Si un athlète est dopé, le test est positif avec une probabilité de 0,98 ; s'il n'est pas dopé, le test est négatif avec une probabilité de 0,995. On note D l'évènement « l'athlète contrôlé est dopé » et T l'évènement « le test est positif », avec $P(D) = 0,08$. 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

Sur la première branche : $P(D) = 0,08$ et $P(\overline{D}) = 1 - 0,08 = 0,92$.

Depuis D : $P_D(T) = 0,98$ et $P_D(\overline{T}) = 1 - 0,98 = 0,02$.

Depuis $\overline{D}$: le test est négatif avec probabilité 0,995 pour un athlète non dopé, donc $P_{\overline{D}}(\overline{T}) = 0,995$ et $P_{\overline{D}}(T) = 1 - 0,995 = 0,005$.

Partie A — 2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.

Les évènements D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T)$.

$$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,08 \times 0,98 = 0,0784 \text{ et } P(\overline{D} \cap T) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,92 \times 0,005 = 0,0046.$$

$$\text{Donc } P(T) = 0,0784 + 0,0046 = 0,083.$$

Partie A — 3.a Sachant que le test d'un athlète est positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé (arrondie au millièmme) ?

$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0784}{0,083} \approx \mathbf{0,945} \text{ (au millièmme).}$$

Partie A — 3.b Le laboratoire commercialise le test si la probabilité qu'un athlète testé positif soit réellement dopé est supérieure ou égale à 0,95. Ce test sera-t-il commercialisé ?

D'après la question précédente, $0,945 < 0,95$, donc le test ne sera pas commercialisé.

Partie B — Dans une compétition, la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103. 1.a On contrôle 5 athlètes au hasard ; X compte le nombre de tests positifs parmi eux. Donner la loi de X et ses paramètres.

Chaque contrôle est une épreuve à deux issues (positif/négatif) de probabilité $p = 0,103$, répétée $n = 5$ fois de façon indépendante : X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,103$.

Partie B — 1.b Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat.

$$E(X) = np = 5 \times 0,103 = 0,515.$$

Cela signifie que, sur un grand nombre de séries de 5 contrôles, on obtient en moyenne environ 0,515 test positif par série, soit à peu près 1 athlète positif sur 10 contrôlés.

Partie B — 1.c Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif (arrondie au millième) ?

L'évènement contraire de « au moins un test positif » est « aucun test positif », c'est-à-dire $\{X = 0\}$.

$$P(X = 0) = (1 - 0,103)^5 = 0,897^5 \approx 0,581.$$

$$\text{Donc } P(X \geq 1) = 1 - 0,581 \approx \mathbf{0,419} \text{ (au millième).}$$

Partie B — 2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité d'avoir au moins un test positif soit supérieure ou égale à 0,75 ?

Pour n athlètes contrôlés, en notant X_n le nombre de tests positifs, $P(X_n = 0) = 0,897^n$, donc $P(X_n \geq 1) = 1 - 0,897^n$.

On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0,897^n \geq 0,75 \iff 0,897^n \leq 0,25$.

À la calculatrice : $0,897^{12} \approx 0,271 > 0,25$ mais $0,897^{13} \approx 0,243 \leq 0,25$.

Donc, la réponse est qu'il faut contrôler au minimum **13 athlètes**.

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 1)

1. Une influenceuse compte $u_0 = 1\,000$ abonnés en 2020. Chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés puis en gagne 250 nouveaux. On note u_n le nombre d'abonnés en l'année $(2020 + n)$. Calculer u_1 .

Perdre 10 % revient à multiplier par 0,9. Donc $u_1 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = \mathbf{1\,150}$ abonnés.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

Multiplier par 0,9 traduit la perte de 10 % des abonnés d'une année sur l'autre.

On ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

3. Une fonction Python 'suite(n)' initialise 'u = 1000', puis répète 'n' fois 'u = 0.9*u + 250', avant de renvoyer 'u'. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la valeur renvoyée par l'appel 'suite(10)'.

La fonction calcule u_{10} , c'est-à-dire le nombre d'abonnés estimé en l'année 2030 ; la calculatrice donne $u_{10} \approx 1\,977$ abonnés.

4.a Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

Initialisation : $u_0 = 1\,000 \leq 2\,500$, la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, $u_n \leq 2\,500$. Comme $0,9 > 0$, la multiplication conserve l'ordre : $0,9u_n \leq 0,9 \times 2\,500 = 2\,250$, puis en ajoutant 250 aux deux membres, $0,9u_n + 250 \leq 2\,500$, soit $u_{n+1} \leq 2\,500$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.

4.b Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.

Or, d'après la question précédente, $u_n \leq 2\,500$, donc $0,1u_n \leq 250$, soit $-0,1u_n + 250 \geq 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est **croissante**.

4.c Dédire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 500 : d'après le théorème de convergence monotone, elle **converge** vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

5.a On pose $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n . Montrer que (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1\,500$.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500 = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9(u_n - 2\,500) = 0,9v_n$.

La relation $v_{n+1} = 0,9v_n$, vraie pour tout entier naturel n , montre que (v_n) est géométrique de raison 0,9.

Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

5.b Exprimer v_n en fonction de n , puis montrer que $u_n = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

Comme (v_n) est géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $v_0 = -1\,500$, pour tout entier naturel n : $v_n = -1\,500 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 2\,500$, donc $u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

5.c Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Comme $0 < 0,9 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$, donc par produit puis somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\,500$.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que le nombre d'abonnés de l'influenceuse **se stabilise autour de 2 500** au fil des années.

6. Écrire un programme qui détermine en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200, puis donner cette année.

- $n = 0$
- $u = 1000$
- tant que $u \leq 2200$:
- $u = 0,9 * u + 250$
- $n = n + 1$
- renvoyer n
- En simulant l'évolution terme à terme, on obtient $u_{15} \approx 2\,191,2 \leq 2\,200$ et $u_{16} \approx 2\,222,0 > 2\,200$: le programme renvoie $n = 16$.
- Donc, la réponse est que le nombre d'abonnés dépasse 2 200 la seizième année suivant 2020, c'est-à-dire en **2036**.

Bac Terminale 2021 — Asie (jour 2)

1. Une application génère un ticket sur une grille 3×3 où trois cases contiennent chacune un cœur, disposées au hasard. Justifier qu'il existe exactement 84 façons différentes de placer ces trois cœurs sur la grille.

Placer trois cœurs sur la grille revient à choisir 3 cases parmi les 9 de la grille, sans tenir compte de l'ordre : le nombre de façons est donc $\binom{9}{3}$.

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \frac{504}{6} = 84.$$

Il y a bien 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur la grille.

2. Un ticket est gagnant si les trois cœurs sont alignés côte à côte sur une même ligne, une même colonne ou une même diagonale. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant vaut $\frac{2}{21}$.

La grille compte 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales, soit 8 alignements possibles de trois cases : il y a donc 8 grilles gagnantes parmi les 84 grilles possibles (équiprobables).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est $\frac{8}{84} = \frac{2}{21}$ (en simplifiant par 4).

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est donc bien égale à $\frac{2}{21}$.

3. À chaque ticket généré, le joueur verse 1 € ; si le ticket est gagnant, la société lui reverse 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Soit X le gain algébrique du joueur pour un ticket. Un ticket gagnant rapporte $5 - 1 = 4$ € (le joueur récupère les 5 € mais a déjà versé 1 €), un ticket perdant coûte 1 €.

$$P(X = 4) = \frac{2}{21} \text{ et } P(X = -1) = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}.$$

$$E(X) = 4 \times \frac{2}{21} + (-1) \times \frac{19}{21} = \frac{8 - 19}{21} = -\frac{11}{21} \approx -0,524.$$

L'espérance de gain est négative : en moyenne, le joueur perd environ 0,52 € par ticket généré. Le jeu est donc défavorable au joueur.

4.a Un joueur génère 20 tickets de façon indépendante. Soit X le nombre de tickets gagnants parmi ces 20 tickets. Donner la loi de probabilité de X .

Chaque génération de ticket est une épreuve à deux issues (gagnant / perdant) de probabilité de succès $p = \frac{2}{21}$, répétée $n = 20$ fois de façon indépendante.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{2}{21}$.

4.b Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 5)$, arrondie à 10^{-3} .

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{2}{21}\right)^5 \times \left(\frac{19}{21}\right)^{15} \approx \mathbf{0,027} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

4.c Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$, arrondie à 10^{-3} , puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$$(X \geq 1) \text{ est l'évènement contraire de } (X = 0), \text{ donc } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^{20} \approx 1 - 0,135 \approx \mathbf{0,865} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}.$$

Sur 20 tickets générés, le joueur a donc environ 86,5 % de chances d'obtenir au moins un ticket gagnant.

Bac Terminale 2021 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

1. QCM. On étudie g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2x - \frac{3}{x}$. Parmi les quatre équations proposées, laquelle est celle de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1 ?

g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout x de cet intervalle : $g'(x) = 2x + 2 + \frac{3}{x^2}$.

On calcule $g'(1) = 2 + 2 + 3 = 7$ et $g(1) = 1 + 2 - 3 = 0$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = g'(1)(x - 1) + g(1) = 7(x - 1)$, soit $y = 7x - 7$.

Donc, la réponse est **a.** $y = 7(x - 1)$.

2. QCM. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{3n}{n+2}$. Quelle est la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$?

Pour $n \geq 1$, on peut écrire $v_n = \frac{3n}{n(1 + \frac{2}{n})} = \frac{3}{1 + \frac{2}{n}}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$, le dénominateur tend vers 1, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$.

Donc, la réponse est **b.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$.

3. QCM. Une urne contient 6 boules noires et 4 boules rouges. On effectue 10 tirages successifs avec remise. Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près, d'obtenir exactement 4 boules noires et 6 boules rouges ?

Si X désigne le nombre de boules noires obtenues sur les 10 tirages, chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,6$ (tirage avec remise), donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,6$.

On veut $P(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,6^4 \times 0,4^6 \approx 0,11148$, soit environ **0,1115** à 10^{-4} près.

Donc, la réponse est **c.** **0,1115**.

4. QCM. On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^x - x$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?

Pour $x \neq 0$, on factorise : $f(x) = x \left(3\frac{e^x}{x} - 1 \right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (croissance comparée), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$.

Par produit de limites (avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$), on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc, la réponse est **b.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

5. QCM. Un code secret comporte 8 caractères, chacun étant une lettre ou un chiffre parmi 36 signes possibles. Un logiciel teste environ 100 millions de codes par seconde. En combien de temps, au maximum, peut-il trouver le code ?

Le nombre total de codes possibles est $36^8 = 2\,821\,109\,907\,456$.

Au rythme de 10^8 codes par seconde, il faut au maximum $\frac{2\,821\,109\,907\,456}{10^8} \approx 28\,211$ secondes, soit environ 470 minutes, soit environ 7,8 heures.

Donc, la réponse est **b. environ 8 heures**.

Bac Terminale 2021 — Centres étrangers - Groupe 1 (jour 2)

Partie A (avec $a = \frac{2}{3}$) — **1.** ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE, J est le point du segment [CG] tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$. Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de F, I et J.

Le cube a pour arête 1 dans ce repère, donc F, sommet opposé à D sur la face supérieure du carré ABFE, a pour coordonnées $F(1 ; 0 ; 1)$.

I est le centre de la face ADHE, donc le milieu de [AH] (et aussi de [DE]) : $I\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Comme $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ avec $C(1 ; 1 ; 0)$ et $G(1 ; 1 ; 1)$, on a $J\left(1 ; 1 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 2. On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ). Déterminer une représentation paramétrique de (d).

$$\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ (obtenu par } J - F\text{)}.$$

(d) passe par $I\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et admet $\overrightarrow{FJ}$ pour vecteur directeur, donc une représentation paramétrique de (d) est : $x = 0, y = \frac{1}{2} + t, z = \frac{1}{2} - \frac{t}{3}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Partie A — 3.a K est le point d'intersection de (d) et de (AE). Montrer que K a pour coordonnées $\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.

La droite (AE) est l'axe des cotes (points d'ordonnée nulle). On cherche donc le point de (d) tel que $y = 0 : \frac{1}{2} + t = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$.

La cote correspondante vaut $z = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

On obtient bien $K\left(0 ; 0 ; \frac{2}{3}\right)$.

Partie A — 3.b Déterminer les coordonnées du point L, intersection de (d) et de (DH).

Tous les points de (DH) ont pour ordonnée 1. On cherche donc le point de (d) tel que $y = 1$:
 $\frac{1}{2} + t = 1 \iff t = \frac{1}{2}$.

La cote correspondante vaut $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Donc, la réponse est $L\left(0 ; 1 ; \frac{1}{3}\right)$.

Partie A — 4.a Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.

Le milieu de [FL] a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2} ; \frac{0+1}{2} ; \frac{1+\frac{1}{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{2}{3}\right)$.

Le milieu de [JK] a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2} ; \frac{1+0}{2} ; \frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{2}{3}\right)$.

Les diagonales [FL] et [JK] ont le même milieu : **FJLK est donc un parallélogramme.**

Partie A — 4.b Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.

$$\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) + \left(-\frac{2}{3}\right) \times 0 = 1 - 1 + 0 = 0.$$

Les diagonales du parallélogramme FJLK sont donc perpendiculaires : **FJLK est un losange.**

Partie A — 4.c Le quadrilatère FJLK est-il un carré ?

$$\overrightarrow{KF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{KF} \cdot \overrightarrow{FJ} = 0 + 0 - \frac{1}{9} = -\frac{1}{9} \neq 0.$$

Les côtés consécutifs [KF] et [FJ] ne sont donc pas perpendiculaires : le losange FJLK n'est pas un rectangle, donc, la réponse est **non, FJLK n'est pas un carré.**

Partie B (cas général) — 1. On admet désormais que $K\left(0 ; 0 ; 1 - \frac{a}{2}\right)$ et $L\left(0 ; 1 ; \frac{a}{2}\right)$, avec $a \in [0 ; 1]$. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a.

$$G \text{ a pour coordonnées } (1 ; 1 ; 1), \text{ donc } \overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Comme $C(1 ; 1 ; 0)$, on en déduit $J(1 ; 1 ; a)$.

Partie B — 2. Montrer que FJLK est un parallélogramme, quelle que soit la valeur de a .

$$\overrightarrow{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \text{ (en calculant } \frac{a}{2} - \left(1 - \frac{a}{2}\right) = a-1 \text{).}$$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{KL}$: **FJLK est donc un parallélogramme pour toute valeur de a .**

Partie B — 3. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles FJLK est un losange ?

$$\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{a}{2} - 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 - \frac{3a}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FL} \cdot \overrightarrow{JK} = 1 - 1 + \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{3a}{2}\right).$$

Ce produit s'annule si et seulement si $\frac{a}{2} = 1$ (soit $a = 2$) ou $1 - \frac{3a}{2} = 0$ (soit $a = \frac{2}{3}$).

Seule la valeur $a = \frac{2}{3}$ appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$: dans ce cas, les diagonales du parallélogramme FJLK sont perpendiculaires, donc, la réponse est **oui, uniquement pour $a = \frac{2}{3}$, FJLK est un losange.**

Partie B — 4. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles FJLK est un carré ?

D'après la question précédente, la seule valeur de a rendant FJLK losange est $a = \frac{2}{3}$, cas déjà étudié en partie A où l'on a montré que ce losange n'était pas un carré : donc, la réponse est **non, il n'existe aucune valeur de a pour laquelle FJLK est un carré.**

Bac Terminale 2021 — Polynésie française

Un test de dépistage est développé pour une maladie touchant 7 % de la population d'un pays. Parmi les personnes infectées, 20 % obtiennent un résultat négatif au test ; parmi les personnes saines, 1 % obtiennent un résultat positif. On choisit une personne au hasard et on note M l'évènement « la personne est infectée » et T l'évènement « le test est positif ». 1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

On a $P(M) = 0,07$ et donc $P(\overline{M}) = 1 - 0,07 = 0,93$.

Puisque 20 % des personnes infectées ont un résultat négatif : $P_M(\overline{T}) = 0,2$, donc $P_M(T) = 1 - 0,2 = 0,8$.

Puisque 1 % des personnes saines ont un résultat positif : $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$, donc $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 1 - 0,01 = 0,99$.

L'arbre pondéré a donc pour première branche $P(M) = 0,07$ et $P(\overline{M}) = 0,93$, puis les branches secondaires $P_M(T) = 0,8$, $P_M(\overline{T}) = 0,2$, $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,99$.

2.a Quelle est la probabilité que la personne choisie soit infectée et ait un test positif ?

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = \mathbf{0,056}.$$

2.b Montrer que la probabilité que le test soit positif vaut 0,0653.

$$\text{On calcule d'abord } P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093.$$

Les événements M et $\overline{M}$ formant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,056 + 0,0093 = 0,0653$.

3. Sachant que le test de la personne choisie est positif, quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-2} près.

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,056}{0,0653} \approx 0,8576, \text{ soit environ } \mathbf{0,86} \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

4.a On interroge dix personnes au hasard dans la population, ce que l'on assimile à un tirage avec remise du fait de la taille de la population. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes ayant un test positif parmi les dix. Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.

Le tirage avec remise revient à répéter dix fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues (test positif ou non) de probabilité de succès $P(T) = 0,0653$: X suit donc la **loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,0653$** .

4.b Déterminer la probabilité que, parmi les dix personnes interrogées, exactement deux aient un test positif (résultat arrondi à 10^{-2} près).

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^{10-2} = 45 \times 0,0653^2 \times 0,9347^8.$$

À la calculatrice, $P(X = 2) \approx 0,1118$, soit environ **0,11** à 10^{-2} près.

5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif dépasse 99 %.

Pour n personnes testées, en notant X_n le nombre de tests positifs, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,0653$, donc $P(X_n = 0) = (1 - 0,0653)^n = 0,9347^n$, d'où $P(X_n \geq 1) = 1 - 0,9347^n$.

On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0,9347^n > 0,99 \iff 0,9347^n < 0,01$.

En passant au logarithme népérien (la fonction $\ln$ est strictement croissante, et $\ln 0,9347 < 0$, donc l'inégalité change de sens) : $n \ln 0,9347 < \ln 0,01 \iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,9347}$.

Or $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} \approx 68,19$.

Donc, la réponse est qu'il faut tester au minimum **69 personnes**.